

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В. ПЛЕХАНОВА»

На правах рукописи

МАСЛОВ СЕРГЕЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики
(экономические науки)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Научный руководитель -
доктор технических наук,
профессор Косоруков Олег Анатольевич

Москва - 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ	13
1.1 Процесс управления запасами и его основные характеристики	13
1.2 Стохастические модели управления запасами	16
ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ НАЗНАЧЕНИЯ ПОСТАВКИ	21
2.1 Модель оптимизации времени назначения поставки с учетом неопределенности спроса по критерию минимизации дополнительных издержек	22
2.2 Модель оптимизации времени назначения поставки с учетом неопределенности времени поставки по критерию минимизации дополнительных издержек	55
2.3 Модели оптимизации времени поставки в условиях неопределенности времени доставки с учетом рисков начисления неустоек	73
2.3.1 Модель минимизации дополнительных издержек с учетом рисков начисления штрафов	74
2.3.2 Модель минимизации дополнительных издержек с учетом рисков начисления пени	81
ГЛАВА 3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЪЕМА ПОСТАВКИ	86
3.1 Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности спроса по критерию минимизации дополнительных издержек	86
3.2 Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности времени поставки по критерию минимизации дополнительных издержек	126

3.3 Модели оптимизации объема поставки в условиях неопределенности спроса по критерию максимизации ожидаемой прибыли	141
3.3.1 Модель оптимизации объема поставки с учетом дополнительных издержек хранения и рисков потери клиентов для товаров длительного срока хранения	142
3.3.2 Модель оптимизации объема поставки с учетом дополнительных издержек хранения и рисков потери клиентов для товаров с ограниченным сроком хранения	146
ГЛАВА 4 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ НАЗНАЧЕНИЯ ПОСТАВКИ	151
4.1 Расчет оптимального момента поставки с учетом неопределенности спроса	151
4.2 Расчет оптимального момента поставки с учетом неопределенности времени поставки	161
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	171
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	174
ПРИЛОЖЕНИЕ А	187
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	189
ПРИЛОЖЕНИЕ В	192
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	194
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	196
ПРИЛОЖЕНИЕ Е	199
ПРИЛОЖЕНИЕ И	201
ПРИЛОЖЕНИЕ К	203
ПРИЛОЖЕНИЕ Л	207

ПРИЛОЖЕНИЕ М	209
ПРИЛОЖЕНИЕ Н	212
ПРИЛОЖЕНИЕ П	214
ПРИЛОЖЕНИЕ Р	216
ПРИЛОЖЕНИЕ С	218
ПРИЛОЖЕНИЕ Т	220
ПРИЛОЖЕНИЕ У	222
ПРИЛОЖЕНИЕ Ф	224

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Оптимизация товарных потоков в системах управления запасами, обеспечивающая максимизацию удовлетворения потребительского спроса и снижение торговых издержек, является достаточно эффективным направлением повышения конкурентоспособности и финансовой устойчивости компаний, производящих и реализующих товары для населения.

С одной стороны, компаниям необходимо осуществлять вложения в формирование запасов, с целью максимального удовлетворения спроса клиентов. С другой стороны, не менее значимой проблемой является обеспечение рентабельности этих вложений, поиск новых вариантов снижения издержек и увеличение прибыли. С учетом этого теоретически оптимальным является состояние, когда запасов нет и при этом полностью удовлетворяются производственные потребности фирмы, но такого состояния трудно достичь в реальных условиях. В этой связи возникает проблема нахождения компромисса между объемом запаса и степенью удовлетворения спроса на реализуемые товары и услуги, которая обычно решается на основе оптимизации управления запасами. Многие компании несут необоснованно завышенные издержки в процессе управления запасами из-за ошибок при формировании их структуры, оценки отдельных ее составляющих элементов, включая возможные риски потерь вследствие недостоверных прогнозов спроса, последствий его неудовлетворения, неправильной оценки запасов и т.д. Эти случайные по своей природе ошибки во многом являются следствием неопределенности, обусловленной неточностью прогнозов размера спроса, временными отклонениями в сроках поставок, потерями продукции ограниченного срока хранения и другими факторами, которая существенно усложняет вопросы принятия логистических решений, и ведет к увеличению издержек, а следовательно, и потере конкурентоспособности предприятия. В силу вышесказанного, поиск оптимальной стратегии управления товарными запасами с учетом состава издержек, адекватных процессам его формирования в условиях неопределенности, является важным направлением повышения

эффективности торговых и производственных предприятий, что и обосновывает актуальность данного диссертационного исследования.

Степень научной разработанности проблемы. Влияние стратегий управления запасами на экономические показатели предприятия широко представлены в отечественной и зарубежной научной литературе, в частности в работах Аникина Б.А., Тяпухина А.П., Бродецкого Г.Л., Просветова Г.И., Цвиренько И.А., Шикина Е.В., Чхартишвили А.Г., Шрайбфедер Дж. и других авторов. Определенную сложность при решении этой проблемы представляет учет элементов случайности и неопределенности параметров рассматриваемых процессов. В такой ситуации в России большинство торговых предприятий при управлении товарными запасами ориентируются на средние показатели спроса и длительности поставки.

Вместе с тем, подходы к получению оптимальных решений управления потоками запасов в условиях неопределенности по формированию объемов и времени поставки описаны в научных работах Дуброва А.М., Лагоши Б.А., Хрусталева Е.Ю., Шапиро Дж., Косорукова О.А., Свиридовой О.А., Рубальского Г.Б., Юдина Д.Б. Лотоцкого В.А., Рыжикова Ю.И.

Однако в большинстве этих работ используется предположение о нормальном законе распределения рассматриваемых случайных величин. Во многом это было обусловлено существующей в научных исследованиях традицией его применения в отсутствие достаточного объема статистических данных. Попытки восполнить отсутствие исходной информации экспертными оценками были предприняты в работах Петрусевича А.В., который предложил неопределенность спроса моделировать на основе вариационного спектра оценок экспертов. Исходя из предположения о равнозначности представленных экспертных оценок, автор обосновывает возможность использования равномерного распределения для описания отклонений в объемах спроса и времени поставки. Однако такое предположение не представляется обоснованным с точки зрения практики.

Кроме того, при оптимизации товарных потоков в критериях и ограничениях моделей не учитывается ряд практически важных издержек, как, например, издержки выплаты неустоек и издержки, связанные с риском потери клиентов в результате недопоставок или неполного удовлетворения спроса.

Необходимость повышения эффективности управления запасами и тем самым конкурентоспособности компаний на основе оптимизации момента назначения и объема поставки с учетом случайного характера фактического времени поставки и спроса и адекватного практике управления запасами состава издержек этого процесса и предопределили выбор объекта, предмета, цели и задач диссертационного исследования.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка стохастических моделей оценки параметров и оптимального управления товарными запасами по показателям объемов и сроков поставки в условиях неопределенности времени поставки и размеров спроса, обуславливающей риски возникновения дополнительных издержек.

В соответствии с этой целью в работе поставлены и решены следующие задачи:

1) выявлены направления совершенствования существующих подходов и моделей управления запасами в условиях неопределенности спроса и времени поставки;

2) расширен состав и уточнено содержание издержек, обусловленных нарушениями сроков поставки товаров и ошибками в оценке их объемов, в том числе и в связи с ошибками в оценках спроса;

3) предложены альтернативные варианты распределений, которые можно использовать для моделирования случайных отклонений в спросе и времени поставки при оценке и управлении товарными запасами при недостаточной исходной информации;

4) предложены варианты критериев эффективности управления сроками поставок, учитывающие расширенный состав детерминированных и случайных издержек, с использованием которых разработаны нелинейные непрерывные оптимизационные стохастические модели оценки момента назначения поставки при фиксированных сроках заказов;

5) предложены варианты критериев эффективности управления объемами поставок, учитывающие расширенный состав детерминированных и случайных издержек, с использованием которых разработаны нелинейные непрерывные оптимизационные стохастические модели оценки объемов поставки при фиксированных сроках доставки товаров длительного и ограниченного сроков хранения;

б) проведена верификация разработанных моделей оптимизации момента поставки и объема поставки для автотранспортных и железнодорожных однономенклатурных поставок.

Объект и предмет исследования. Объектом диссертационного исследования является система управления товарными запасами предприятия. Предметом исследования являются модели и методы оптимизации процессов управления запасами предприятия в условиях неопределенности параметров внешней среды.

Область исследования. Результаты диссертационного исследования соответствуют Паспорту специальностей ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации по специальности 08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики и пунктам областей исследования, а именно: п. 1.4 Разработка и исследование моделей и математических методов анализа микроэкономических процессов и систем: отраслей народного хозяйства, фирм и предприятий, домашних хозяйств, рынков, механизмов формирования спроса и потребления, способов количественной оценки предпринимательских рисков и обоснования инвестиционных решений, п. 2.3 Разработка систем поддержки принятия решений для рационализации организационных структур и оптимизации управления экономикой на всех уровнях.

Теоретическая и методологическая основа исследования. Теоретической и методологической основой исследования являются труды отечественных и зарубежных специалистов по проблемам логистики, управления цепями поставок, управления запасами, управления рисками, исследования операций и методам оптимизации.

Методы исследования. В ходе выполнения исследования использовались методы математического анализа, теории оптимизации, финансового анализа, математического программирования, теории вероятностей и математической статистики, методы оптимизационного моделирования. Для проведения расчетов на основе построенных моделей использовались программные пакеты «Microsoft Excel» и «Matlab».

Научная новизна исследования. Научная новизна диссертационного исследования состоит в разработке комплекса нелинейных непрерывных стохастических оптимизационных моделей управления запасами в условиях неопределенности спроса и времени поставки с уточненными критериями на минимум издержек управления запасами и максимум прибыли, учитывающими расширенный состав и стохастический характер дополнительных издержек, обусловленных сверхнормативным хранением, дефицитом, выплатами штрафов и пени, потерями продукции ограниченного срока хранения, риском потери клиентов и т.д., и аналитических методов решения оптимизационных задач определения объемов и сроков поставок при треугольных распределениях отклонений реальных величин спроса и времени поставки от ожидаемых.

Наиболее существенные результаты исследования, полученные лично автором и выдвигаемые на защиту, состоят в следующем:

1) расширен состав и уточнено содержание издержек управления запасами, среди которых наряду с традиционными издержками дефицита и хранения учтены издержки рисков потери клиентов, выплат штрафов, пени, возникающие в результате нарушения договорных обязательств, потери просроченной продукции с ограниченным сроком хранения;

2) обоснована целесообразность использования треугольного распределения для представления неопределенности случайных отклонений фактического момента поставки от момента назначенной поставки, а также фактического спроса от ожидаемого в случае недостаточности статистических данных;

3) разработаны нелинейные непрерывные стохастические модели оптимизации моментов назначения поставок в условиях неопределенности спроса и времени доставки и с фиксированными временами заказов с критериями на минимум математического ожидания различных вариантов суммарных издержек, включая дополнительные издержки дефицита, хранения нереализованной продукции, а также начисления неустоек за нарушение условий контрактных обязательств, в виде фиксированных штрафов и пени;

4) разработаны нелинейные непрерывные стохастические модели оптимизации объемов поставки в условиях неопределенности спроса и времени доставки с критериями на максимум математического ожидания прибыли и минимум математического ожидания суммарных издержек, в составе которых учитываются дополнительные издержки хранения нереализованной продукции, риски потери клиентов и риски потери просроченной продукции с ограниченным сроком хранения;

5) обоснованы алгоритмы аналитического решения задач оптимизации времени назначения поставки и объема поставки и на их основе получены параметрические аналитические решение этих задач для треугольных распределений случайных отклонений фактического момента поставки от момента назначенной поставки и отклонений фактического спроса от его предполагаемого уровня;

б) с использованием разработанных моделей оптимизации момента и объема поставок для автотранспортных и железнодорожных однономенклатурных поставок получены решения задач оптимального управления запасами, свидетельствующие о возможном снижении издержек на 5-7%.

Теоретическая и практическая значимость диссертационного исследования. Теоретическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в развитии подходов, оптимизационных моделей и методов управления

процессом организации поставок в системах управления запасами торговых и производственных предприятий, использование которых обеспечивает повышение финансовой устойчивости и конкурентоспособности торговых и производственных предприятий.

Практическая значимость исследования заключается в возможности использования его результатов в практике операционного управления запасами торговых и производственных предприятий, в целях повышения эффективности их деятельности, повышения конкурентоспособности и надежности поставок на основе совершенствования управления запасами. Разработанные математические оптимизационные модели могут быть использованы в качестве теоретической основы в системах поддержки принятия решений при управлении товарными запасами торговых и производственных предприятий.

Апробация и внедрение результатов исследования. Достоверность результатов и выводов диссертационного исследования подтверждается их соответствием методологическим положениям теории управления запасами, применением комплекса методов аналитического исследования, использованием методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. Научные результаты подтверждаются практическими расчетами.

Полученные в ходе диссертационного исследования результаты были апробированы в практике управления запасами в компании ООО «Сахар-Пром» и дали положительный эффект, подтвержденный актом о внедрении.

Основные научные положения и результаты диссертационной работы докладывались и получили одобрение на: III Международной научно-практической конференции «Инновационная экономика и менеджмент: Методы и технологии» (г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2018 г.), XVII-XVIII международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы экономических наук и современного менеджмента» (г. Новосибирск, 2019 г.), XIX Международной научной конференции «Научный диалог: Экономика и менеджмент» (г. Санкт-Петер-

бург, 2019 г.), Международной научно-практической конференции «XXXII Плехановские чтения» (г. Москва, ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», 2019 г.), XXVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019 г.).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 9 печатных работ общим объемом – 9,42 п.л. (авторских – 8,47 п.л.), в том числе 7 печатных работ в изданиях из Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук общим объемом – 7,63 п.л. (авторских – 6,68 п.л.).

Структура и объем диссертационной работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 224, включая 22 рисунка, 12 таблиц, список литературы из 126 наименований и 17 приложений на 31 странице.

Глава 1 Современное состояние исследования задач управления запасами

1.1 Процесса управления запасами и его основные характеристики

Эффективное управление запасами позволяет хозяйствующим субъектам сформировать эффективную политику, в следствие которой повышается конкурентоспособность компании в условиях рыночной борьбы. Для этого, чтобы принять верное решение, следует формализовать максимальное количество данных, правильно описывающих как саму компанию, но и внешнюю среду, которая ее окружает. Именно рациональная организация материально-технического снабжения составляет суть процесса логистики.

В Римской империи под логистикой понималось правильное распределение продовольствия. В период правления византийского императора Леона считалось, что вопросами логистики считаются снаряжение войск, снабжение их военным имуществом, полное своевременное удовлетворение их потребностей и соответственно организация любого военного похода.

В дальнейшем понятия логистики расширилось и стало включать в себя все операции, направленные на балансирование спроса и наличия товара, ориентированные на повышение конкурентоспособности предприятий.

В силу того, что потоки, управляемые в рамках логистической деятельности, существенно разнятся по своему характеру и имеют свою специфику, рассматривают следующие типы логистики:

- закупочную логистику, связанную с обеспечением производственного процесса;
- производственную логистику;
- сбытовую логистику;

- транспортную логистику;
- информационная логистика.

В зарубежной литературе отмечается, что существенное улучшение показателя, отражающего отношение прибыли, полученной от реализации товаров или услуг, к инвестированному капиталу наблюдают компании, использующие логистическую теорию, заключающуюся в оптимизации издержек [22, с. 55-56]. Очевидно, что сокращением издержек процесса управления запасами, логистика позволяет компании повысить свою конкурентоспособность.

Текущими затратами для арендатора, считаются аренда складских помещений, транспортных средств и прочего оборудования. Вместо приобретения собственных средств для работы на складе и перевозки, привлекаются третьи фирмы для их осуществления, тем самым основной капитал заменяется на текущие расходы. Это значительно сказывается на соотношении внешних финансовых обязательств и размере капитала компании.

Уровень конкурентоспособности компании определяет трансформирующая функция, т.е. соотношение входных и выходных параметров. Выходными параметрами, определяемыми в основном внешней средой, является выручка от реализации продукции и оказания услуг. Показателями, на которые воздействие компании ограничивается рыночными условиями, являются спрос на продукцию и равновесная цена. Повышая уровень и качество использования ресурсов и снижая затраты, компания может совершенствовать свои бизнес-процессы.

Процесс управления запасами представляет собой совокупность действий по формированию и пополнению запасов, что в свою очередь предполагает постоянство процессов мониторинга состояния запасов, прогнозирования потребностей и своевременного планирования заказов.

Методы исследования состояния запасов и их потребностей, а также правила принятия решений по созданию запасов, представленные в виде положений и внутререкорпоративных правил, формируют базу системы управления запасами.

Воздействуя на параметры спроса, заказов, поставок и уровня запасов можно управлять запасами. Основными параметрами спроса являются:

- интенсивность потребления товара за период;
- временные характеристики дискретного спроса (временные промежутки между моментами возникновения спроса);

Интенсивность потребления товарного запаса, определяемая спросом на данный товар и характеризующая его изменение в каждую единицу времени, является основным параметром. Интенсивность потребления может трактоваться по-разному, в частности, быть статической или динамической характеристикой.

Параметрами заказа и поставок являются:

- размер заказа;
- интервал или цикл поставки;
- интервал отставания поставки;
- размер партии поставки;
- точка заказа.

Интервал, или цикл поставки определяет период времени между двумя соседними поставками. Основным параметром поиска для большинства задач логистики, является интервал совместно с размером партии поставки, характеризующий интенсивность пополнения запаса.

Интервал отставания (запаздывания) поставки - это период времени между моментом поступления заказа на материальный ресурс и моментом его привоза на склад фирмы. Иногда называется периодом выполнения заказа.

Точка заказа (order point) это момент времени, в который необходимо сделать очередной заказ, равный минимальному допустимому уровню запаса, чтобы логистическая система работала без дефицита.

1.2 Стохастические модели управления запасами

Стохастические модели максимально точно воспроизводят физические процессы в реальной системе, в которой нередко возникает неопределенность, связанная с неточностью, либо неполнотой данных относительно условий реализации явлений или процессов. Из-за воздействия неопределенных факторов, возникает риск, который в основном оказывает большое влияние на результат. В следствии этого, при моделировании стохастической математической модели очень важно учесть данные обстоятельства, в отличие от детерминированных моделей, в которых данные условия можно проигнорировать.

Нужная модель выбирается по виду неопределенности. Следовательно, необходимо отличать не являются случайными, их невозможно описать вероятностным законом распределения, либо о них пока нет необходимого количества данных из-за их новизны.

Рассмотрим некоторые стохастические экономико-математические модели систем управления запасами. В публикации рассмотрена задача оптимизации системы управления запасами с учетом временной стоимости денег, в виде задачи принятия решений в условиях неопределенности, кроме того, были представлены алгоритмы [6]. Эта модель позволяет учитывать случайные потери прибыли, обусловливаемые жалобами на качество продукции поставщиков.

Благодаря развитию компьютерных технологий для решения задач оптимизации управления запасами стали широко использовать метод имитационного моделирования. Появились публикации, использующие этот метод для исследования и оптимизации управления запасами [24, 42].

В работе представлена стохастическая модель управления запасами и соответствующая ей эффективная стратегия для торговой фирмы, основанная на периодическом мониторинге уровня запаса товаров [27]. Фактором неопределенности в

модели является потребительский спрос. Разработанная эффективная стратегия получена по критерию максимизации прибыли с учетом ограничений на уровень клиентского обслуживания.

В работе исследованы взаимосвязи между торговыми предприятиями, позволяющие выявить, с помощью оценок характера спроса, объема ассортимента, контроля уровня остатков и их пополнения, системы организации реализации товара, территориальной распределенности поставщиков, условий их взаимодействия, наиболее важные задачи управления запасами [52].

Влияние стратегий управления запасами на экономические показатели предприятия широко представлены в научной литературе [1, 2, 7, 9, 10, 72, 73, 96, 98]. Наибольшую сложность для анализа представляют собой процессы, содержащие случайные или неопределенные параметры [7, 8, 9, 10, 11, 28, 97]. Учет неопределенностей является сложной задачей, требующей усилий высоко квалифицированных специалистов, что возможно является причиной того, что лишь часть крупных компаний в РФ использует математическое моделирование и, в частности, стохастическое моделирование для оптимизации решений, связанных с управлением запасами. В практике подавляющего большинства компаний встречается ориентация на подмену недетерминированных параметров их средними показателями. Примеры такого упрощенного подхода можно найти в книге, авторы которой отмечают, что «проблемы, связанные с неопределенностью времени поставки заказа и изменением значения спроса во времени, являются особенно сложными» [66, с. 23]. В своей работе они приводят упрощенную модель, исходя из удовлетворения среднего спроса в течение среднего времени поставки заказа, в которой отсутствие запаса может появиться во многих циклах запаса, функционирующих в течение года.

Как промежуточный альтернативный вариант между ориентацией на усредненные показатели и использование методов математического моделирования в ряде научных публикаций рассматриваются и предлагаются для практического использования псевдооптимальные алгоритмы, например, в работе [93].

В реальности практически всегда имеет место быть неопределенность, связанная с неточностью информации о спросе, временными задержками поставок, порчей продукции и другими. Учет в моделях факторов неопределенности позволяет найти наиболее эффективную стратегию управления запасами в условиях таких неопределенностей. Различные модели, учитывающие неопределенность, были ранее рассмотрены, в частности, в работах [43, 44, 45, 46, 47, 76, 81-84, 102] и во многих других научных публикациях, однако в постановке, приведенной в данной диссертации, задача ранее не рассматривалась. Например, в статье [71] неопределенность спроса моделировалась на основе вариационного спектра оценок экспертов, что, исходя из предположения о равнозначности представленных экспертных оценок, приводило автора к рассмотрению равномерного распределения в отличие от подхода, представленного в данной статье.

В работах А.С. Кокина и В.Н. Ясенева был предложен метод постоянного заказа, который также исходил из нахождения баланса между затратами на хранение запасов и убытками от ситуаций дефицита товарной продукции [38, с. 130-152]. Однако в отличие от моделей, рассмотренных в данной диссертационной работе, убытки, возникающие вследствие дефицита запасов, рассматривались как независимые от продолжительности периода дефицита, а зависящими лишь от объема дефицита и числа периодов дефицита.

В работах Г.Л. Бродецкого рассматривался широкий спектр моделей оптимизации размеров товарных партий с учетом неопределенности спроса, себестоимости товара и цены реализации. Им, в отличие от рассматриваемых в данной работе постановок рассматривался сценарный подход к учету неопределенности [11].

Методы дискретной оптимизации также использовались и в работе, в которой автор рассматривает полную группу случайных событий и конечный набор выбираемых альтернатив, далее строится матрица полезности и используется один из известных методов выбора эффективных решений для матричных неантагонистических игр [103].

В работе авторы рассматривают неопределенность спроса в виде стандартного винеровского процесса, с оцененными математическими ожиданиями и стандартными отклонениями объемов потребления отдельных продуктов в единицу времени [67]. При этом они исходят из предположения о нормальном законе распределения объемов ежедневных спросов.

Хотелось бы также отметить работу, в которой авторы используют в качестве целевого критерия не традиционный подход минимизации издержек хранения и дефицита, а целевую установку, которую можно сформулировать, как «поддержание минимально необходимого уровня товарных запасов для обеспечения бездефицитных продаж» [89].

Еще один отличный от традиционного критерия оптимизации рассматривают авторы в работе [85]. В качестве целевого критерия предлагается использовать математическое ожидание прибыли компании от реализации закупленного товара. Для решения задачи оптимального формирования многономенклатурного заказа необходимо максимизировать среднюю чистую прибыль компании. Издержки компании на формирование и поддержания запаса учитываются, но в целевой функции рассматриваются не они, а прибыль.

Нельзя не отметить работы, в которых рассматривается задача управления многономенклатурными запасами в условиях возможной не стационарности спроса [55, 56]. Предполагается, что нет достаточной информации для формирования законов распределения спросов на отдельные виды товаров. Однако рассматривается информация об изменении уровня спроса на отдельные товары. Автор предлагает рассмотреть тренды изменения спроса. После этапа экспертного прогнозирования, решается детерминированная много-продуктовая задача управления запасами.

В работе рассматривается схема решения, основывающаяся на случайном времени задержки и случайном спросе с использованием (s, S) -стратегии [3]. Суть данной стратегии в том, что величина запаса в конце каждого временного периода сравнивается с уровнем s и при $s > y$ производится заказ в размере $(S - y)$. В работе

рассматривается задача определения оптимальных уровней s , S при наличии случайной задержки и случайного спроса. Оптимальные значения s , S определяются путем минимизации отклонения текущих затрат от искомым оптимальных. Аналогичный метод был рассмотрен и в зарубежных работах [104, 126].

Таким образом, ознакомившись с приведенными исследованиями, можно сделать следующие обобщающие выводы, касающиеся полученных результатов большинства работ. Во-первых, в подавляющем большинстве рассматриваемых моделей нахождение оптимального решения предполагается не аналитическими, а методами вычислительного характера, зачастую весьма трудоемкими, что усложняет использование модели. Во-вторых, во многих исследованиях случайные характеристики моделей учитываются не путем их усреднения, а представляются заданными законами распределения. Чаще всего товарный спрос описывается нормальным законом распределения. Однако на практике адекватность использования нормального закона распределения может либо не подтверждаться, либо может отсутствовать необходимые статистические данные для обоснования данной гипотезы. В-третьих, в качестве оптимизационных функций, как правило, выступают минимизация средних общих затрат, или максимизация ожидаемой общей прибыли.

В данной диссертационной работе описаны стохастические модели управления запасами предприятий с учетом неопределенности спроса и времени поставки продукции, которые по мнению большинства авторов являются основными носителями неопределенности в системах управления запасами. В качестве законов распределения, описывающих данные неопределенности, рассматриваются треугольные распределения, которые могут быть получены на практике методами экспертного оценивания, например, в случае отсутствия достаточного объема статистических данных. Приводятся формализации задач отыскания оптимального момента назначения поставки или оптимального объема поставки и их решения аналитическими методами.

Глава 2 Математические модели оптимизации времени назначения поставки

В основном в научной литературе представлены детерминированные модели управления запасами. Основными переменными оптимизации в таких моделях являются объем и момент поставки. Как правило, в моделях управления запасами используется прогнозные средние ожидаемые величины спроса на некоторый интервал периодов, рассматриваемые как детерминированные. Очевидна некорректность такого подхода, поскольку при любом способе прогнозирования спроса неизбежен риск ошибки оценки ожидаемого объема спроса.

Аналогично спросу моментом поставки, в большинстве случаев также не является детерминированным. Особенно ярко это проявляется в практике торговых организаций, ориентированные на импортные поставки с длительными сроками доставки, например, оптовые продавцы мебели, реализующие мебель европейских, азиатских и даже южноамериканских марок. Процесс доставки товаров удаленных поставщиков, как правило, включает в себя множество операций, такие как: перегрузки на различные виды транспорта, таможенные процедуры, переукомплектование и так далее. Причинами задержки доставки могут быть и исправления погрузки, и устранении перегруза, исправлении технического или коммерческого состояния вагонов и контейнеров и т.д.

Как отмечал автор в работе «можно говорить о том, что ключевым методом управления запасами является прогнозирование состояния запасов в условиях неопределенности с последующим применением мер, корректирующих трансформации товаропотоков в логистической цепочке [26]. С учетом того, что такие меры (методы), обеспечивают изменение размеров партий и периодов поставок сырья».

Во второй главе диссертации автором были разработаны стохастические нелинейные оптимизационные модели управления запасами, а именно оптимизации времени назначения поставки. В качестве критерия оптимизации рассматривалось математическое ожидание суммарных издержек избыточного хранения, дефицита

товара, учитываемая, как упущенная выгода и риски выплаты неустоек в связи с нарушением сроков поставки. Оптимизационные задачи определения момента назначения поставки были аналитически решены для треугольного распределения случайных отклонений сроков доставки и спроса на товар. Задачи оптимизации момента поставки рассматривались ранее в работах О.А. Свиридовой и О.А. Косорукова, однако эти авторы ориентировались на закон нормального распределения, который не обеспечивает адекватности, например, в случае несимметричности случайных отклонений [41-48], [81-84].

В моделях, представленных в данной главе, объем заказа предполагается известной детерминированной величиной. Такая ситуация характерна для случая блочных, например, контейнерных поставок. Иногда компании ориентированы на фиксированные объемы заказов в силу использования мини-максных (s, S) стратегий управления запасами, которые предполагают пополнение складских запасов объемами фиксированными для каждой товарной позиции.

2.1 Модель оптимизации времени назначения поставки с учетом неопределенности спроса по критерию минимизации дополнительных издержек

Разработанная оптимизационная модель позволяет находить наилучший момент поставки по критерию на минимум математического ожидания интегральных дополнительных издержек, возникающих из-за отклонений в прогнозируемых сроках окончания товара на складе. Закон случайных отклонений в спросе предполагается известным, полученным на основании статистических данных о спросе на товар за предыдущий период, либо если таких данных не имеется на основании оценок экспертов. Этих данных достаточно для построения распределения вероятностей для случайной величины спроса. Основные результаты данного параграфа опубликованы автором в работе [57].

В данной модели источником риска является отличие реальных значений потребительского спроса от ожидаемого. Кроме того, предположим, что время поставки является строго детерминированным, т.е. выполнение заказа на завоз товара всегда происходит точно в срок.

Неопределенность в данной модели выражается через отклонения фактического времени окончания товара на складе от прогнозируемого согласно соотношению (2.1):

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad (2.1)$$

где α_0 - прогнозируемое время обнуления запаса товара, $\Delta\alpha$ - случайная величина, описывающая отклонение реального времени окончания товара на складе от прогнозного.

Предполагаем, что случайная величина $\Delta\alpha$ имеет треугольный закон распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – определяются из статистических данных, либо с помощью оценок экспертов, при соблюдении следующего условия: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел, b - верхний предел, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В частном случае $a = c$ или $c = b$ треугольное распределение строится по двум точкам. Тогда случайной величине времени фактического обнуления товара α соответствует треугольное распределение на отрезке $[\alpha_0 + a; \alpha_0 + b]$. На рисунке 2.1 изображен график плотности распределения случайной величины $\Delta\alpha$. Использование треугольного распределения вполне адекватно во многих реальных задачах и имеет существенные преимущества при недостаточном объеме статистических выборок, т.к. для его использования можно воспользоваться оценками экспертов.

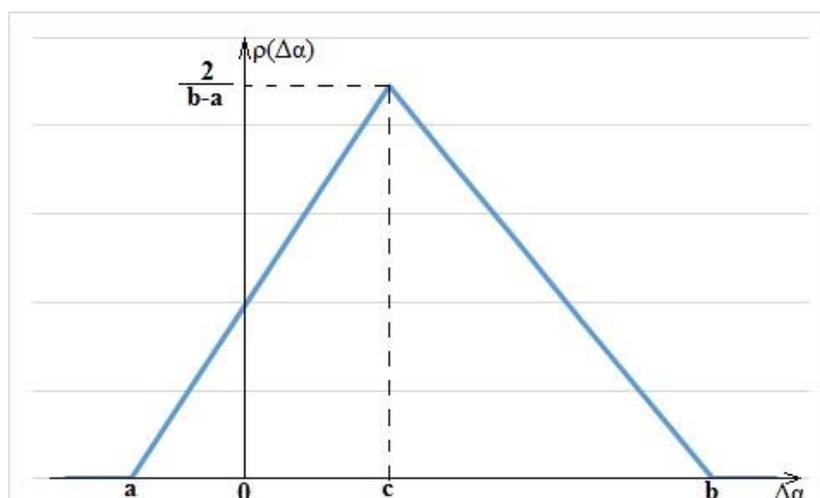


Рисунок 2.1 – Плотность распределения $\Delta\alpha$

Источник: составлено автором на основе известного закона треугольного распределения

С одной стороны, из-за раннего привоза товара могут возникнуть затраты на хранение излишка на складе. Допустим объем партии товара является фиксированным и равен Q . В этом случае дополнительные складские затраты для объема Q в течении времени от t^* и до момента фактического окончания товара α , в случае, когда завоз товара был произведен раньше момента времени t^* ($t^* < \alpha$), могут быть выражены соотношением (2.2):

$$I = pQ(\alpha - t^*), \quad (2.2)$$

где $p = const$ – цена удельных складских издержек единичного объема товара.

С другой стороны, из-за позднего привоза товара может возникнуть дефицит товара, который приведет к упущенной выгоде. Размер этой упущенной выгоды от момента фактического окончания товара на складе α и до момента поступления новой партии товара на склад t^* в объеме Q , в случае, когда завоз товара был произведен позже момента времени t^* ($t^* > \alpha$), может быть выражен соотношением (2.3):

$$D = \frac{Q}{\alpha_0} z(t^* - \alpha), \quad (2.3)$$

где $z = \text{const}$ – удельная прибыль от реализации товара, Q/α_0 – оценка среднесуточного количества реализации товара.

Суммарный объем дополнительных затрат, возникающих в следствие несвоевременности завоза можно выразить соотношением (2.4):

$$I + D = \begin{cases} pQ(\alpha - t^*), & t^* < \alpha; \\ \frac{Q}{\alpha_0} z(t^* - \alpha), & t^* > \alpha. \end{cases} \quad (2.4)$$

В качестве целевой функции интегральных дополнительных издержек прием их математическое ожидание, поскольку интегральные издержки являются непрерывной случайной величиной.

Пусть в рассматриваемой модели неопределенность спроса выражается случайной величиной $\Delta\alpha$, которая распределена согласно треугольному закону распределения с плотностью, выраженной соотношением (2.5):

$$\rho(\Delta\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{при } \Delta\alpha < a; \\ \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b - a)(c - a)}, & \text{при } a \leq \Delta\alpha < c; \\ \frac{2}{(b - a)}, & \text{при } \Delta\alpha = c; \\ \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b - a)(b - c)}, & \text{при } c < \Delta\alpha \leq b; \\ 0, & \text{при } b < \Delta\alpha. \end{cases} \quad (2.5)$$

В этом случае математическое ожидание интегральных дополнительных затрат, связанных с несвоевременностью завоза, выражается соотношением (2.6):

$$\begin{aligned}
F(t^*) = & \int_a^b \frac{Q}{\alpha_0} z(t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha + \\
& + \int_a^b pQ(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом математически формализованная задача минимизации интегральных дополнительных затрат, возникающая в процессе управления запасами, представленная соотношением (2.7), заключается в определении момента назначения поставки t^* , который обеспечит минимум математического ожидания общих дополнительных издержек.

$$F(t^*) \rightarrow \min_{t^*}. \tag{2.7}$$

Представим соотношение (2.6) двумя слагаемыми (2.8):

$$F(t^*) = F_D(t^*) + F_I(t^*). \tag{2.8}$$

Первая из функций соотношения (2.8) представляется как (2.9):

$$F_D(t^*) = \int_a^b \frac{Q}{\alpha_0} z(t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha. \tag{2.9}$$

Интеграл в формуле (2.9) существует при $t^* > \alpha$, это равносильно тому, что $t^* > \alpha_0 + \Delta\alpha$, а значит, интеграл (2.9) существует и при $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $t^* - \alpha_0 < a$, неравенство $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_D(t^*)$ в области $(-\infty; a)$ не существует, а значит, примет вид, согласно формуле (2.10):

$$F_{D_1}(t^*) = 0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq t^* - \alpha_0 < c$. Неравенство $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$ выполняется на отрезке $[a; t^* - \alpha_0]$ и не выполняется на отрезке $(t^* - \alpha_0, b)$, следовательно:

$$\begin{aligned}
F_{D_2}(t^*) &= \int_a^{t^* - \alpha_0} \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \cdot \\
&\cdot \int_a^{t^* - \alpha_0} (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha)(\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[\int_a^{t^* - \alpha_0} a(\alpha_0 - t^*) d\Delta\alpha + \right. \\
&+ \left. \int_a^{t^* - \alpha_0} (t^* - \alpha_0 + a)\Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^{t^* - \alpha_0} \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} [a(\alpha_0 - t^*) \cdot \\
&\cdot \Delta\alpha \Big|_a^{t^* - \alpha_0} + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + a)\Delta\alpha^2 \Big|_a^{t^* - \alpha_0} - \frac{1}{3}\Delta\alpha^3 \Big|_a^{t^* - \alpha_0}] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \cdot \\
&\cdot \left[(a\alpha_0 - at^*)(t^* - \alpha_0 - a) + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + a)(t^{*2} - 2\alpha_0 t^* + \alpha_0^2 - a^2) - \right. \\
&- \left. \frac{1}{3}t^{*3} + \alpha_0 t^{*2} - \alpha_0^2 t^* + \frac{1}{3}\alpha_0^3 + \frac{1}{3}a^3 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} [a\alpha_0 t^* - a\alpha_0^2 - \\
&- a^2\alpha_0 - at^{*2} + a\alpha_0 t^* + a^2 t^* + \frac{1}{2}t^{*3} - \alpha_0 t^{*2} + \frac{1}{2}\alpha_0^2 t^* - \frac{1}{2}a^2 t^* - \\
&- \frac{1}{2}\alpha_0 t^{*2} + \alpha_0^2 t^* - \frac{1}{2}\alpha_0^3 + \frac{1}{2}a^2\alpha_0 + \frac{1}{2}at^{*2} - a\alpha_0 t^* + \frac{1}{2}a\alpha_0^2 - \frac{1}{2}a^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}t^{*3} + \alpha_0 t^{*2} - \alpha_0^2 t^* + \frac{1}{3}\alpha_0^3 + \frac{1}{3}a^3 \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{1}{6}t^{*3} + \left(-\frac{1}{2}a - \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{1}{2}\alpha_0 \right) t^{*2} + \left(\frac{1}{2}a^2 + a\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0^2 \right) t^* - \frac{1}{2}a\alpha_0^2 - \frac{1}{2}a^2\alpha_0 - \frac{1}{6}\alpha_0^3 - \frac{1}{6}a^3 \right] = \\
& = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{2}(a + \alpha_0)t^{*2} + \frac{1}{2}(a + \alpha_0)^2 t^* - \frac{1}{6}(a + \alpha_0)^3 \right] = \\
& = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} (t^* - a + \alpha_0)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае из формулы (2.9) получаем формулу (2.11):

$$F_{D_2}(t^*) = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} (t^* - a + \alpha_0)^3. \quad (2.11)$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq t^* - \alpha_0 < b$. Неравенство $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$ выполняется на отрезках $[a; c]$ и $[c; t^* - \alpha_0]$ и не выполняется на отрезке $(t^* - \alpha_0; b)$, следовательно:

$$\begin{aligned}
F_{D_3}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^{t^* - \alpha_0} \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* - \\
& - \alpha_0 - \Delta\alpha) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) (\Delta\alpha - \right. \\
& \left. - a) d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^{t^* - \alpha_0} (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\int_a^c a(\alpha_0 - t^*) d\Delta\alpha + \int_a^c (t^* - \alpha_0 + a) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \\
& \cdot \left(\int_c^{t^*-\alpha_0} b(t^* - \alpha_0) d\Delta\alpha + \int_c^{t^*-\alpha_0} (-t^* + \alpha_0 - b) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_c^{t^*-\alpha_0} \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \Bigg] = \\
& = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(a(\alpha_0 - t^*) \Delta\alpha \Big|_a^c + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a) \Delta\alpha^2 \Big|_a^c - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_a^c \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(b-c)} \left(b(t^* - \alpha_0) \Delta\alpha \Big|_c^{t^*-\alpha_0} - \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a) \Delta\alpha^2 \Big|_c^{t^*-\alpha_0} + \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_c^{t^*-\alpha_0} \right) \right] = \\
& = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left((a\alpha_0 - at^*)(c-a) + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a) (c-a)(c+a) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + a^2) \right) + \frac{1}{(b-c)} \left((bt^* - b\alpha_0)(t^* - \alpha_0 - c) - \frac{1}{2} (t^* - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_0 + b)(t^{*2} - 2\alpha_0 t^* + \alpha_0^2 - c^2) + \frac{1}{3} t^{*3} - \alpha_0 t^{*2} + \alpha_0^2 t^* - \frac{1}{3} \alpha_0^3 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3} c^3 \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[a\alpha_0 - at^* + \frac{1}{2} ct^* + \frac{1}{2} at^* - \frac{1}{2} \alpha_0 c - \frac{1}{2} \alpha_0 a + \frac{1}{2} ac + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} ac - \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{(b-c)} (bt^{*2} - b\alpha_0 t^* - bct^* - b\alpha_0 t^* + \right. \\
& \left. + \alpha_0^2 b + bc\alpha_0 - \frac{1}{2} t^{*3} + \alpha_0 t^{*2} - \frac{1}{2} \alpha_0^2 t^* + \frac{1}{2} c^2 t^* + \frac{1}{2} \alpha_0 t^{*2} - \alpha_0^2 t^* + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\alpha_0^3 - \frac{1}{2}\alpha_0c^2 - \frac{1}{2}bt^{*2} + b\alpha_0t^* - \frac{1}{2}\alpha_0^2b + \frac{1}{2}bc^2 + \frac{1}{3}t^{*3} - \alpha_0t^{*2} + \\
& + \alpha_0^2t^* - \frac{1}{3}\alpha_0^3 - \frac{1}{3}c^3 \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2}(c-a)t^* + \frac{1}{6}(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c) + \right. \\
& + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6}t^{*3} + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\alpha_0 \right) t^{*2} + \left(-\frac{1}{2}\alpha_0^2 - b\alpha_0 - bc + \frac{1}{2}c^2 \right) t^* + \right. \\
& + \left. \frac{1}{6}\alpha_0^3 + \frac{1}{2}\alpha_0^2b + bc\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_0c^2 + \frac{1}{2}bc^2 - \frac{1}{3}c^3 \right) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c) \cdot \right. \\
& \cdot (3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6}t^{*3} + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_0 + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c \right) \cdot \right. \\
& \cdot t^{*2} + \left(-\frac{1}{2}\alpha_0^2 - \frac{1}{2}\alpha_0c + \frac{1}{2}\alpha_0c - b\alpha_0 - bc + \frac{1}{2}c^2 \right) t^* + \frac{1}{6}(\alpha_0 + c)^2(\alpha_0 + \\
& + 3b - 2c) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(-\frac{1}{6}t^{*3} + \frac{1}{3}(\alpha_0 + c)t^{*2} + \frac{1}{6}(\alpha_0 + 3b - 2c)t^{*2} - \frac{1}{3}(\alpha_0 + c)(\alpha_0 + 3b - \right. \\
& - 2c)t^* - \frac{1}{6}(\alpha_0 + c)^2t^* + \frac{1}{6}(\alpha_0 + c)^2(\alpha_0 + 3b - 2c) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a - \right. \\
& - c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \frac{1}{(b-c)} \left(\frac{1}{6}(\alpha_0 + c)^2 - \frac{1}{3}(\alpha_0 + c)t^* + \frac{1}{6}t^{*2} \right) \cdot \\
& \cdot (\alpha_0 + 3b - 2c - t^*) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6(b-c)} (\alpha_0 + c - t^*)^2 (\alpha_0 + 3b - 2c - t^*) \Big].$$

Таким образом, в третьем случае из формулы (2.9) получаем формулу (2.12):

$$F_{D_3}(t^*) = \frac{K_1}{3(b-a)} [(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \frac{1}{(b-c)} (\alpha_0 + c - t^*)^2 (\alpha_0 + 3b - 2c - t^*)] \quad (2.12)$$

В четвертом случае, при $a < b \leq t^* - \alpha_0$, неравенство $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{D_4}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* - \alpha_0 - \\ &- \Delta\alpha) + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha) \cdot \right. \\ &\cdot (\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (t^* - \alpha_0 - \Delta\alpha)(b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\ &\cdot \left(\int_a^c a(\alpha_0 - t^*) d\Delta\alpha + \int_a^c (t^* - \alpha_0 + a) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \\ &\cdot \left(\int_c^b b(t^* - \alpha_0) d\Delta\alpha + \int_c^b (-t^* + \alpha_0 - b) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{1}{(c-a)} \left(a(\alpha_0 - t^*) \Delta \alpha |_a^c + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a) \Delta \alpha^2 |_a^c - \frac{1}{3} \Delta \alpha^3 |_a^c \right) + \frac{1}{(b-c)} (b \cdot \right. \\
& \cdot (t^* - \alpha_0) \Delta \alpha |_c^b - \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a) \Delta \alpha^2 |_c^b + \frac{1}{3} \Delta \alpha^3 |_c^b \left. \right)] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
& \cdot \left((a\alpha_0 - at^*)(c-a) + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + a)(c-a)(c+a) - \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + \right. \\
& \left. + a^2) \right) + \frac{1}{(b-c)} \left((bt^* - b\alpha_0)(b-c) - \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + b)(b-c)(b+c) + \frac{1}{3} \cdot \right. \\
& \cdot (b-c)(b^2 + bc + c^2) \left. \right)] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[a\alpha_0 - at^* + \frac{1}{2} ct^* + \frac{1}{2} at^* - \frac{1}{2} \alpha_0 c - \right. \\
& - \frac{1}{2} \alpha_0 a + \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} ac - \frac{1}{3} a^2 + bt^* - b\alpha_0 - \frac{1}{2} bt^* - \frac{1}{2} ct^* + \\
& \left. + \frac{1}{2} \alpha_0 b + \frac{1}{2} \alpha_0 c - -\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} bc + \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} bc + \frac{1}{3} c^2 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} bt^* - \right. \\
& - \frac{1}{2} at^* + \frac{1}{2} a\alpha_0 - \frac{1}{2} b\alpha_0 + \frac{1}{6} ac - \frac{1}{6} bc + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{6} b^2 \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} t^* (b - \right. \\
& - a) + \frac{1}{2} \alpha_0 (a - b) + \frac{1}{6} c(a - b) + \frac{1}{6} (a - b)(a + b) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \frac{1}{6} (a - b) \cdot \\
& \cdot (3\alpha_0 + a + b + c - 3t^*) = \frac{K_1}{3} (3t^* - a - b - c - 3\alpha_0).
\end{aligned}$$

И наконец, в четвертом случае из формулы (2.9) получаем формулу (2.13):

$$F_{D_4}(t^*) = \frac{K_1}{3}(3t^* - a - b - c - 3\alpha_0). \quad (2.13)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое выражения (2.8), которое выражается следующей формулой (2.14):

$$F_I(t^*) = \int_a^b pQ(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)\rho(\Delta\alpha)d\Delta\alpha. \quad (2.14)$$

Интеграл в формуле (2.14) существует при $t^* < \alpha$, это равносильно тому, что $t^* < \alpha_0 + \Delta\alpha$, а значит, интеграл (2.14) существует и при $t^* - \alpha_0 < \Delta\alpha$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $t^* - \alpha_0 < a < b$, неравенство $t^* - \alpha_0 < \Delta\alpha$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{I_1}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*) \cdot \\ &\cdot \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)(\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)(b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_a^c a(t^* - \alpha_0) \cdot \right. \right. \\ &\cdot d\Delta\alpha + \int_a^c (\alpha_0 - t^* - a)\Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b(\alpha_0 - t^*) \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot d\Delta\alpha + \int_c^b (t^* - \alpha_0 + b) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(t^* - \right. \\
& - \alpha_0) \Delta\alpha|_a^c + \frac{1}{2} (\alpha_0 - t^* - a) \Delta\alpha^2|_a^c + \frac{1}{3} \Delta\alpha^3|_a^c) + \frac{1}{(b-c)} (b(\alpha_0 - t^*) \Delta\alpha|_c^b + \\
& + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + b) \Delta\alpha^2|_c^b - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3|_c^b) \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} ((at^* - a\alpha_0) \cdot \right. \\
& \cdot (c-a) + \frac{1}{2} (\alpha_0 - t^* - a)(c-a)(c+a) + \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + a^2)) + \\
& + \frac{1}{(b-c)} \left((b\alpha_0 - bt^*)(b-c) + \frac{1}{2} (t^* - \alpha_0 + b)(b-c)(b+c) - \frac{1}{3} (b-c) \cdot \right. \\
& \cdot (b^2 + bc + c^2)) \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[at^* - a\alpha_0 - \frac{1}{2} ct^* - \frac{1}{2} at^* + \frac{1}{2} \alpha_0 c + \frac{1}{2} \alpha_0 a - \right. \\
& - \frac{1}{2} ac - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} c^2 + \frac{1}{3} ac + \frac{1}{3} a^2 - bt^* + b\alpha_0 + \frac{1}{2} bt^* + \frac{1}{2} ct^* - \frac{1}{2} \alpha_0 b - \\
& - \frac{1}{2} \alpha_0 c + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} bc - \frac{1}{3} b^2 - \frac{1}{3} bc - \frac{1}{3} c^2 \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[-\frac{1}{2} bt^* + \frac{1}{2} at^* - \right. \\
& - \frac{1}{2} a\alpha_0 + \frac{1}{2} b\alpha_0 - \frac{1}{6} ac + \frac{1}{6} bc - \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{6} b^2 \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} t^*(a-b) + \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot \right. \\
& \cdot (b-a) + \frac{1}{6} c(b-a) + \frac{1}{6} (b-a)(b+a) \Bigg] = \frac{2K_2}{(b-a)} \frac{1}{6} (b-a)(3\alpha_0 + a +
\end{aligned}$$

$$+b + c - 3t^*) = \frac{K_2}{3}(3\alpha_0 + a + b + c - 3t^*).$$

Таким образом, в первом случае формула (2.14) примет вид (2.15):

$$F_{I_1}(t^*) = \frac{K_2}{3}(3\alpha_0 + a + b + c - 3t^*). \quad (2.15)$$

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq t^* - \alpha_0 < c < b$. Неравенство $t^* - \alpha_0 < \Delta\alpha$ выполняется на отрезках $[t^* - \alpha_0; c]$ и $[c; b]$ и не выполняется на отрезке $[a; t^* - \alpha_0]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{I_2}(t^*) &= \int_{t^* - \alpha_0}^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha_0 + \Delta\alpha - \\ &- t^*) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_{t^* - \alpha_0}^c (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)(\Delta\alpha - a) \cdot \right. \\ &\left. \cdot d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)(b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \left(\int_{t^* - \alpha_0}^c a(t^* - \alpha_0) \cdot d\Delta\alpha + \int_{t^* - \alpha_0}^c (\alpha_0 - t^* - a)\Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_{t^* - \alpha_0}^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b(\alpha_0 - t^*) \cdot d\Delta\alpha + \int_c^b (t^* - \alpha_0 + b)\Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \right] = \\ &= \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(t^* - \alpha_0)\Delta\alpha|_{t^* - \alpha_0}^c + \frac{1}{2}(\alpha_0 - t^* - a)\Delta\alpha^2|_{t^* - \alpha_0}^c + \frac{1}{3} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \Delta\alpha^3|_{t^*-\alpha_0}^c) + \frac{1}{(b-c)} (b(\alpha_0 - t^*)\Delta\alpha|_c^b + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + b)\Delta\alpha^2|_c^b - \frac{1}{3} \cdot \\
& \cdot \Delta\alpha^3|_c^b)] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} ((at^* - a\alpha_0)(c - t^* + \alpha_0) + \frac{1}{2}(\alpha_0 - t^* - a) \cdot \right. \\
& \cdot (c^2 - t^{*2} + 2t^*\alpha_0 - \alpha_0^2) + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}t^{*3} + t^{*2}\alpha_0 - t^*\alpha_0^2 + \frac{1}{3}\alpha_0^3) + \\
& + \frac{1}{(b-c)} \left((b\alpha_0 - bt^*)(b-c) + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + b)(b-c)(b+c) - \frac{1}{3}(b - \right. \\
& \left. - c)(b^2 + bc + c^2) \right)] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (act^* - at^{*2} + a\alpha_0t^* - ac\alpha_0 + \right. \\
& + a\alpha_0t^* - a\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_0c^2 - \frac{1}{2}\alpha_0t^{*2} + t^*\alpha_0^2 - \frac{1}{2}\alpha_0^3 - \frac{1}{2}c^2t^* + \frac{1}{2}t^{*3} - \\
& - t^{*2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0^2t^* - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{2}at^{*2} - at^*\alpha_0 + \frac{1}{2}a\alpha_0^2 + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}t^{*3} + \\
& + t^{*2}\alpha_0 - t^*\alpha_0^2 + \frac{1}{3}\alpha_0^3) - bt^* + b\alpha_0 + \frac{1}{2}bt^* + \frac{1}{2}ct^* - \frac{1}{2}\alpha_0b - \frac{1}{2}\alpha_0c + \\
& + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{3}c^2] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{2}(a + \alpha_0) \cdot \right. \right. \\
& \cdot t^{*2} + \left(\frac{1}{2}\alpha_0^2 + a\alpha_0 + ac - \frac{1}{2}c^2 \right) t^* - \frac{1}{6}\alpha_0^3 - \frac{1}{2}\alpha_0^2a - ac\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0c^2 - \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{3}c^3 \right) + \frac{1}{6}(b-c)(3\alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{1}{6} t^{*3} + \left(-\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} \alpha_0 - \frac{1}{6} \alpha_0 + \frac{1}{3} c - \frac{1}{3} c \right) t^{*2} + \left(\frac{1}{3} \alpha_0^2 + \frac{1}{6} \alpha_0^2 + a \alpha_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + a c - \frac{2}{3} c^2 + \frac{1}{6} c^2 - \frac{2}{3} c \alpha_0 + \frac{1}{3} c \alpha_0 + \frac{1}{3} c \alpha_0 \right) t^* - \frac{1}{6} (\alpha_0^3 + 3 \alpha_0^2 a + 6 a c \alpha_0 - \right. \\
& \left. - 3 \alpha_0 c^2 + 3 a c^2 + 2 c^3) \right) + \frac{1}{6} (b - c) (3 \alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \Big] = \frac{2K_2}{(b - a)} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{1}{(c - a)} \left(\frac{1}{6} t^{*3} - \frac{1}{3} (\alpha_0 + c) t^{*2} - \frac{1}{6} (\alpha_0 + 3a - 2c) t^{*2} + \frac{1}{3} (\alpha_0 + c) (\alpha_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3a - 2c) t^* + \frac{1}{6} (\alpha_0 + c)^2 t^* - \frac{1}{6} (\alpha_0 + c)^2 (\alpha_0 + 3a - 2c) \right) + \frac{1}{6} (b - c) \cdot \right. \\
& \left. \cdot (3 \alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \right] = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} \left(\frac{1}{6} (t^{*3} - 2(\alpha_0 + c) t^{*2} + (\alpha_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + c)^2 t^*) - \frac{1}{6} \left((\alpha_0 + 3a - 2c) t^{*2} - 2(\alpha_0 + c) (\alpha_0 + 3a - 2c) t^* + (\alpha_0 + c)^2 \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot (\alpha_0 + 3a - 2c) \right) \right) + \frac{1}{6} (b - c) (3 \alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \Big] = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(\frac{1}{6} t^* (t^* - \alpha_0 - c)^2 - \frac{1}{6} (\alpha_0 + 3a - 2c) (t^* - \alpha_0 - c)^2 \right) + \frac{1}{6} (b - c) (3 \alpha_0 + \right. \\
& \left. + b + 2c - 3t^*) \right] = \frac{K_2}{3(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} (t^* - \alpha_0 - c)^2 (t^* - \alpha_0 - 3a + 2c) + \right. \\
& \left. + (b - c) (3 \alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае формула (2.14) примет вид (2.16):

$$F_{I_2}(t^*) = \frac{K_2}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (t^* - \alpha_0 - c)^2 (t^* - \alpha_0 - 3a + 2c) + \right. \quad (2.16) \\ \left. + (b-c)(3\alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \right].$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq t^* - \alpha_0 < b$. Неравенство $t^* - \alpha_0 < \Delta\alpha$ выполняется на отрезке $[t^* - \alpha_0; b]$ и не выполняется на отрезке $[a; t^* - \alpha_0]$, следовательно:

$$F_{I_3}(t^*) = \int_{t^* - \alpha_0}^b \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} \cdot \\ \cdot \int_{t^* - \alpha_0}^b (\alpha_0 + \Delta\alpha - t^*)(b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} \left[\int_{t^* - \alpha_0}^b b(\alpha_0 - t^*) d\Delta\alpha + \right. \\ \left. + \int_{t^* - \alpha_0}^b (t^* - \alpha_0 + b)\Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_{t^* - \alpha_0}^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} [b(\alpha_0 - \\ - t^*) \Delta\alpha \Big|_{t^* - \alpha_0}^b + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + b)\Delta\alpha^2 \Big|_{t^* - \alpha_0}^b - \frac{1}{3}\Delta\alpha^3 \Big|_{t^* - \alpha_0}^b] = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} \cdot \\ \cdot \left[(b\alpha_0 - bt^*)(b - t^* + \alpha_0) + \frac{1}{2}(t^* - \alpha_0 + b)(b^2 - t^{*2} + 2t^*\alpha_0 - \alpha_0^2) - \frac{1}{3} \cdot \right. \\ \left. \cdot (b^3 - t^{*3} + 3t^{*2}\alpha_0 - 3t^*\alpha_0^2 + \alpha_0^3) \right] = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} [b^2\alpha_0 - b\alpha_0t^* + \\ + b\alpha_0^2 - b^2t^* + bt^{*2} - b\alpha_0t^* + \frac{1}{2}b^2t^* - \frac{1}{2}t^{*3} + \alpha_0t^{*2} - \frac{1}{2}\alpha_0^2t^* - \frac{1}{2}\alpha_0b^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\alpha_0 t^{*2} - \alpha_0^2 t^* + \frac{1}{2}\alpha_0^3 + \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{2}bt^{*2} + b\alpha_0 t^* - \frac{1}{2}b\alpha_0^2 - \frac{1}{3}b^3 + \\
& + \frac{1}{3}t^{*3} - \alpha_0 t^{*2} + \alpha_0^2 t^* - \frac{1}{3}\alpha_0^3 \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6}t^{*3} + \frac{1}{2}(\alpha_0 + b) \cdot \right. \\
& \left. \cdot t^{*2} + \left(-\frac{1}{2}b^2 - b\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_0^2 \right) t^* + \frac{1}{6}(\alpha_0^3 + 3b\alpha_0^2 + 3b^2\alpha_0 + b^3) \right] = \\
& = \frac{2K_2}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6}t^{*3} + \frac{1}{2}(\alpha_0 + b)t^{*2} - \frac{1}{2}(\alpha_0 + b)^2 t^* + \frac{1}{6}(\alpha_0 + b)^3 \right] = \\
& = \frac{-K_2}{3(b-a)(b-c)} (t^* - \alpha_0 - b)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, в третьем случае формула (2.14) примет вид (2.17):

$$F_{I_3}(t^*) = \frac{-K_2}{3(b-a)(b-c)} (t^* - \alpha_0 - b)^3. \quad (2.17)$$

В четвертом случае, при $b \leq t^* - \alpha_0$, неравенство $t^* - \alpha_0 < \Delta\alpha$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_I(t^*)$ в области $(b; +\infty)$ не существует, а значит, примет вид (2.18):

$$F_{I_4}(t^*) = 0. \quad (2.18)$$

Найдем математическое ожидание суммарных издержек в каждой из рассмотренных областей. Для этого сложим полученные формулы (2.10) и (2.15), (2.11) и (2.16), (2.12) и (2.17), (2.13) и (2.18).

Сложив формулы (2.10) и (2.15), получим выражение (2.19):

$$F_1(t^*) = F_{D_1}(t^*) + F_{I_1}(t^*) = \frac{K_2}{3}(3\alpha_0 + a + b + c - 3t^*). \quad (2.19)$$

Сложив формулы (2.11) и (2.16), получим выражение (2.20):

$$\begin{aligned} F_2(t^*) = F_{D_2}(t^*) + F_{I_2}(t^*) = & \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)}(t^* - a + \alpha_0)^3 + \\ & + \frac{K_2}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)}(t^* - \alpha_0 - c)^2(t^* - \alpha_0 - 3a + 2c) + \right. \\ & \left. + (b-c)(3\alpha_0 + b + 2c - 3t^*) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Сложив формулы (2.12) и (2.17), получим выражение (2.21):

$$\begin{aligned} F_3(t^*) = F_{D_3}(t^*) + F_{I_3}(t^*) = & \frac{K_1}{3(b-a)} [(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3t^*) + \\ & + \frac{1}{(b-c)}(\alpha_0 + c - t^*)^2(\alpha_0 + 3b - 2c - t^*)] - \\ & - \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)}(t^* - \alpha_0 - b)^3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Сложив формулы (2.13) и (2.18), получим выражение (2.22):

$$F_4(t^*) = F_{D_4}(t^*) + F_{I_4}(t^*) = \frac{K_1}{3}(3t^* - a - b - c - 3\alpha_0). \quad (2.22)$$

Найдем минимум ожидаемых издержек в каждой из областей.

$F_1(t^*) = \frac{K_2}{3}(3\alpha_0 + a + b + c - 3t^*)$ - линейная убывающая функция, значит, минимальное значение достигается на правом конце отрезка $(-\infty; a + \alpha_0]$, следовательно, в точке $t^* = a + \alpha_0$. Минимальное значение функции $F_1(t^*)$ представлено формулой (2.23):

$$\min_{t^*=a+\alpha_0} F_1(t^*) = \frac{K_2}{3} (3\alpha_0 + a + b + c - 3a - 3\alpha_0) = \frac{K_2}{3} (b + c - 2a). \quad (2.23)$$

Чтобы найти минимум $F_2(t^*)$, возьмем производную функции (2.20) и приравняем ее к нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} &= \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} 3(t^* - a + \alpha_0)^2 + \frac{K_2}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} 2(t^* - \alpha_0 - \right. \\ &\quad \left. - c)(t^* - \alpha_0 - 3a + 2c) + \frac{1}{(c-a)} (t^* - \alpha_0 - c)^2 + (b-c)(-3) \right] = \\ &= \frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2at^* - 2\alpha_0 t^* + 2a\alpha_0 + a^2 + \alpha_0^2) + \frac{2}{3} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2\alpha_0 t^* + ct^* - 3at^* + \alpha_0^2 - c\alpha_0 - 2c^2 + 3ac + \\ &\quad + 3a\alpha_0) + \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} \frac{1}{3} (t^{*2} - 2ct^* - 2\alpha_0 t^* + 2c\alpha_0 + c^2 + \alpha_0^2) - \\ &\quad - \frac{K_2}{(b-a)} (b-c) = \frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2at^* - 2\alpha_0 t^* + 2a\alpha_0 + a^2 + \\ &\quad + \alpha_0^2) + \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2\alpha_0 t^* - c^2 + \alpha_0^2 - 2at^* + 2ac + 2a\alpha_0 + \\ &\quad + a^2 - a^2) - \frac{K_2}{(b-a)} (b-c) = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2at^* - 2\alpha_0 t^* + a^2 + \\ &\quad + 2a\alpha_0 + \alpha_0^2) - \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (a^2 - 2ac + c^2) - \frac{K_2}{(b-a)} (b-c) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^{*2} - 2t^*(a + \alpha_0) + (a + \alpha_0)^2) + \\
&+ \frac{-K_2c + K_2a - K_2b + K_2c}{(b - a)} = \frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^* - a - \alpha_0)^2 - \frac{K_2(b - a)}{(b - a)} = \\
&= \frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^* - a - \alpha_0)^2 - K_2.
\end{aligned}$$

Получаем формулу (2.24):

$$\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} = \frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^* - a - \alpha_0)^2 - K_2. \quad (2.24)$$

Приравняем выражение (2.24) к нулю:

$$\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^* - a - \alpha_0)^2 - K_2 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (t^* - a - \alpha_0)^2 = K_2;$$

$$(t^* - a - \alpha_0)^2 = \frac{K_2(b - a)(c - a)}{(K_1 + K_2)};$$

$$t^* - a - \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{K_2(b - a)(c - a)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$t_{1,2}^* = a + \alpha_0 \pm \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}.$$

Графиком функции $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)}(t^* - a - \alpha_0)^2 - K_2 = 0$ является парабола, ветви направлены вверх, т.к. $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)} > 0$.

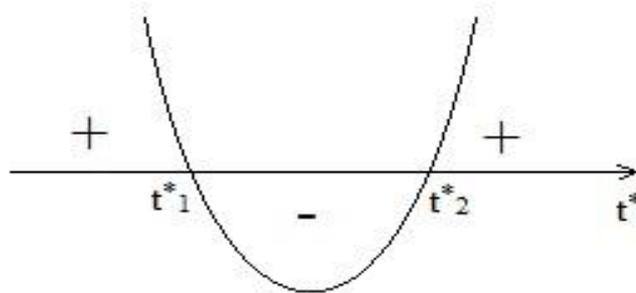


Рисунок 2.2 - Схематичное изображение графика функции $F_2'(t^*)$

Источник: составлено автором

Из рисунка 2.2 видно, что производная $F_2'(t^*)$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_2^* , имеющей следующий вид (2.25):

$$t_2^* = a + \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}. \quad (2.25)$$

Значит, t_2^* является минимумом функции $F_2(t^*)$.

Найдем значение функции $F_2(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (2.25) в (2.20):

$$\begin{aligned}
F_2(t_2^*) &= \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(a + \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - a + \alpha_0 \right)^3 + \\
&+ \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} \left(a + \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - \alpha_0 - c \right)^2 (a + \alpha_0 - \alpha_0 - \\
&- 3a + 2c + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2(b-c)}{3(b-a)} (3\alpha_0 + b + 2c - 3a - 3\alpha_0 - \\
&- 3\sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} ((a-c)^2 + 2(a-c) \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}) (-2a + 2c + \\
&+ \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} ((c-a)^2 - 2(c-a)) \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} \cdot \\
& \cdot \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc - \\
& - 3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) = \\
& = \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} ((c-a) - 2 \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2^2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \left((2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - \right. \\
& \left. - 2c^2 - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} \left(2(c-a)^2 - 3(c-a) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \right) + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_2^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \\
& \quad + \frac{K_2}{3(b-a)} \left(b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 + 3(c-b) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) = \\
& = \frac{(K_1K_2 + K_2^2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_2}{3(b-a)} (2c^2 - 4ac + \\
& \quad + 2a^2 - 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3a \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + b^2 + bc - 3ab + \\
& \quad + 3ac - 2c^2 + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) - \frac{2K_2}{3(b-a)} \cdot \\
& \quad \cdot \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} = \frac{K_2(K_1+K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1+K_2)}} - \\
& \quad - \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_2(b-a)c}{3(b-a)} + \frac{K_2(b-a)(-3)}{3(b-a)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_2}{3(b-a)}(2a^2 - 3ab + b^2) = \frac{K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2c}{3} - K_2 \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)}(b-a)(b-2a) = \frac{K_2c}{3} + \frac{K_2b}{3} - \frac{2K_2a}{3} - \\
& - \frac{2K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_2(t^*)$, представлено формулой (2.26):

$$\begin{aligned}
& \min_{t^*=a+\alpha_0+\sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}} F_2(t^*) = \\
& = \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Чтобы найти минимум $F_3(t^*)$, возьмем производную функции (2.21) и приравняем ее к нулю.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} &= \frac{K_1}{3(b-a)} \left[(a-c)(-3) + \frac{1}{(b-c)}(-2)(\alpha_0+c-t^*)(\alpha_0+3b- \right. \\
& \left. -2c-t^*) + \frac{1}{(b-c)}(\alpha_0+c-t^*)^2(-1) \right] - \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} 3(t^*-\alpha_0- \\
& -b)^2 = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{2K_1}{3(b-a)(b-c)} (\alpha_0^2 + 3\alpha_0b - 2\alpha_0c - \alpha_0t^* + \alpha_0c +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3bc - 2c^2 - ct^* - \alpha_0 t^* - 3bt^* + 2ct^* + t^{*2}) - \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} (t^{*2} - \\
& -ct^* - \alpha_0 t^* - ct^* + c^2 + \alpha_0 c - \alpha_0 t^* + \alpha_0 c + \alpha_0^2) - \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} (t^{*2} - \\
& -2bt^* - 2\alpha_0 t^* + b^2 + 2b\alpha_0 + \alpha_0^2) = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} (t^{*2} + \\
& +2b\alpha_0 - 2\alpha_0 t^* + 2bc - c^2 - 2bt^* + \alpha_0^2 + b^2 - b^2) - \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} \cdot \\
& \cdot (t^{*2} - 2bt^* - 2\alpha_0 t^* + b^2 + 2b\alpha_0 + \alpha_0^2) = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} \cdot \\
& \cdot (t^{*2} - 2t^*(b + \alpha_0) + (b + \alpha_0)^2) + \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} (b-c)^2 = \\
& = \frac{K_1 c - K_1 a + K_1 b - K_1 c}{(b-a)} - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2 = \\
& = K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2.
\end{aligned}$$

Получаем формулу (2.27):

$$\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} = K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2. \quad (2.27)$$

Приравняем выражение (2.27) к нулю:

$$\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} = 0;$$

$$K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2 = K_1;$$

$$(t^* - b - \alpha_0)^2 = \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)};$$

$$t^* - b - \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$t_{1,2}^* = b + \alpha_0 \pm \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}.$$

Графиком функции $K_1 - \frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2 = 0$ является парабола, ветви направлены вниз, т.к. $-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} < 0$.

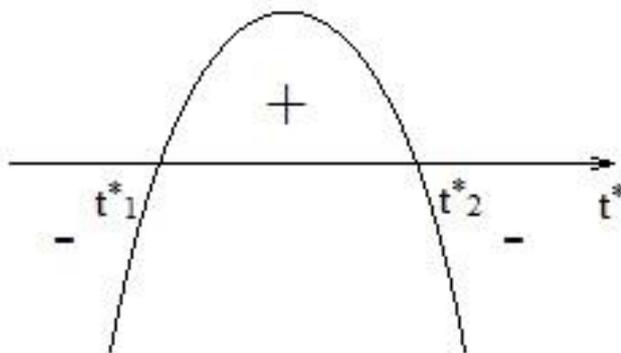


Рисунок 2.3 - Схематичное изображение графика функции $F_3'(t^*)$
 Источник: составлено автором

Из рисунка 2.3 видно, что производная $F_3'(t^*)$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_1^* , имеющей следующий вид (2.28):

$$t_1^* = b + \alpha_0 - \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}. \quad (2.28)$$

Значит, t_1^* является минимумом функции $F_3(t^*)$.

Найдем значение функции $F_3(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (2.28) в (2.21):

$$\begin{aligned} F_3(t_1^*) &= \frac{K_1}{3(b-a)} [(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3b - 3\alpha_0 + 3 \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}) + \frac{1}{(b-c)} \left(\alpha_0 + c - b - \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \left(\alpha_0 + 3b - 2c - b - \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} \right)] - \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} \cdot \\ &\cdot \left(b + \alpha_0 - \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} - \alpha_0 - b \right)^3 = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 - ac + 2ac - \\ &- 2c^2 - 3ab + 3bc + 3a \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} - 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} \left((c-b)^2 + 2(c-b) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)} \right) \left(2b - 2c + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) + \\
& + \frac{K_1 K_2 (b-a)(b-c)}{3(b-a)(b-c)(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + ac - \\
& - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3a \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \\
& + \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} \left((b-c)^2 - 2(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) (2(b-c) + \\
& \quad + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1 K_1 (b-a)(b-c)}{3(K_1+K_2)(b-a)(b-c)} (2(b-c) + \\
& + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + \\
& + ac - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3(a-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (2(b-c)^2 - 3(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 2 \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}) + \\
& + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + ac - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3(a-c) \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + 2b^2 - 4bc + 2c^2 - 3(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - \\
& - \frac{2K_1K_1(b-a)(b-c)}{3(b-a)(K_1+K_2)} + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{(K_1^2 + K_1K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \\
& = \frac{K_1(a-b)c}{3(b-a)} + \frac{3K_1(a-b)}{3(b-a)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)} ((a^2 - 3ab + \\
& + 2b^2) - \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1(K_1+K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \\
& = -\frac{K_1c}{3} - K_1 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1(b-a)(2b-a)}{3(b-a)} + \frac{K_1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3} \cdot \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right).$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_3(t^*)$, представлено формулой (2.29):

$$\begin{aligned} \min_{t^*=b+\alpha_0-\sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}} F_3(t^*) &= \\ &= \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

$F_4(t^*) = \frac{K_1}{3}(3t^* - a - b - c - 3\alpha_0)$ - линейная возрастающая функция, значит, минимальное значение достигается на левом конце отрезка $[b + \alpha_0; +\infty)$, следовательно, в точке $t^* = b + \alpha_0$. Минимальное значение функции $F_4(t^*)$, представлено формулой (2.30):

$$\min_{t^*=b+\alpha_0} F_4(t^*) = \frac{K_1}{3}(3b + 3\alpha_0 - a - b - c - 3\alpha_0) = \frac{K_1}{3}(2b - a - c). \quad (2.30)$$

Чтобы найти минимальное значение функции $F(t^*)$, сравним формулы (2.23), (2.26), (2.29) и (2.30) и найдем среди них минимальное.

Сравним (2.23) с (2.26), для этого вычтем из (2.23) (2.26):

$$\frac{K_2}{3}(b+c-2a) - \frac{K_2}{3} \left(b+c-2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) =$$

$$= \frac{2K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} > 0.$$

Полученное выражение больше нуля, следовательно, (2.23) больше (2.26).

Теперь сравним (2.29) с (2.30), для этого вычтем из (2.29) (2.30):

$$\begin{aligned} & \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) - \frac{K_1}{3} (2b - a - c) = \\ & = -\frac{2K_1}{3} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} < 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение меньше нуля, следовательно, (2.29) меньше (2.30).

И наконец, сравним (2.26) и (2.29), для этого вычтем из (2.26) (2.29):

$$\begin{aligned} & \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) - \frac{K_1}{3} (2b - a - c - \\ & - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{1}{3} \left((K_2 - 2K_1)b + (K_1 - 2K_2)a + (K_1 + K_2)c - \right. \\ & \left. - 2 \sqrt{\frac{(b-a)}{(K_1+K_2)}} \left(K_2 \sqrt{K_2(c-a)} - K_1 \sqrt{K_1(b-c)} \right) \right). \end{aligned}$$

В полученном выражение знак зависит от параметров: $a, b, c, K_1 = \frac{Qz}{\alpha_0}, K_2 =$

$Qp.$

Таким образом, в итоге, получим формулу (2.31):

$$\begin{aligned}
 &\text{Если } p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right) < \frac{z}{\alpha_0} (2b - a - c - \\
 &\quad - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = a + \alpha_0 + \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}}; \\
 &\text{Если } p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right) > \frac{z}{\alpha_0} (2b - a - c - \\
 &\quad - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = b + \alpha_0 - \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Разработанная стохастическая модель, учитывающая неопределенность спроса и соответствующая ей оптимизационная задача по критерию минимизации математического ожидания интегральных дополнительных издержек в качестве результата определяют время назначения доставки новой партии товара в известном объеме. При предположении о треугольном распределении случайных отклонений фактического спроса от прогнозируемого было получено аналитическое решение задачи, выраженное соотношением (2.31).

2.2 Модель оптимизации времени назначения поставки с учетом неопределенности времени поставки по критерию минимизации дополнительных издержек

Рассмотрим стохастическую модель с неопределенностью реального времени прихода товара на склад. Такая ситуация характерна, например, для поставок

из-за рубежа, связанных с процессами растаможивания товара или с комбинированными поставками несколькими видами транспорта.

Предполагаем, что спрос детерминирован, т.е. момент обнуления запаса товара в объеме Q на складе α точно известен. Например, если поставки происходят строго по заранее согласованным графикам.

Пусть неопределенность времени доставки товара на склад x , выражена соотношением (2.32):

$$x = t^* + \Delta t, \quad (2.32)$$

где t^* - время заказа поставки товара; Δt - случайная величина, описывающая отклонение фактического времени доставки и договорного.

Будем считать, что случайная величина Δt распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – определяются из статистических данных, либо с помощью оценок экспертов, при соблюдении следующего условия: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел, b - верхний предел, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В частном случае $a = c$ или $c = b$ треугольное распределение строится по двум точкам. Тогда время реального прихода товара x имеет также треугольное распределение случайной величины на отрезке $[t^* + a, t^* + b]$. На рисунке 2.4 изображена функция плотности распределения величины Δt .

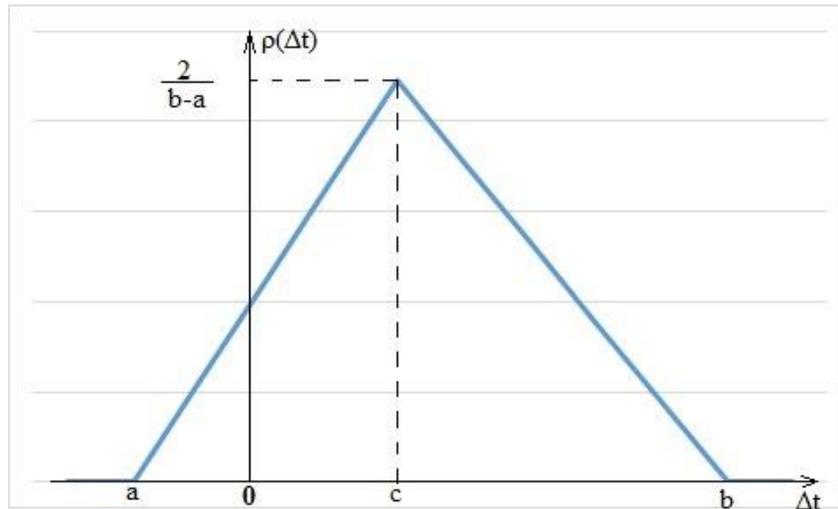


Рисунок 2.4 - Плотность распределения Δt

Источник: составлено автором на основе известного закона треугольного распределения

В качестве целевой функции рассмотрим, как и в модели параграфа 2.1, интегральные дополнительные издержки, возникающие в результате расхождений момента завоза и момента обнуления товара на складе.

Дополнительные складские затраты пребывания объема Q в течении промежутка времени от доставки x и до фактического окончания товара α , в случае, когда прибытие товара на склад было реализовано до времени x ($x < \alpha$) выражаются соотношением (2.33):

$$I = pQ(\alpha - x), \quad (2.33)$$

где $p = const$ - цена удельных складских издержек единичного объема товара.

Издержки дефицита товара от времени фактического обнуления товара α и до момента завоза товара x в объеме Q , в случае, когда поставка товара произошла позже срока x ($x > \alpha$), составят, согласно формуле (2.34):

$$D = \frac{Q}{\alpha} z(x - \alpha), \quad (2.34)$$

где $z = \text{const}$ -удельная прибыль от реализации товара; Q/α - оценка среднесуточного количества реализации товара.

Суммарный объем дополнительных затрат, возникающих в следствие несвоевременности завоза можно выразить соотношением (2.35):

$$I + D = \begin{cases} pQ(\alpha - x), x < \alpha; \\ \frac{Q}{\alpha}z(x - \alpha), x > \alpha. \end{cases} \quad (2.35)$$

В качестве целевой функции интегральных дополнительных издержек примем их математическое ожидание, поскольку интегральные издержки являются случайными.

Пусть в рассматриваемой модели неопределенность доставки выражается случайной величиной Δt , которая распределена согласно треугольному закону распределения с плотностью, выраженной соотношением (2.36):

$$\rho(\Delta t) = \begin{cases} 0, \text{ при } \Delta t < a; \\ \frac{2(\Delta t - a)}{(b - a)(c - a)}, \text{ при } a \leq \Delta t < c; \\ \frac{2}{(b - a)}, \text{ при } \Delta t = c; \\ \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(b - c)}, \text{ при } c < \Delta t \leq b; \\ 0, \text{ при } b < \Delta t. \end{cases} \quad (2.36)$$

В этом случае математическое ожидание интегральных дополнительных затрат, связанных с несвоевременностью завоза, выражается соотношением (2.37):

$$F(t^*) = \int_a^b \frac{Q}{\alpha} z(t^* + \Delta t - \alpha) \rho(\Delta t) d\Delta t + \int_a^b pQ(\alpha - t^* - \Delta t) \rho(\Delta t) d\Delta t. \quad (2.37)$$

Таким образом математически формализованная задача минимизации интегральных дополнительных затрат, возникающая в процессе управления запасами, представленная соотношением (2.38), заключается в определении момента назначения поставки t^* , который соответствует минимальному значению математического ожидания суммарных дополнительных издержек.

$$F(t^*) \rightarrow \min_{t^*}. \quad (2.38)$$

Представим соотношение (2.37) двумя слагаемыми (2.39):

$$F(t^*) = F_D(t^*) + F_I(t^*). \quad (2.39)$$

Первая из функций соотношения (2.39) представляется как (2.40):

$$F_D(t^*) = \int_a^b \frac{Q}{\alpha} z(t^* + \Delta t - \alpha) \rho(\Delta t) d\Delta t. \quad (2.40)$$

Интеграл в формуле (2.40) существует при $x > \alpha$, это равносильно тому, что $t^* + \Delta t > \alpha$, а значит, интеграл (2.40) существует и при $\Delta t > \alpha - t^*$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $\alpha - t^* < a < b$, неравенство $\Delta t > \alpha - t^*$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$F_{D_1}(t^*) = \int_a^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (t^* + \Delta t - \alpha)(\Delta t - a) d\Delta t + \right.$$

$$+ \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t \Big].$$

Данный интеграл решаем аналогично полученной ранее формуле (2.15). Таким образом, в первом случае формула (2.40) примет вид (2.41) (Приложение А):

$$F_{D_1}(t^*) = \frac{K_1}{3}(3t^* + a + b + c - 3\alpha). \quad (2.41)$$

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq \alpha - t^* < c < b$. Неравенство $\Delta t > \alpha - t^*$ выполняется на отрезках $[\alpha - t^*; c]$ и $[c; b]$ и не выполняется на отрезке $[a; \alpha - t^*]$, следовательно:

$$F_{D_2}(t^*) = \int_{\alpha-t^*}^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \cdot$$

$$\cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_{\alpha-t^*}^c (t^* + \Delta t - \alpha)(\Delta t - a) d\Delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t \right].$$

Данный интеграл решаем аналогично полученной ранее формуле (2.16). Таким образом, во втором случае формула (2.40) примет вид (2.42) (Приложение Б):

$$F_{D_2}(t^*) = \frac{K_1}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (\alpha - t^* - c)^2 (\alpha - t^* - 3a + 2c) + \right. \quad (2.42)$$

$$\left. + (b-c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \right].$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq \alpha - t^* < b$. Неравенство $\Delta t > \alpha - t^*$ выполняется на отрезке $[\alpha - t^*; b]$ и не выполняется на отрезке $[a; \alpha - t^*]$, следовательно:

$$F_{D_3}(t^*) = \int_{\alpha-t^*}^b \frac{Q}{\underbrace{\alpha}_{K_1}} Z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(b - c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} \cdot$$

$$\int_{\alpha-t^*}^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t.$$

Данный интеграл решаем аналогично полученной ранее формуле (2.17). Таким образом, в третьем случае формула (2.40) примет вид (2.43) (Приложение В):

$$F_{D_3}(t^*) = \frac{-K_1}{3(b - a)(b - c)} (\alpha - t^* - b)^3. \quad (2.43)$$

В четвертом случае, при $b < \alpha - t^*$, неравенство $\Delta t > \alpha - t^*$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_D(t^*)$ в области $(b; +\infty)$ не существует, а значит, примет вид (2.44):

$$F_{D_4}(t^*) = 0. \quad (2.44)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое выражения (2.39), которое выражается следующей формулой (2.45):

$$F_I(t^*) = \int_a^b pQ(\alpha - t^* - \Delta t)\rho(\Delta t)d\Delta t. \quad (2.45)$$

Интеграл в формуле (2.45) существует при $x < \alpha$, это равносильно тому, что $t^* + \Delta t < \alpha$, а значит, интеграл (2.45) существует и при $\alpha - t^* > \Delta t$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $\alpha - t^* < a$, неравенство $\alpha - t^* > \Delta t$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_I(t^*)$ в области $(-\infty; a)$ не существует, а значит, примет вид, согласно формуле (2.46):

$$F_{I_1}(t^*) = 0. \quad (2.46)$$

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq \alpha - t^* < c < b$. Неравенство $\alpha - t^* > \Delta t$ выполняется на отрезке $[a; \alpha - t^*]$ и не выполняется на отрезке $[\alpha - t^*; b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{I_2}(t^*) &= \int_a^{\alpha-t^*} \underbrace{pQ}_{K_2} (\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t = \\ &= \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} \int_a^{\alpha-t^*} (\alpha - t^* - \Delta t) (\Delta t - a) d\Delta t. \end{aligned}$$

Данный интеграл находим аналогично полученной ранее формуле (2.11). Таким образом, во втором случае из формулы (2.45) получаем формулу (2.47) (Приложение Г):

$$F_{I_2}(t^*) = \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} (\alpha - a - t^*)^3. \quad (2.47)$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq \alpha - t^* < b$. Неравенство $\alpha - t^* > \Delta t$ выполняется на отрезках $[a; c]$ и $[c; \alpha - t^*]$ и не выполняется на отрезке $[\alpha - t^*; b]$, следовательно:

$$F_{I_3}(t^*) = \int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^{\alpha-t^*} \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (\alpha - t^* - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t + \frac{1}{(b-c)} \int_c^{\alpha-t^*} (\alpha - t^* - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t \right].$$

Данный интеграл находим аналогично полученной ранее формуле (2.12). Таким образом, в третьем случае из формулы (2.45) получаем формулу (2.48) (Приложение Д):

$$F_{I_3}(t^*) = \frac{K_2}{3(b-a)} [(a-c)(3t^* + a + 2c - 3\alpha) + \frac{1}{(b-c)} (t^* + c - \alpha)^2 (t^* + 3b - 2c - \alpha)]. \quad (2.48)$$

В четвертом случае, при $a < b \leq \alpha - t^*$, неравенство $\alpha - t^* > \Delta t$ выполняется на всем отрезке $[a; b]$, следовательно:

$$F_{I_4}(t^*) = \int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(b - c)} d\Delta t = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} \int_a^c (\alpha - t^* - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(b - c)} \int_c^b (\alpha - t^* - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t \right]. \end{aligned}$$

Данный интеграл находим аналогично полученной ранее формуле (2.13). И наконец, в четвертом случае из формулы (2.45) получаем формулу (2.49) (Приложение Е):

$$F_{I_4}(t^*) = \frac{K_2}{3} (3\alpha - a - b - c - 3t^*). \quad (2.49)$$

Найдем математическое ожидание суммарных издержек в каждой из областей. Для этого сложим полученные формулы (2.41) и (2.46), (2.42) и (2.47), (2.43) и (2.48), (2.44) и (2.49).

Сложив формулы (2.41) и (2.46), получим выражение (2.50):

$$F_1(t^*) = F_{D_1}(t^*) + F_{I_1}(t^*) = \frac{K_1}{3} (3t^* + a + b + c - 3\alpha). \quad (2.50)$$

Сложив формулы (2.42) и (2.47), получим выражение (2.51):

$$\begin{aligned} F_2(t^*) = F_{D_2}(t^*) + F_{I_2}(t^*) = & \frac{K_1}{3(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} (\alpha - t^* - c)^2 \cdot \right. \\ & \cdot (\alpha - t^* - 3a + 2c) + (b - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \left. \right] + \\ & + \frac{K_2}{3(b - a)(c - a)} (\alpha - a - t^*)^3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Сложив формулы (2.43) и (2.48), получим выражение (2.52):

$$\begin{aligned}
F_3(t^*) = F_{D_3}(t^*) + F_{I_3}(t^*) = & \frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)} (\alpha - t^* - b)^3 + \\
& + \frac{K_2}{3(b-a)} [(a-c)(3t^* + a + 2c - 3\alpha) + \\
& + \frac{1}{(b-c)} (t^* + c - \alpha)^2 (t^* + 3b - 2c - \alpha)].
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Сложив формулы (2.44) и (2.49), получим выражение (2.53):

$$F_4(t^*) = F_{D_4}(t^*) + F_{I_4}(t^*) = \frac{K_2}{3} (3\alpha - a - b - c - 3t^*). \tag{2.53}$$

Найдем минимум ожидаемых издержек в каждой из областей:

$F_1(t^*) = \frac{K_1}{3} (3t^* + a + b + c - 3\alpha)$ - линейная возрастающая функция, минимальное значение достигается при $F_1(t^*) = 0$. Найдем точку, в которой $F_1(t^*) = 0$:

$$\frac{K_1}{3} (3t^* + a + b + c - 3\alpha) = 0;$$

$$3t^* + a + b + c - 3\alpha = 0;$$

$$t^* = \alpha - \frac{1}{3} (a + b + c);$$

$-\alpha + \frac{1}{3} (a + b + c) = \frac{1}{3} (b + c - 2a) > 0$, следовательно, $F_1(t^*)$ пересекает ось Ox от правее области $(-\infty; \alpha - a]$, а значит, в этой области $F_1(t^*)$ отрицательная, что противоречит области значений.

Чтобы найти минимум $F_2(t^*)$, вычислим производную функции (2.51) аналогично (2.24) и приравняем ее к нулю. Подробное решение дано в Приложении И.

$$\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} = -\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha - a - t^*)^2 + K_1. \quad (2.54)$$

Приравняем выражение (2.54) к нулю.

$$\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} = 0;$$

$$-\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha - a - t^*)^2 + K_1 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha - a - t^*)^2 = K_1;$$

$$(\alpha - a - t^*)^2 = \frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)};$$

$$\alpha - a - t^* = \pm \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$t_{1,2}^* = \alpha - a \pm \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}.$$

Графиком функции $-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha - a - t^*)^2 + K_1 = 0$ является парабола, ветви направлены вниз, т.к. $-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)} < 0$.

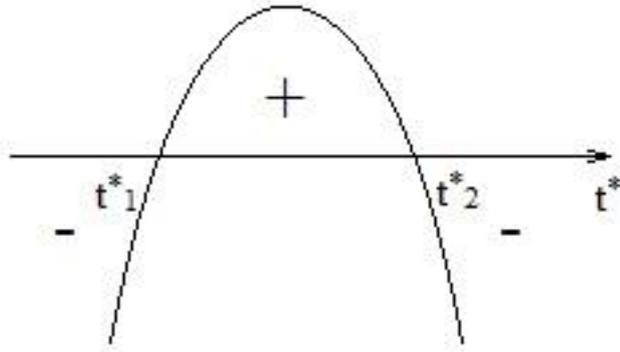


Рисунок 2.5 - Схематичное изображение графика функции $F_2'(t^*)$

Источник: составлено автором

Из рисунка 2.5 видно, что производная $\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*}$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_1^* :

$$t_1^* = \alpha - a - \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}. \quad (2.55)$$

Значит, t_1^* является минимумом функции $F_2(t^*)$.

Найдем значение функции $F_2(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (2.55) в (2.51):

$$F_2(t_2^*) = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(\alpha - c - \alpha + a + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} \right)^2 (\alpha -$$

$$-3a + 2c - \alpha + a + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}) + \frac{K_1(b-c)}{3(b-a)} (3\alpha - 3a + b + 2c -$$

$$-3\alpha - 3 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)}(\alpha - a - \alpha + a +$$

$$+ \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}})^3.$$

Данное преобразование аналогично полученному ранее формулы (2.26). Подробное решение дано в Приложении К.

$$F_2(t_2^*) = \frac{K_1}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right). \quad (2.56)$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_2(t^*)$, представлено формулой (2.57):

$$\min_{t^* = \alpha - a - \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}} F_2(t^*) =$$

$$= \frac{K_1}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right). \quad (2.57)$$

Чтобы найти минимум $F_3(t^*)$, возьмем производную функции (2.52) аналогично (2.27) и приравняем ее к нулю. Подробное решение дано в Приложении К.

$$\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} = \frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} (\alpha - b - t^*)^2 - K_2. \quad (2.58)$$

Приравняем выражение (2.58) к нулю:

$$\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(b - c)} (\alpha - b - t^*)^2 - K_2 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(b - c)} (\alpha - b - t^*)^2 = K_2;$$

$$(\alpha - b - t^*)^2 = \frac{K_2(b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)};$$

$$\alpha - b - t^* = \pm \sqrt{\frac{K_2(b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$t_{1,2}^* = \alpha - b \pm \sqrt{\frac{K_2(b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)}}.$$

Графиком функции $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} (\alpha - b - t^*)^2 - K_2 = 0$ является парабола, ветви направлены вверх, т.к. $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} > 0$.

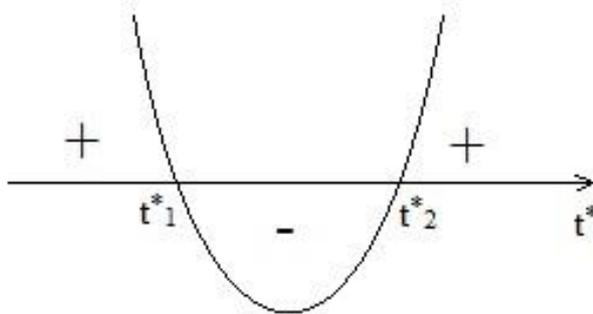


Рисунок 2.6 - Схематичное изображение графика функции $F_3'(t^*)$
 Источник: составлено автором

Из рисунка 2.6 видно, что производная $\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*}$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_2^* :

$$t_2^* = \alpha - b + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}. \quad (2.59)$$

Значит, t_2^* является минимумом функции $F_3(t^*)$.

Найдем значение функции $F_3(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (2.59) в (2.52):

$$\begin{aligned} F_3(t_2^*) &= \frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)} \left(\alpha - \alpha + b - \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} - b \right)^3 + \\ &+ \frac{K_2}{3(b-a)} \left[(a-c) \left(3\alpha - 3b + 3\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} + a + 2c - 3\alpha \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{(b-c)} \left(\alpha - b + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} + c - \alpha \right)^2 (\alpha - b + 3b - 2c - \alpha + \\ &\left. + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} \right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Данное преобразование аналогично ранее полученной формулы (2.29). Подробное решение дано в Приложение М.

$$F_3(t_2^*) = \frac{K_2}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} \right). \quad (2.60)$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_3(t^*)$, представлено формулой (2.61):

$$\begin{aligned} \min_{t^* = \alpha - b + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}}} F_3(t^*) = \\ = \frac{K_2}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}} \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

$F_4(t^*) = \frac{K_2}{3} (3\alpha - a - b - c - 3t^*)$ - линейная убывающая функция, минимальное значение достигается при $F_4(t^*) = 0$. Найдем точку, в которой $F_4(t^*) = 0$:

$$\frac{K_2}{3} (3\alpha - a - b - c - 3t^*) = 0;$$

$$3\alpha - a - b - c - 3t^* = 0;$$

$$t^* = \alpha - \frac{1}{3}(a + b + c);$$

$-b + \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(a + c - 2b) < 0$, следовательно, $F_4(t^*)$ пересекает ось От левее области $[\alpha - b; +\infty)$, а значит, в этой области $F_4(t^*)$ отрицательная, что противоречит области значений.

Чтобы найти минимальное значение функции $F(t^*)$, сравним формулы (2.57) и (2.61) и найдем среди них минимальное.

Для этого вычтем (2.61) из (2.57):

$$\begin{aligned} & \frac{K_1}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) - \frac{K_2}{3} (2b - a - c - 2 \cdot \\ & \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{1}{3} ((K_1 - 2K_2)b + (K_2 - 2K_1)a + (K_1 + K_2)c - 2 \cdot \\ & \cdot \sqrt{\frac{(b-a)}{(K_1+K_2)} (K_1 \sqrt{K_1(c-a)} - K_2 \sqrt{K_2(b-c)})}). \end{aligned}$$

В полученном выражение знак зависит от параметров: $a, b, c, K_1 = \frac{Qz}{\alpha_0}, K_2 = Qp$.

В итоге, получим формулу (2.62):

$$\begin{aligned} & \text{Если } p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right) > \frac{z}{\alpha} (b + c - 2a - \\ & - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = \alpha - a - \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}}; \\ & \text{Если } p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right) < \frac{z}{\alpha} (b + c - 2a - \\ & - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = \alpha - b + \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Разработанная стохастическая модель, учитывающая неопределенность времени доставки и соответствующая ей оптимизационная задача по критерию минимизации математического ожидания интегральных дополнительных издержек в качестве результата определяют время назначения доставки новой партии товара в известном объеме. При предположении о треугольном распределении случайных отклонений момента прибытия товарной партии от договорного было получено аналитическое решение задачи, выраженное соотношением (2.62).

2.3 Модели оптимизации времени поставки в условиях неопределенности времени доставки с учетом рисков начисления неустоек

Предполагается, что поставка товара происходит периодически. Объемы поставляемого товара детерминированы, поскольку рассчитываются, исходя из известного графика поставок, который определяет время и объем поставки.

Пусть t_1, t_2, \dots, t_n – последовательные моменты поставок в рассматриваемый период, определенные графиком, а S_1, S_2, \dots, S_n – соответствующие объемы поставок, также определенные графиком. Тогда объем поставки Q в рассматриваемый период определяется как

$$Q = \sum_{i=1}^n S_i. \quad (2.63)$$

Время доставки в рассматриваемой модели является случайной величиной. Пусть неопределенность времени доставки товара на склад x , выражено соотношением (2.64):

$$x = t^* + \Delta t, \quad (2.64)$$

где t^* - время заказа поставки товара; Δt - случайная величина, представляющая разницу между фактическим временем доставки и договорным с известным законом распределения, с плотностью распределения вероятностей - $f(x)$, функцией распределения вероятностей $\Phi(x)$ и известным множеством значений $x \in [a, b]$.

В качестве оптимизирующей переменной рассматривается момент назначения поставки t^* . Предполагается также, что контрактные обязательства поставщика обременены условиями выплаты неустоек в случае нарушения сроков или объемов поставки. Такими неустойками могут являться штрафы, которые определяются как фиксированные дополнительные выплаты в случае нарушений условий поставки, как правило они определяются как фиксированный процент от общей суммы поставки. В качестве неустойки могут рассматриваться пени, которые являются дополнительными выплатами по фиксированным тарифам в зависимости от объема недопоставки и сроков недопоставки.

В моделях учитываются также дополнительные издержки хранения завезенной партии товара в случае ее раннего завоза, а именно до времени первой контрактной поставки, которые исчисляются пропорционально объему товара и времени досрочного хранения по тарифу H , $H \geq 0$. Помимо прямых складских издержек, тариф издержек хранения может включать в себя и финансовые потери от эффекта «замороженных денег», особенно если торговая компания использует в качестве оборотного капитала банковскую кредитную линию. Исследования данных моделей представлено в [64].

2.3.1 Модель минимизации дополнительных издержек с учетом рисков начисления штрафов

В данной модели в качестве целевой функции рассматривается математическое ожидание интегральных дополнительных издержек, включающие издержки

хранения до начала контрактных поставок и издержки выплаты штрафов за нарушение контрактных условий поставки. Пусть V_1, V_2, \dots, V_n – абсолютные значения фиксированных штрафов за нарушение сроков соответствующих поставок.

Первоначально определим область допустимых значений для оптимизирующей переменной t^* . Заметим, что $t_1 - b \leq t^*$. Это следует из того, что при меньших значениях t^* риск штрафов отсутствует, а дополнительные издержки хранения возрастают и, следовательно, эти значения не могут являться оптимальным моментом назначения поставки. Заметим также, что $t^* \leq t_1 - a$. Это следует из того, что при больших значениях t^* риск дополнительных издержек хранения отсутствует, а дополнительные издержки штрафов возрастают и, следовательно, эти значения также не могут являться оптимальным моментом назначения поставки. Таким образом, искомый момент назначения поставки удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$t_1 - b \leq t^* \leq t_1 - a, \text{ откуда } a \leq t_1 - t^* \leq b. \quad (2.65)$$

Учитывая, что $a \leq \Delta t \leq b$ Математический вид целевой функции модели представлен выражением (2.66).

$$F(t^*) = \int_a^{t_1 - t^*} HQ(t_1 - t^* - \Delta t)f(\Delta t)d\Delta t + \sum_{i=1}^n p_i(t^*)V_i, \quad (2.66)$$

где $p_1(t^*), p_2(t^*), \dots, p_n(t^*)$ – вероятности выплаты соответствующего штрафа, зависящие от момента назначения поставки t^* , а Q – объем поставки в рассматрива-

емый период, определенный соотношением (2.63). Вероятности штрафов при заданном моменте поставки могут выражены через функцию плотности распределения вероятностей как:

$$p_i(t^*) = \begin{cases} \int_{t_i-t^*}^b f(\Delta t)d\Delta t, & t_i \leq t^* + b, \\ 0, & t_i > t^* + b, \end{cases} \quad (2.67)$$

или через функцию распределения вероятностей как:

$$p_i(t^*) = \begin{cases} \Phi(b) - \Phi(t_i - t^*), & t_i \leq t^* + b, \\ 0, & t_i > t^* + b. \end{cases} \quad (2.68)$$

Условием отличности от 0 вероятностей штрафов является условие $t_i \leq t^* + b$. С учетом того, что $t^* \leq t_1 - a$, достаточно учесть в модели только штрафы, которые удовлетворяют неравенству $t_i \leq t_1 + (b - a)$. Пусть это условие выполняется для $i = 1, 2, \dots, K_{max}$. Для конкретного значения t^* максимальный индекс ненулевых вероятностей $K(t^*)$ может быть отличен от K_{max} . В частности, как нетрудно видеть, при $t^* = t_1 - b$ условие $t_i \leq t^* + b$ выполняется только для $i=1$. Следовательно, в общем случае $1 \leq K(t^*) \leq K_{max}$.

Для минимизации функции $F(t^*)$ найдем ее производную, воспользовавшись известной формулой Лейбница для дифференцирования интегральных функций с переменным верхним пределом [34, с. 218].

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ \int_a^{t_1-t^*} f(x)dx + \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(t_i - t^*)V_i, \quad (2.69)$$

ИЛИ

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ\Phi(t_1 - t^*) + \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(t_i - t^*)V_i, \quad (2.70)$$

Рассмотрим значения производной на концах рассматриваемого отрезка оптимизирующей переменной. Имеем на левом конце отрезка при $t^* = t_1 - b$:

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(b + (t_i - t_1))V_i = -HQ < 0, \quad (2.71)$$

Соответственно на правом конце отрезка при $t^* = t_1 - a$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t^*)}{dt^*} &= -HQ \int_a^a f(x)dx \\ &+ \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(a + (t_i - t_1))V_i = \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(a + (t_i - t_1))V_i \geq 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

Учитывая непрерывность рассматриваемой функции и ее производной, а также ее не положительность на левом конце отрезка и не отрицательность на правом конце, можно утверждать наличие стационарной точки на данном отрезке, которая является решением задачи. Найти ее в общем случае возможно применяя численные методы поиска корней для уравнения (2.73).

$$-HQ\Phi(t_1 - t^*) + \sum_{i=1}^{K(t^*)} f(t_i - t^*)V_i = 0. \quad (2.73)$$

Далее проведем решение данной задачи в предположении, что случайная величина, описывающая отклонение реального времени поставки от ожидаемого, распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c –удовлетворяют следующим условиям: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел значений случайной величины, b - верхний предел значений случайной величины, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В этом случае функция плотности распределения вероятностей $f(x)$ выражается согласно соотношениям (2.74), а функция распределения вероятностей согласно соотношениям (2.75).

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{при } a \leq x < c; \\ \frac{2}{(b-a)}, & \text{при } x = c; \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{при } c < x \leq b; \\ 0, & \text{при } b < x. \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a; \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & \text{при } a \leq x \leq c; \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & \text{при } c \leq x \leq b; \\ 0, & \text{при } b < x. \end{cases} \quad (2.75)$$

Для определенности предположим, что $K_{max}=2$.

Шаг 1. Для каждого $i = 1, \dots, K_{max}$ вычислим тройку чисел: $t_i - b, t_i - b, t_i - a$.

Шаг 2. Из чисел, вычисленных на шаге 1, исключим числа, которые превосходят значение $(t_1 - a)$. Оставшиеся числа упорядочим по возрастанию. Пусть в рассматриваемом примере определился следующий порядок: $t_1 - b \leq t_2 - b \leq t_1 - c \leq t_2 - c \leq t_1 - a$. Таким образом, отрезок допустимых значений переменной t^* , разбился на 4 отрезка. Далее решим задачу поиска корней уравнения (2.73), т.е. стационарных точек функции (2.66) на каждом из них.

Шаг 3.1 $t_1 - b \leq t^* \leq t_2 - b$. Уравнение (2.73) принимает вид:

$$-HQ \left(1 - \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} \right) + \frac{2(b - t_1 + t^*)}{(b - a)(b - c)} V_1 = 0. \quad (2.76)$$

Уравнение (2.76) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.2 $t_2 - b \leq t^* \leq t_1 - c$. Уравнение (2.73) принимает вид:

$$-HQ \left(1 - \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} \right) + \frac{2(b - t_1 + t^*)}{(b - a)(b - c)} V_1 + \frac{2(b - t_2 + t^*)}{(b - a)(b - c)} V_2 = 0. \quad (2.77)$$

Уравнение (2.77) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.3 $t_1 - c \leq t^* \leq t_2 - c$. Уравнение (2.73) принимает вид:

$$-HQ \left(\frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b - a)(c - a)} \right) + \frac{2(t_1 - t^* - a)}{(b - a)(c - a)} V_1 + \frac{2(b - t_2 + t^*)}{(b - a)(b - c)} V_2 = 0. \quad (2.78)$$

Уравнение (2.77) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.4 $t_2 - c \leq t^* \leq t_1 - a$. Уравнение (2.73) принимает вид:

$$-HQ \left(\frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b - a)(c - a)} \right) + \frac{2(t_1 - t^* - a)}{(b - a)(c - a)} V_1 + \frac{2(t_2 - t^* - a)}{(b - a)(c - a)} V_2 = 0. \quad (2.79)$$

Уравнение (2.79) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 4. Объединение множеств решений, полученных на этапах 3.1 – 3.4 является непустым множеством в силу обоснования, приведенного выше. Если найденная стационарная точка единственная, то она является решением задачи. Иначе во всех стационарных точках вычисляется значение функции (2.66), которое осуществляется аналитическими способами и выбирается точка с минимальным значением функции, которая и является решением задачи.

2.3.2 Модель минимизации дополнительных издержек с учетом рисков начисления пени

В данной модели в качестве целевой функции рассматривается математическое ожидание интегральных дополнительных издержек, включающие издержки хранения до начала контрактных поставок и издержки выплаты пени за нарушение

сроков поставки. Предполагаем, что пени начисляются за каждый день задержки поставки и исчисляются как фиксированная доля от общей суммы поставки. Пусть m_1, m_2, \dots, m_n – значения фиксированных долей от общей суммы поставки при начислении пени за нарушение сроков соответствующих поставок. Пусть W_1, W_2, \dots, W_n – общие суммы соответствующих поставок.

Рассуждения, проведенные нами в предыдущей модели относительно области допустимых значений для оптимизирующей переменной t^* , остаются верными с точностью до замены рисков выплаты штрафов на риски выплаты пени и приводят нас к аналогичному результату $t_1 - b \leq t^* \leq t_1 - a$.

Учитывая, что $a \leq \Delta t \leq b$ Математический вид целевой функции модели представлен выражением (2.80).

$$F(t^*) = \int_a^{t_1 - t^*} HQ(t_1 - t^* - \Delta t)f(\Delta t)d\Delta t + \sum_{i=1}^n m_i W_i P_i(t^*), \quad (2.80)$$

где $P_1(t^*), P_2(t^*), \dots, P_n(t^*)$ – математическое ожидание количества дней просрочки при нарушении соответствующей поставки, зависящее от момента назначения поставки t^* , вычисляемые согласно выражения (2.81) а Q – объем поставки в рассматриваемый период, определенный соотношением (2.63).

$$P_i(t^*) = \begin{cases} \int_{t_i - t^*}^b (t^* + \Delta t - t_i)f(\Delta t)d\Delta t, & t_i \leq t^* + b, \\ 0, & t_i > t^* + b, \end{cases} \quad (2.81)$$

Рассуждения в параграфе 2.3.1 относительно определения величины K_{max} остаются справедливыми для данной модели, как и общий вывод, выраженный двойным неравенством $1 \leq K(t^*) \leq K_{max}$.

Для минимизации функции $F(t^*)$ найдем ее производную, воспользовавшись известной формулой Лейбница для дифференцирования интегральных функций с переменным верхним пределом [34, с. 218].

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ \int_a^{t_1 - t^*} f(x)dx + \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t^*), \quad (2.82)$$

где функции $p_i(t^*)$ определяются выражениями (2.67) или (2.68). Равносильная запись представлена выражением (2.83)

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ\Phi(t_1 - t^*) + \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t^*). \quad (2.83)$$

Рассмотрим значения производной на концах рассматриваемого отрезка оптимизирующей переменной. Имеем на левом конце отрезка при $t^* = t_1 - b$:

$$\frac{dF(t^*)}{dt^*} = -HQ \int_a^b f(x)dx + \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t_1 - b) = -HQ < 0. \quad (2.84)$$

Соответственно на правом конце отрезка при $t^* = t_1 - a$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t^*)}{dt^*} = & -HQ \int_a^a f(x)dx \\ & + \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t_1 - a) = \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t_1 - a) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Учитывая непрерывность рассматриваемой функции и ее производной, а также ее не положительность на левом конце отрезка и не отрицательность на правом конце, можно утверждать наличие стационарной точки на данном отрезке, которая является решением задачи. Найти ее в общем случае возможно применяя численные методы поиска корней для уравнения (2.86).

$$-HQ\Phi(t_1 - t^*) + \sum_{i=1}^{K(t^*)} m_i W_i p_i(t_1 - a) = 0. \quad (2.86)$$

Далее проведем решение данной задачи в предположении, что случайная величина, описывающая отклонение реального времени поставки от ожидаемого, распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c –удовлетворяют следующим условиям: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел значений случайной величины, b - верхний предел значений случайной величины, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В этом случае функция плотности распределения вероятностей $f(x)$ выражается согласно соотношениям (2.74), а функция распределения вероятностей согласно соотношениям (2.75).

Для определенности предположим, что $K_{max}=2$.

Шаг 1. Для каждого $i = 1, \dots, K_{max}$ вычислим тройку чисел: $t_i - b, t_i - b, t_i - a$.

Шаг 2. Из чисел, вычисленных на шаге 1, исключим числа, которые превосходят значение $(t_1 - a)$. Оставшиеся числа упорядочим по возрастанию. Пусть в рассматриваемом примере определился следующий порядок: $t_1 - b \leq t_2 - b \leq t_1 - c \leq t_2 - c \leq t_1 - a$. Таким образом, отрезок допустимых значений переменной t^* , разбился на 4 отрезка. Далее решим задачу поиска корней уравнения (2.86), т.е. стационарных точек функции (2.80) на каждом из них.

Шаг 3.1 $t_1 - b \leq t^* \leq t_2 - b$. Уравнение (2.86) принимает вид:

$$-HQ \left(1 - \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} \right) + m_1 W_1 \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} = 0. \quad (2.87)$$

Уравнение (2.87) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.2 $t_2 - b \leq t^* \leq t_1 - c$. Уравнение (2.86) принимает вид:

$$\begin{aligned} & -HQ \left(1 - \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} \right) + m_1 W_1 \frac{(b - t_1 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} + m_2 W_2 \frac{(b - t_2 + t^*)^2}{(b - a)(b - c)} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Уравнение (2.88) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.3 $t_1 - c \leq t^* \leq t_2 - c$. Уравнение (2.86) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& -HQ \left(\frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b-a)(c-a)} \right) + m_1 W_1 \left(1 - \frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b-a)(c-a)} \right) + m_2 W_2 \frac{2(b - t_2 + t^*)}{(b-a)(b-c)} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Уравнение (2.89) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 3.4 $t_2 - c \leq t^* \leq t_1 - a$. Уравнение (2.86) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& -HQ \left(\frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b-a)(c-a)} \right) + m_1 W_1 \left(1 - \frac{(t_1 - t^* - a)^2}{(b-a)(c-a)} \right) + m_2 W_2 \left(1 - \frac{(t_2 - t^* - a)^2}{(b-a)(c-a)} \right) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Уравнение (2.90) есть задача нахождения корней квадратного уравнения на заданном отрезке, которая решается аналитически.

Шаг 4. Объединение множеств решений, полученных на этапах 3.1 – 3.4 является непустым множеством в силу обоснования, приведенного выше. Если найденная стационарная точка единственная, то она является решением задачи. Иначе во всех стационарных точках вычисляется значение функции (2.80), которое осуществляется аналитическими способами и выбирается точка с минимальным значением функции, которая и является решением задачи.

Глава 3 Математические модели оптимизации объема поставки

В данной главе предполагается, что момент поставки партии товара является детерминированной величиной, не подлежащей корректировке. Это характерно для организаций, в логистических цепочках которых присутствуют регулярные рейсы, например железнодорожных или морских перевозок. Таким образом, в качестве оптимизационного параметра в моделях данной главы будет рассмотрен объем поставки товара, который следует завозить в заданный момент времени, позволяющий минимизировать риски, снижением одновременно затрат на хранение товара на складе и потерь от упущенной выгоды, а также риски потери клиентов в результате неполного удовлетворения их спроса.

3.1 Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности спроса по критерию минимизации дополнительных издержек

Разработанная стохастическая модель предназначена для оптимизации объема поставки. Источником неопределенности является случайный характер спроса. Предполагается, что распределение случайной величины отклонений фактического спроса от прогнозируемого известно. Основные результаты данного параграфа опубликованы автором в работах [59], [61].

Кроме того, предположим, что время поставки является строго детерминированным, т.е. выполнение заказа на завоз товара всегда происходит точно в срок.

Неопределенность в данной модели выражается через отклонения фактического времени окончания товара на складе от прогнозируемого согласно соотношению (3.1):

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad (3.1)$$

где α_0 - прогнозируемое время обнуления запаса товара, $\Delta\alpha$ - случайная величина отклонения фактического времени обнуления товара на складе от прогнозируемого.

Будем считать, что случайная величина $\Delta\alpha$ распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – определяются из статистических данных, либо с помощью оценок экспертов, при соблюдении следующего условия: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел, b - верхний предел, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В частном случае $a = c$ или $c = b$ треугольное распределение строится по двум точкам. Тогда случайной величине времени фактического обнуления товара α соответствует треугольное распределение на отрезке $[\alpha_0 + a; \alpha_0 + b]$. На рисунке 2.1 изображен график плотности распределения случайной величины $\Delta\alpha$. Как уже отмечалось ранее, использование треугольного распределения вполне адекватно во многих реальных задачах и имеет существенные преимущества при недостаточном объеме статистических выборок, т.к. для его использования можно воспользоваться оценками экспертов.

С одной стороны, в результате завоза товара до окончания предыдущей партии возникают дополнительные складские расходы, связанные с размещением и обслуживанием товара, а также потери от замороженных средств в товаре (учет временной стоимости денег). Допустим объем партии товара, который прибывает после реализации завезенного в момент t_0 товара в объеме Q равен Q^* . Данный объем возможно точно не известен, поскольку, например неизвестна дата следующей поставки. В этом случае используется прогнозное значение данного объема. Тогда дополнительные складские затраты для объема Q в течении времени от t^* и до момента фактического окончания товара α , в случае, когда завоз товара был произведен раньше момента времени t^* ($t^* < \alpha$), могут быть выражены соотношением (3.2):

$$I = pQ^*(\alpha - t^*), \quad (3.2)$$

где $p = const$ - цена удельных складских издержек единичного объема товара.

С другой стороны, из-за позднего привоза товара может возникнуть дефицит товара, который приведет к упущенной выгоде. Размер этой упущенной выгоды от момента фактического окончания товара на складе α и до момента поступления новой партии товара на склад t^* в объеме Q , в случае, когда завоз товара был произведен позже момента времени t^* ($t^* > \alpha$), может быть выражен соотношением (3.3):

$$D = qz(t^* - \alpha), \quad (3.3)$$

где $z = const$ - удельная прибыль от реализации товара, q - оценка среднесуточного количества реализации товара.

Суммарный объем дополнительных затрат, возникающих в следствие несвоевременности завоза можно выразить соотношением (3.4):

$$I + D = \begin{cases} pQ^*(\alpha - t^*), & t^* \leq \alpha; \\ qz(t^* - \alpha), & t^* > \alpha. \end{cases} \quad (3.4)$$

В качестве целевой функции интегральных дополнительных издержек примем их математическое ожидание, поскольку интегральные издержки являются непрерывной случайной величиной.

Пусть в рассматриваемой модели неопределенность спроса выражается случайной величиной $\Delta\alpha$, которая распределена согласно треугольному закону распределения с плотностью, выраженной соотношением (2.5).

В этом случае математическое ожидание интегральных дополнительных затрат, связанных с несвоевременностью завоза, выражается соотношением (3.5).

$$\begin{aligned}
F(Q) = & \int_{\Delta\alpha \leq t^* - \frac{Q}{q}} qz \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha + \\
& + \int_{\Delta\alpha \geq t^* - \frac{Q}{q}} pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta - t^* \right) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом математически формализованная задача минимизации интегральных дополнительных затрат, возникающая в процессе управления запасами, представленная соотношением (3.6), заключается в определении такого объема заказа Q , который обеспечит минимум математического ожидания интегральных дополнительных затрат.

$$F(Q) \rightarrow \min_Q. \tag{3.6}$$

Представим соотношение (3.5) двумя слагаемыми (3.7):

$$F(Q) = F_D(Q) + F_I(Q). \tag{3.7}$$

Первая из функций соотношения (3.7) представляется как (3.8):

$$F_D(Q) = \begin{cases} \int_a^b qz \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha, & t^* > \alpha, \\ 0, & t^* \leq \alpha \end{cases} \tag{3.8}$$

Таким образом, интеграл в формуле (3.8) может иметь ненулевое значение только при $t^* > \alpha$, это равносильно тому, что $t^* > \frac{Q}{q} + \Delta\alpha$, а значит, интеграл (3.8) существует и при $t^* - \frac{Q}{q} > \Delta\alpha$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $t^* - \frac{Q}{q} < a$, или $Q \geq q(t^* - a)$, с учетом неравенства $a \leq \Delta\alpha$, справедливо неравенство $t^* < \frac{Q}{q} + \Delta\alpha = \alpha$, а следовательно, интеграл $F_D(Q)$ в рассматриваемой области переменной Q примет вид, согласно формуле (3.8):

$$F_{D_1}(Q) = 0. \quad (3.9)$$

Дополнительный индекс в данном случае характеризует номер рассматриваемого интервала переменной.

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq t^* - \frac{Q}{q} < c$, или $q(t^* - c) \leq Q \leq q(t^* - a)$, Неравенство $t^* - \frac{Q}{q} \geq \Delta\alpha$ выполняется на отрезке $\left[a; t^* - \frac{Q}{q}\right]$ и не выполняется на отрезке $(t^* - \alpha_0, b)$, следовательно:

$$F_{D_2}(t^*) = \int_a^{t^* - \frac{Q}{q}} \underbrace{qz}_{K_1} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha\right) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \cdot$$

$$\int_a^{t^* - \frac{Q}{q}} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha\right) (\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[\int_a^{t^* - \frac{Q}{q}} a \left(\frac{Q}{q} - t^*\right) d\Delta\alpha +$$

$$+ \int_a^{t^* - \frac{Q}{q}} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a\right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^{t^* - \frac{Q}{q}} \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[a \left(\frac{Q}{q} - t^*\right) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \Delta\alpha \Big|_a^{t^* - \frac{Q}{q}} + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha^2 \Big|_a^{t^* - \frac{Q}{q}} - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_a^{t^* - \frac{Q}{q}} \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \cdot \\
& \cdot \left[\left(a \frac{Q}{q} - at^* \right) \left(t^* - \frac{Q}{q} - a \right) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \left(t^{*2} - 2 \frac{Q}{q} t^* + \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - a^2 \right) - \frac{1}{3} t^{*3} + \frac{Q}{q} t^{*2} - t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{3} a^3 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[a \frac{Q}{q} t^* - a \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - a^2 \frac{Q}{q} - at^{*2} + at^* \frac{Q}{q} + a^2 t^* + \frac{1}{2} t^{*3} - \frac{Q}{q} t^{*2} + \frac{1}{2} t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} a^2 t^* - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} t^{*2} \frac{Q}{q} + t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{2} a^2 \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} at^{*2} - at^* \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} a \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} a^3 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} t^{*3} + t^{*2} \frac{Q}{q} - t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{3} a^3 \right] \\
& = \frac{2K_1}{(b-a)(c-a)} \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{2} (t^* - a) \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} (t^* - a)^2 \frac{Q}{q} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} (t^* - a)^3 \right] = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае из формулы (3.8) получаем формулу (3.10):

$$F_{D_2}(Q) = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^3. \quad (3.10)$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq t^* - \frac{Q}{q} < b$, или $q(t^* - b) \leq Q \leq q(t^* - c)$, Неравенство $t^* - \alpha_0 > \Delta\alpha$ выполняется на отрезках $[a; c]$ и $[c; t^* - \alpha_0]$ и не выполняется на отрезке $(t^* - \alpha_0; b)$, следовательно:

$$\begin{aligned}
F_{D_3}(Q) &= \int_a^c \underbrace{qz}_{K_1} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^{t^* - \frac{Q}{q}} \underbrace{qz}_{K_1} \left(t^* - \right. \\
&\left. - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) (\Delta\alpha - \right. \\
&\left. - a) d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^{t^* - \frac{Q}{q}} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
&\cdot \left(\int_a^c a \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) d\Delta\alpha + \int_a^c \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \\
&\cdot \left(\int_c^{t^* - \frac{Q}{q}} b \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) d\Delta\alpha + \int_c^{t^* - \frac{Q}{q}} \left(-t^* + \frac{Q}{q} - b \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_c^{t^* - \frac{Q}{q}} \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \Bigg] = \\
&= \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(a \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \Delta\alpha \Big|_a^c + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha^2 \Big|_a^c - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_a^c \right) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{(b-c)} \left(b \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) \Delta\alpha \Big|_c^{t^* - \frac{Q}{q}} - \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha^2 \Big|_c^{t^* - \frac{Q}{q}} + \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_c^{t^* - \frac{Q}{q}} \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\left(a \frac{Q}{q} - at^* \right) (c-a) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) (c-a)(c+a) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + a^2) \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\left(bt^* - b \frac{Q}{q} \right) \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right) - \frac{1}{2} \left(t^* - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Q}{q} + b \right) \left(t^{*2} - 2 \frac{Q}{q} t^* + \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - c^2 \right) + \frac{1}{3} t^{*3} - \frac{Q}{q} t^{*2} + \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} c^3 \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[a \frac{Q}{q} - at^* + \frac{1}{2} ct^* + \frac{1}{2} at^* - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} a + \frac{1}{2} ac + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} ac - \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{(b-c)} \left(bt^{*2} - b \frac{Q}{q} t^* - bct^* - b \frac{Q}{q} t^* + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + bc \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} t^{*3} + \frac{Q}{q} t^{*2} - \frac{1}{2} t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{2} c^2 t^* + \frac{1}{2} t^{*2} \frac{Q}{q} - \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c^2 - \frac{1}{2} bt^{*2} + b \frac{Q}{q} t^* - \frac{1}{2} b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{2} bc^2 + \frac{1}{3} t^{*3} - \frac{Q}{q} t^{*2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 - \frac{1}{3} c^3 \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} (c-a)t^* + \frac{1}{6} (a-c) \left(3 \frac{Q}{q} + a + 2c \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6} t^{*3} + \left(\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} \right) t^{*2} + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - b \frac{Q}{q} - bc + \frac{1}{2} c^2 \right) t^* + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{2} b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + bc \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c^2 + \frac{1}{2} bc^2 - \frac{1}{3} c^3 \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6} (a-c) \cdot \right. \\
& \cdot \left(3 \frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6} t^{*3} + \left(\frac{1}{2} b + \frac{1}{3} \frac{Q}{q} + \frac{1}{6} \frac{Q}{q} + \frac{1}{3} c - \frac{1}{3} c \right) \cdot \right. \\
& \cdot t^{*2} + \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} c \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c - b \frac{Q}{q} - bc + \frac{1}{2} c^2 \right) t^* + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + \right. \\
& \left. \left. + 3b - 2c \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6} (a-c) \left(3 \frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(-\frac{1}{6} t^{*3} + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} + c \right) t^{*2} + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c \right) t^{*2} - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} + c \right) \left(\frac{Q}{q} + 3b - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2c \right) t^* - \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 t^* + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6} (a-c) \right. \\
& \left. - c \right) \left(3 \frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} + c \right) t^* + \frac{1}{6} t^{*2} \right) \cdot \\
& \cdot \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c - t^* \right) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{6} (a-c) \left(3 \frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6(b-c)} \left(\frac{Q}{q} + c - t^* \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c - t^* \right) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, в третьем случае из формулы (3.8) получаем формулу (3.11):

$$F_{D_3}(Q) = \frac{K_1}{3(b-a)} \left[(a-c) \left(3\frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\frac{Q}{q} + c - t^* \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c - t^* \right) \right]. \quad (3.11)$$

В четвертом случае, при $a < b \leq t^* - \frac{Q}{q}$, или $Q \leq q(t^* - b)$, неравенство $t^* - \frac{Q}{q} > \Delta\alpha$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{D_4}(Q) &= \int_a^c \underbrace{qz}_{K_1} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b \underbrace{qz}_{K_1} \left(t^* - \frac{Q}{q} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta\alpha \right) + \int_c^b \underbrace{qz}_{K_1} \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^b \left(t^* - \frac{Q}{q} - \Delta\alpha \right) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\int_a^c a \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) d\Delta\alpha + \int_a^c \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\int_c^b b \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) d\Delta\alpha + \int_c^b \left(-t^* + \frac{Q}{q} - b \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{(c-a)} \left(a \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \Delta\alpha \Big|_a^c + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta\alpha^2 \Big|_a^c - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_a^c \right) + \frac{1}{(b-c)} (b \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) \Delta \alpha |^b_c - \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) \Delta \alpha^2 |^b_c + \frac{1}{3} \Delta \alpha^3 |^b_c \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\left(a \frac{Q}{q} - at^* \right) (c-a) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + a \right) (c-a)(c+a) - \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + \right. \\
& \left. \left. + a^2) \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\left(bt^* - b \frac{Q}{q} \right) (b-c) - \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) (b-c)(b+c) + \frac{1}{3} \cdot \right. \\
& \left. \left. (b-c)(b^2 + bc + c^2) \right) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[a \frac{Q}{q} - at^* + \frac{1}{2} ct^* + \frac{1}{2} at^* - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} a + \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} ac - \frac{1}{3} a^2 + bt^* - b \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} bt^* - \frac{1}{2} ct^* + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} b + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c - - \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} bc + \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} bc + \frac{1}{3} c^2 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} bt^* - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} at^* + \frac{1}{2} a \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} b \frac{Q}{q} + \frac{1}{6} ac - \frac{1}{6} bc + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{6} b^2 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} t^* (b - \right. \\
& \left. - a) + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} (a - b) + \frac{1}{6} c(a - b) + \frac{1}{6} (a - b)(a + b) \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \frac{1}{6} (a - b) \cdot \\
& \cdot \left(3 \frac{Q}{q} + a + b + c - 3t^* \right) = \frac{K_1}{3} \left(3t^* - a - b - c - 3 \frac{Q}{q} \right).
\end{aligned}$$

И наконец, в четвертом случае из формулы (3.8) получаем формулу (3.12):

$$F_{D_4}(Q) = \frac{K_1}{3} \left(3t^* - a - b - c - 3 \frac{Q}{q} \right). \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое выражения (3.7), которое выражается следующей формулой (3.13):

$$F_I(Q) = \int_a^b pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) \rho(\Delta\alpha) d\Delta\alpha. \quad (3.13)$$

Интеграл в формуле (3.13) существует при $t^* < \alpha$, это равносильно тому, что $t^* < \frac{Q}{q} + \Delta\alpha$, а значит, интеграл (3.13) существует и при $t^* - \frac{Q}{q} < \Delta\alpha$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае, при $t^* - \frac{Q}{q} < a < b$, или $Q \geq q(t^* - a)$, неравенство $t^* - \frac{Q}{q} < \Delta\alpha$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{I_1}(Q) &= \int_a^c pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) \cdot \\ &\cdot \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) (\Delta\alpha - a) d\Delta\alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^b \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_a^c a \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) \cdot \right. \right. \\ &\cdot d\Delta\alpha + \int_a^c \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_a^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot d\Delta\alpha + \int_c^b \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \Bigg] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(t^* - \right. \\
& - \frac{Q}{q}) \Delta\alpha|_a^c + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) \Delta\alpha^2|_a^c + \frac{1}{3} \Delta\alpha^3|_a^c \Bigg) + \frac{1}{(b-c)} \left(b \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \Delta\alpha|_c^b + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha^2|_c^b - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3|_c^b \right) \Bigg] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\left(at^* - a \frac{Q}{q} \right) \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot (c-a) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) (c-a)(c+a) + \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + a^2) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(b-c)} \left(\left(b \frac{Q}{q} - bt^* \right) (b-c) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) (b-c)(b+c) - \frac{1}{3} (b-c) \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot (b^2 + bc + c^2) \right) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[at^* - a \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} ct^* - \frac{1}{2} at^* + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} a - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} ac - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} c^2 + \frac{1}{3} ac + \frac{1}{3} a^2 - bt^* + b \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} bt^* + \frac{1}{2} ct^* - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} b - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} bc - \frac{1}{3} b^2 - \frac{1}{3} bc - \frac{1}{3} c^2 \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[-\frac{1}{2} bt^* + \frac{1}{2} at^* - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} a \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} b \frac{Q}{q} - \frac{1}{6} ac + \frac{1}{6} bc - \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{6} b^2 \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{2} t^* (a-b) + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} \cdot \right. \\
& \left. \cdot (b-a) + \frac{1}{6} c(b-a) + \frac{1}{6} (b-a)(b+a) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \frac{1}{6} (b-a) \left(3 \frac{Q}{q} + a + \right.
\end{aligned}$$

$$+b + c - 3t^*) = \frac{pQ^*}{3} \left(3 \frac{Q}{q} + a + b + c - 3t^* \right).$$

Таким образом, в первом случае формула (3.13) примет вид (3.14):

$$F_{I_1}(Q) = \frac{pQ^*}{3} \left(3 \frac{Q}{q} + a + b + c - 3t^* \right). \quad (3.14)$$

Рассмотрим второй случай, когда $a \leq t^* - \frac{Q}{q} < c < b$, или $q(t^* - c) \leq Q \leq q(t^* - a)$. Неравенство $t^* - \frac{Q}{q} < \Delta\alpha$ выполняется на отрезках $\left[t^* - \frac{Q}{q}; c \right]$ и $[c; b]$ и не выполняется на отрезке $\left[a; t^* - \frac{Q}{q} \right]$, следовательно:

$$\begin{aligned} F_{I_2}(Q) &= \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^c pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) \frac{2(\Delta\alpha - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta\alpha + \int_c^b pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - \right. \\ &\left. - t^* \right) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^c \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) (\Delta\alpha - a) \cdot \right. \\ &\left. \cdot d\Delta\alpha + \frac{1}{(b-c)} \int_c^b \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \left(\int_{t^* - \frac{Q}{q}}^c a \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) \cdot d\Delta\alpha + \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^c \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha + \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^c \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \cdot d\Delta\alpha + \int_c^b \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_c^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right) \Bigg] = \\
& = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(a \left(t^* - \frac{Q}{q} \right) \Delta\alpha \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^c + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) \Delta\alpha^2 \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^c + \frac{1}{3} \cdot \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot \Delta\alpha^3 \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^c \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(b \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) \Delta\alpha \Big|_c^b + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha^2 \Big|_c^b - \frac{1}{3} \cdot \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot \Delta\alpha^3 \Big|_c^b \right) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\left(at^* - a \frac{Q}{q} \right) \left(c - t^* + \frac{Q}{q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} - t^* - a \right) \cdot \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot \left(c^2 - t^{*2} + 2t^* \frac{Q}{q} - \left(\frac{Q}{q} \right)^2 \right) + \frac{1}{3} c^3 - \frac{1}{3} t^{*3} + t^{*2} \frac{Q}{q} - t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(b-c)} \left(\left(b \frac{Q}{q} - bt^* \right) (b-c) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) (b-c)(b+c) - \frac{1}{3} (b-c) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - c)(b^2 + bc + c^2) \right) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(act^* - at^{*2} + a \frac{Q}{q} t^* - ac \frac{Q}{q} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a \frac{Q}{q} t^* - a \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c^2 - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} t^{*2} + t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 - \frac{1}{2} c^2 t^* + \frac{1}{2} t^{*3} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - t^{*2} \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* - \frac{1}{2} ac^2 + \frac{1}{2} at^{*2} - at^* \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} a \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{3} c^3 - \frac{1}{3} t^{*3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^{*2} \frac{Q}{q} - t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 \right) - bt^* + b \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} bt^* + \frac{1}{2} ct^* - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} b - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{3}c^2 \Big] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{2} \left(a + \frac{Q}{q} \right) \cdot \right. \right. \\
& \cdot t^{*2} + \left. \left(\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + a \frac{Q}{q} + ac - \frac{1}{2}c^2 \right) t^* - \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 a - ac \frac{Q}{q} + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} c^2 - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{3}c^3 \right) + \frac{1}{6}(b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{1}{6}t^{*3} + \left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}\frac{Q}{q} - \frac{1}{6}\frac{Q}{q} + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c \right) t^{*2} + \left(\frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + a \frac{Q}{q} + \right. \\
& + ac - \frac{2}{3}c^2 + \frac{1}{6}c^2 - \frac{2}{3}c \frac{Q}{q} + \frac{1}{3}c \frac{Q}{q} + \frac{1}{3}c \frac{Q}{q} \Big) t^* - \frac{1}{6} \left(\left(\frac{Q}{q} \right)^3 + 3 \left(\frac{Q}{q} \right)^2 a + 6ac \frac{Q}{q} - \right. \\
& \left. \left. - 3 \frac{Q}{q} c^2 + 3ac^2 + 2c^3 \right) \right) + \frac{1}{6}(b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \Big] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \cdot \\
& \cdot \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} + c \right) t^{*2} - \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) t^{*2} + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} + c \right) \left(\frac{Q}{q} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3a - 2c \right) t^* + \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 t^* - \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) \right) + \frac{1}{6}(b-c) \cdot \\
& \cdot \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \Big] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6} \left(t^{*3} - 2 \left(\frac{Q}{q} + c \right) t^{*2} + \left(\frac{Q}{q} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + c \right)^2 t^* \right) - \frac{1}{6} \left(\left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) t^{*2} - 2 \left(\frac{Q}{q} + c \right) \left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) t^* + \left(\frac{Q}{q} + c \right)^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) \Bigg) + \frac{1}{6}(b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \Bigg] = \frac{2pQ^*}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{1}{6} t^* \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{Q}{q} + 3a - 2c \right) \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right)^2 \right) + \frac{1}{6}(b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + \right. \\
& \left. + b + 2c - 3t^* \right) \Bigg] = \frac{pQ^*}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right)^2 \left(t^* - \frac{Q}{q} - 3a + 2c \right) + \right. \\
& \left. + (b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае формула (3.13) примет вид (3.15):

$$\begin{aligned}
F_{I_2}(Q) = \frac{pQ^*}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right)^2 \left(t^* - \frac{Q}{q} - 3a + 2c \right) + \right. \\
\left. + (b-c) \left(3 \frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \right]. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Рассмотрим третий случай, когда $a < c \leq t^* - \frac{Q}{q} < b$, или $q(t^* - b) \leq Q \leq q(t^* - c)$. Неравенство $t^* - \frac{Q}{q} < \Delta\alpha$ выполняется на отрезке $\left[t^* - \frac{Q}{q}; b \right]$ и не выполняется на отрезке $\left[a; t^* - \frac{Q}{q} \right]$, следовательно:

$$F_{I_3}(Q) = \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^b pQ^* \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) \frac{2(b - \Delta\alpha)}{(b-a)(b-c)} d\Delta\alpha = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)}.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^b \left(\frac{Q}{q} + \Delta\alpha - t^* \right) (b - \Delta\alpha) d\Delta\alpha = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \left[\int_{t^* - \frac{Q}{q}}^b b \left(\frac{Q}{q} - t^* \right) d\Delta\alpha + \right. \\
& \left. + \int_{t^* - \frac{Q}{q}}^b \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha d\Delta\alpha - \int_{t^* - \alpha_0}^b \Delta\alpha^2 d\Delta\alpha \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \left[b \left(\frac{Q}{q} - \right. \right. \\
& \left. \left. - t^* \right) \Delta\alpha \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^b + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \Delta\alpha^2 \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^b - \frac{1}{3} \Delta\alpha^3 \Big|_{t^* - \frac{Q}{q}}^b \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \cdot \\
& \cdot \left[\left(b \frac{Q}{q} - bt^* \right) \left(b - t^* + \frac{Q}{q} \right) + \frac{1}{2} \left(t^* - \frac{Q}{q} + b \right) \left(b^2 - t^{*2} + 2t^* \frac{Q}{q} - \left(\frac{Q}{q} \right)^2 \right) - \frac{1}{3} \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left(b^3 - t^{*3} + 3t^{*2} \frac{Q}{q} - 3t^* \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + \left(\frac{Q}{q} \right)^3 \right) \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \left[b^2 \frac{Q}{q} - b \frac{Q}{q} t^* + \right. \\
& \left. + b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - b^2 t^* + bt^{*2} - b \frac{Q}{q} t^* + \frac{1}{2} b^2 t^* - \frac{1}{2} t^{*3} + \frac{Q}{q} t^{*2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* - \frac{1}{2} \frac{Q}{q} b^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{Q}{q} t^{*2} - \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 + \frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{2} bt^{*2} + b \frac{Q}{q} t^* - \frac{1}{2} b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 - \frac{1}{3} b^3 + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} t^{*3} - \frac{Q}{q} t^{*2} + \left(\frac{Q}{q} \right)^2 t^* - \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{q} \right)^3 \right] = \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6} t^{*3} + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} + b \right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot t^{*2} + \left(-\frac{1}{2} b^2 - b \frac{Q}{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{q} \right)^2 \right) t^* + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{Q}{q} \right)^3 + 3b \left(\frac{Q}{q} \right)^2 + 3b^2 \frac{Q}{q} + b^3 \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2pQ^*}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6}t^{*3} + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{q} + b\right)t^{*2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{q} + b\right)^2 t^* + \frac{1}{6}\left(\frac{Q}{q} + b\right)^3 \right] = \\
&= \frac{-pQ^*}{3(b-a)(b-c)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - b \right)^3.
\end{aligned}$$

Таким образом, в третьем случае формула (3.13) примет вид (3.16):

$$F_{I_3}(Q) = \frac{-pQ^*}{3(b-a)(b-c)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - b \right)^3. \quad (3.16)$$

В четвертом случае, при $b \leq t^* - \frac{Q}{q}$, или $Q \leq q(t^* - b)$, неравенство $t^* - \frac{Q}{q} < \Delta\alpha$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_I(Q)$ в области $(b; +\infty)$ не существует, а значит, примет вид (3.17):

$$F_{I_4}(Q) = 0. \quad (3.17)$$

Найдем математическое ожидание суммарных издержек в каждой из рассмотренных областей. Для этого сложим полученные формулы (3.9) и (3.14), (3.10) и (3.15), (3.11) и (3.16), (3.12) и (3.17).

Сложив формулы (3.9) и (3.14), получим выражение (3.18):

$$F_1(Q) = F_{D_1}(Q) + F_{I_1}(Q) = \frac{pQ^*}{3} \left(3\frac{Q}{q} + a + b + c - 3t^* \right). \quad (3.18)$$

Сложив формулы (3.10) и (3.15), получим выражение (3.19):

$$\begin{aligned}
F_2(Q) = F_{D_2}(Q) + F_{I_2}(Q) &= \frac{qz}{3(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^3 + \\
&+ \frac{pQ^*}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - c \right)^2 \left(t^* - \frac{Q}{q} - 3a + 2c \right) + \right. \\
&\quad \left. + (b-c) \left(3\frac{Q}{q} + b + 2c - 3t^* \right) \right]. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Сложив формулы (3.11) и (3.16), получим выражение (3.20):

$$\begin{aligned}
F_3(Q) = F_{D_3}(Q) + F_{I_3}(Q) &= \frac{qz}{3(b-a)} \left[(a-c) \left(3\frac{Q}{q} + a + 2c - 3t^* \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(b-c)} \left(\frac{Q}{q} + c - t^* \right)^2 \left(\frac{Q}{q} + 3b - 2c - t^* \right) \right] - \\
&\quad - \frac{pQ^*}{3(b-a)(b-c)} \left(t^* - \frac{Q}{q} - b \right)^3. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Сложив формулы (3.12) и (3.17), получим выражение (3.21):

$$F_4(Q) = F_{D_4}(Q) + F_{I_4}(Q) = \frac{qz}{3} \left(3t^* - a - b - c - 3\frac{Q}{q} \right). \tag{3.21}$$

Найдем минимум ожидаемых издержек в каждой из областей.

$F_1(Q) = \frac{pQ^*}{3} \left(3\frac{Q}{q} + a + b + c - 3t^* \right)$ - является линейной возрастающей функцией, а значит ее минимальное значение достигается на левом конце рассматриваемого множества, т.е. в точке $q(t^* - a)$. Значение функции $F_1(Q)$ в точке минимума представлено формулой (3.22):

$$\begin{aligned}
\min_{[q(t^*-a); +\infty]} F_1(Q) &= F_1(q(t^* - a)) = \frac{pQ^*}{3} (3(t^* - a) + a + b + c - 3t^*) \\
&= \frac{1}{3} pQ^* (b + c - 2a). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Отметим, что в силу того, что $a \leq c \leq b$, значение $\frac{1}{3}pQ^*(b+c-2a) \geq 0$.

Чтобы найти минимум $F_2(Q)$, возьмем производную функции (3.19) и приравняем ее к нулю. Обозначим $\alpha_0 = \frac{Q}{q}$, как и ранее, $K_1=qz$, $K_2=pQ^*$ тогда:

$$\frac{\partial F_2(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{q} \frac{\partial F_2(\alpha_0)}{\partial \alpha_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(\alpha_0)}{\partial \alpha_0} &= -\frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} 3(t^* - a - \alpha_0)^2 + \frac{K_2}{3(b-a)} \left[-\frac{1}{(c-a)} 2(t^* - \alpha_0 \right. \\ &\quad \left. -c)(t^* - \alpha_0 - 3a + 2c) - \frac{1}{(c-a)} (t^* - \alpha_0 - c)^2 + 3(b-c) \right] = \\ &= \frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (-t^{*2} + 2at^* + 2\alpha_0 t^* - 2a\alpha_0 - a^2 - \alpha_0^2) - \frac{2}{3} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2\alpha_0 t^* + ct^* - 3at^* + \alpha_0^2 - c\alpha_0 - 2c^2 + 3ac + \\ &\quad + 3a\alpha_0) - \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} \frac{1}{3} (t^{*2} - 2ct^* - 2\alpha_0 t^* + 2c\alpha_0 + c^2 + \alpha_0^2) + \\ &\quad + \frac{K_2}{(b-a)} (b-c) = -\frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2at^* - 2\alpha_0 t^* + 2a\alpha_0 + a^2 + \\ &\quad + \alpha_0^2) + \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (-t^{*2} + 2\alpha_0 t^* + c^2 - \alpha_0^2 + 2at^* - 2ac - 2a\alpha_0 - \\ &\quad - a^2 + a^2) + \frac{K_2}{(b-a)} (b-c) = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} (t^{*2} - 2at^* - 2\alpha_0 t^* + a^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2a\alpha_0 + \alpha_0^2) - \frac{K_2}{(b-a)(c-a)}(a^2 - 2ac + c^2) - \frac{K_2}{(b-a)}(b-c) = \\
& = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(t^{*2} - 2t^*(a + \alpha_0) + (a + \alpha_0)^2) + \\
& + \frac{-K_2c + K_2a - K_2b + K_2c}{(b-a)} = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(t^* - a - \alpha_0)^2 - \frac{K_2(b-a)}{(b-a)} = \\
& = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha_0 - a - t^*)^2 - K_2.
\end{aligned}$$

Получаем формулу (3.23):

$$\frac{\partial F_2(Q)}{\partial Q} = -\frac{1}{q} \left(\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)}(t^* - a - \alpha_0)^2 - K_2 \right). \quad (3.23)$$

Приравняем выражение (3.23) к нулю:

$$\frac{\partial F_2(Q)}{\partial Q} = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^2 - K_2 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^2 = K_2;$$

$$\left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^2 = \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)};$$

$$t^* - a - \frac{Q}{q} = \pm \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$Q_{1,2} = -qa + qt^* \pm q \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}.$$

График функции $-\frac{1}{q} \left(\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)} \left(t^* - a - \frac{Q}{q} \right)^2 - K_2 \right)$ есть парабола, ветви которой имеют отрицательную ориентацию, т.к. $-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)} < 0$.

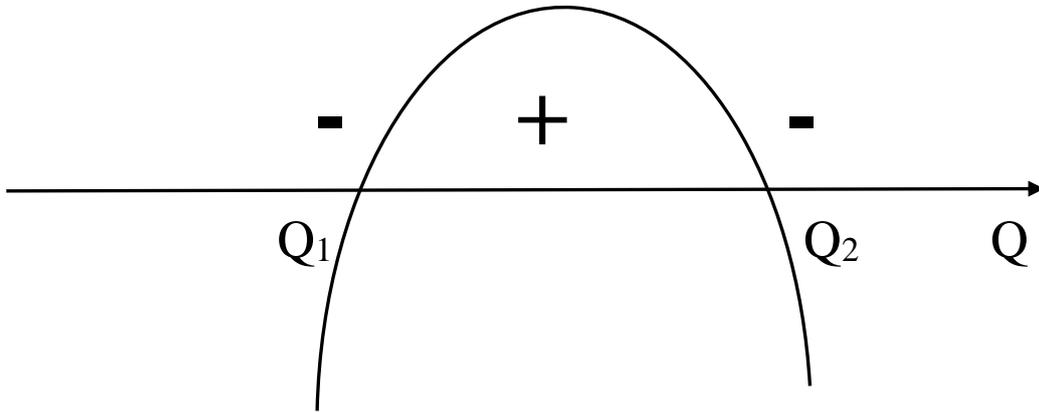


Рисунок 3.1 - Схематичное изображение графика функции $F_2'(Q)$
 Источник: составлено автором

Из рисунка 3.1 видно, что производная $F_2'(Q)$ меняет знак с минуса на плюс в точке Q_1 , а следовательно, эта точка может быть кандидатом на точку минимума. Точка Q_1 имеет следующий вид (3.24):

$$Q_1 = -qa + qt^* - q \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} \quad (3.24)$$

Рассмотрим расположение точек Q_1 и Q_2 относительно рассматриваемого в случае 2 отрезка, а именно $q(t^* - c) \leq Q \leq q(t^* - a)$. Поскольку очевидно, что $q(t^* - a) \leq Q_2$, а $Q_1 \leq q(t^* - a)$, то возможно всего 2 значимых случая, а именно:

Случай 2.1 $q(t^* - c) \leq Q_1$.

Это неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{K_2(b-a)}{(K_1+K_2)} \leq c-a$$

которое в свою очередь равносильно неравенству:

$$\frac{K_1}{K_2} \geq \frac{b-c}{c-a}$$

В этом случае, учитывая знаки производной, точка Q_1 является точкой минимума функции $F_2(Q)$ на рассматриваемом отрезке. Найдем значение функции $F_2(Q_1)$ в точке минимума, для этого подставим (3.24) в (3.19):

$$\begin{aligned} F_2(Q_1) &= \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(a + \frac{Q}{q} + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - a - \frac{Q}{q} \right)^3 + \\ &+ \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} \left(a + \frac{Q}{q} + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - \frac{Q}{q} - c \right)^2 \left(a + \frac{Q}{q} - \frac{Q}{q} - \right. \\ &\left. - 3a + 2c + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2(b-c)}{3(b-a)} \left(3\frac{Q}{q} + b + 2c - 3a - 3\frac{Q}{q} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \Bigg) = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} ((a-c)^2 + 2(a-c)) \cdot \\
& \cdot \left(\sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \right) (-2a + 2c + \\
& + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \Bigg) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \Bigg) = \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \left(\sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} ((c-a)^2 - 2(c-a)) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} \cdot \\
& \cdot \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} = \\
& = \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} ((c-a) - 2 \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_2^2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \left((2(c-a) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - \right. \\
& \left. - 2c^2 - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) \right) = \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} \left(2(c-a)^2 - 3(c-a) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \right) + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_2^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \\
& + \frac{K_2}{3(b-a)} \left(b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 + 3(c-b) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(K_1 K_2 + K_2^2)}{3(K_1 + K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)} + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1 + K_2)} + \frac{K_2}{3(b-a)}(2c^2 - 4ac +} \\
&+ 2a^2 - 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} + 3a \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} + b^2 + bc - 3ab + \\
&+ 3ac - 2c^2 + 3c \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}}) - \frac{2K_2}{3(b-a)} \cdot \\
&\cdot \frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)} = \frac{K_2(K_1 + K_2)}{3(K_1 + K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)} + \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1 + K_2)}} - \\
&- \frac{2K_2^2(c-a)}{3(K_1 + K_2)} + \frac{K_2(b-a)c}{3(b-a)} + \frac{K_2(b-a)(-3)}{3(b-a)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} + \\
&+ \frac{K_2}{3(b-a)}(2a^2 - 3ab + b^2) = \frac{K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} + \frac{K_2 c}{3} - K_2 \cdot \\
&\cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)}(b-a)(b-2a) = \frac{K_2 c}{3} + \frac{K_2 b}{3} - \frac{2K_2 a}{3} - \\
&- \frac{2K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} = \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_2(Q)$ на рассматриваемом в случае 2 отрезке, представлено формулой (3.25):

$$\begin{aligned}
& \min_{[q(t^*-c); q(t^*-a)]} F_2(Q) = \\
& = \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} \right). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Отметим, что из представления выражения (3.25) в виде

$$\frac{K_2}{3} \left((\sqrt{b-a} - \sqrt{c-a})^2 + 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1 + K_2)}} \right)$$

следует его неотрицательность.

Случай 2.2 $Q_1 < q(t^* - c)$.

Это неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{K_2(b-a)}{(K_1 + K_2)} > c - a$$

, которое в свою очередь равносильно неравенству:

$$\frac{K_1}{K_2} < \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае, учитывая знаки производной, точка $q(t^* - c)$ является минимумом функции $F_2(Q)$ на рассматриваемом отрезке. Найдем значение функции $F_2(q(t^* - c))$ в точке минимума, для этого подставим $q(t^* - c)$ в (3.19):

$$\min_{[q(t^*-c); q(t^*-a)]} F_2(Q) = \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}.$$

Чтобы найти минимум $F_3(Q)$, возьмем производную функции (3.20) и приравняем ее к нулю.

$$\frac{\partial F_3(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{q} \frac{\partial F_3(\alpha_0)}{\partial \alpha_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3(\alpha_0)}{\partial \alpha_0} &= \frac{K_1}{3(b-a)} \left[(a-c)(-3) + \frac{1}{(b-c)} (-2)(\alpha_0 + c - t^*)(\alpha_0 + 3b - \right. \\ &\quad \left. - 2c - t^*) + \frac{1}{(b-c)} (\alpha_0 + c - t^*)^2 (-1) \right] - \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} 3(t^* - \alpha_0 - \\ &\quad - b)^2 = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{2K_1}{3(b-a)(b-c)} (\alpha_0^2 + 3\alpha_0 b - 2\alpha_0 c - \alpha_0 t^* + \alpha_0 c + \\ &\quad + 3bc - 2c^2 - ct^* - \alpha_0 t^* - 3bt^* + 2ct^* + t^{*2}) - \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} (t^{*2} - \\ &\quad - ct^* - \alpha_0 t^* - ct^* + c^2 + \alpha_0 c - \alpha_0 t^* + \alpha_0 c + \alpha_0^2) - \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} (t^{*2} - \\ &\quad - 2bt^* - 2\alpha_0 t^* + b^2 + 2b\alpha_0 + \alpha_0^2) = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} (t^{*2} + \\ &\quad + 2b\alpha_0 - 2\alpha_0 t^* + 2bc - c^2 - 2bt^* + \alpha_0^2 + b^2 - b^2) - \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} \cdot \\ &\quad \cdot (t^{*2} - 2bt^* - 2\alpha_0 t^* + b^2 + 2b\alpha_0 + \alpha_0^2) = \frac{K_1(c-a)}{(b-a)} - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} \cdot \\ &\quad \cdot (t^{*2} - 2t^*(b + \alpha_0) + (b + \alpha_0)^2) + \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} (b-c)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K_1 c - K_1 a + K_1 b - K_1 c}{(b-a)} - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2 = \\
&= K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (t^* - b - \alpha_0)^2.
\end{aligned}$$

Получаем формулу (3.26):

$$\frac{\partial F_3(Q)}{\partial Q} = -\frac{1}{q} \left[K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} \left(t^* - b - \frac{Q}{q} \right)^2 \right]. \quad (3.26)$$

Приравняем выражение (3.26) к нулю:

$$\frac{\partial F_3(Q)}{\partial Q} = 0;$$

$$K_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} \left(t^* - b - \frac{Q}{q} \right)^2 = 0;$$

$$\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} \left(t^* - b - \frac{Q}{q} \right)^2 = K_1;$$

$$\left(t^* - b - \frac{Q}{q} \right)^2 = \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)};$$

$$t^* - b - \frac{Q}{q} = \pm \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1 + K_2)}};$$

$$Q_{1,2} = qt^* - qb \pm q \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}.$$

Графиком функции $-\frac{1}{q} \left[K_1 - \frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} \left(t^* - b - \frac{Q}{q} \right)^2 \right]$ является парабола, ветви которой направлены вверх, т.к. $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)} > 0$.

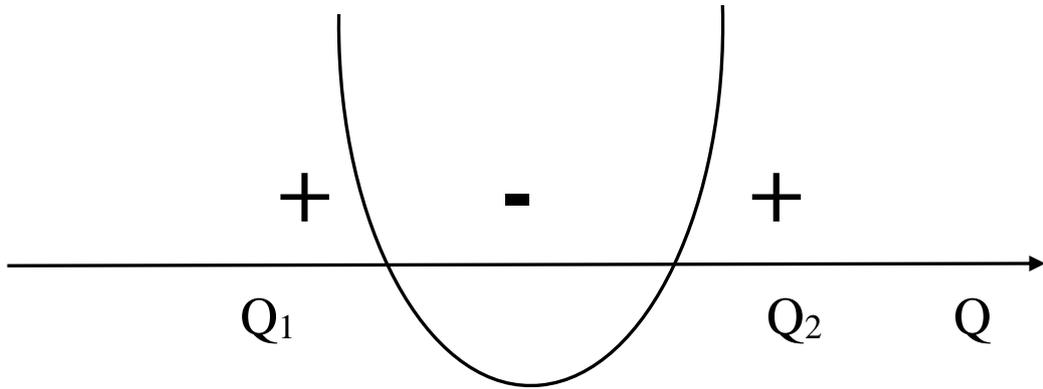


Рисунок 3.2 - Схематичное изображение графика функции $F_3'(Q)$
Источник: составлено автором

Из рисунка 3.2 видно, что производная $F_3'(Q)$ меняет знак с минуса на плюс в точке Q_2 , а следовательно, эта точка может являться кандидатом на точку минимума. Точка Q_2 имеет следующий вид (3.27):

$$Q_2 = qt^* - qb + q \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}. \quad (3.27)$$

Рассмотрим расположение точек Q_1 и Q_2 относительно рассматриваемого в случае 3 отрезка, а именно $q(t^* - b) \leq Q \leq q(t^* - c)$. Поскольку очевидно, что $q(t^* - b) \leq Q_2$, а $Q_1 \leq q(t^* - b)$, то возможно всего 2 значимых случая, а именно:
Случай 3.1 $Q_2 \leq q(t^* - c)$.

Это неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{K_2(b-a)}{(K_1+K_2)} \leq b-c$$

, которое в свою очередь равносильно неравенству:

$$\frac{K_1}{K_2} \leq \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае, учитывая знаки производной, точка Q_2 является минимумом функции $F_3(Q)$ на рассматриваемом отрезке. Найдем значение функции $F_3(Q)$ в точке минимума, для этого подставим (3.27) в (3.20):

$$\begin{aligned} F_3(Q_2) &= \frac{K_1}{3(b-a)} [(a-c)(3\alpha_0 + a + 2c - 3b - 3\alpha_0 + 3 \cdot \\ &\cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{1}{(b-c)} \left(\alpha_0 + c - b - \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \left(\alpha_0 + 3b - 2c - b - \alpha_0 + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right)] - \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} \cdot \\ &\cdot \left(b + \alpha_0 - \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - \alpha_0 - b \right)^3 = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 - ac + 2ac - \\ &- 2c^2 - 3ab + 3bc + 3a \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} \left((c-b)^2 + 2(c-b) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)} \right) \left(2b - 2c + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) + \\
& + \frac{K_1 K_2 (b-a)(b-c)}{3(b-a)(b-c)(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + ac - \\
& - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3a \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \\
& + \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} \left((b-c)^2 - 2(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) (2(b-c) + \\
& \quad + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1 K_1 (b-a)(b-c)}{3(K_1+K_2)(b-a)(b-c)} (2(b-c) + \\
& + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + \\
& + ac - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3(a-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (2(b-c)^2 - 3(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 2 \frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}) + \\
& + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3(b-a)} (a^2 + ac - 2c^2 + 3bc - 3ab + 3(a-c) \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + 2b^2 - 4bc + 2c^2 - 3(b-c) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - \\
& - \frac{2K_1K_1(b-a)(b-c)}{3(b-a)(K_1+K_2)} + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{(K_1^2 + K_1K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \\
& = \frac{K_1(a-b)c}{3(b-a)} + \frac{3K_1(a-b)}{3(b-a)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)} ((a^2 - 3ab + \\
& + 2b^2) - \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{2K_1^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1(K_1+K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \\
& = -\frac{K_1c}{3} - K_1 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1(b-a)(2b-a)}{3(b-a)} + \frac{K_1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1}{3} \cdot \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right).$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_3(Q)$, представлено формулой (3.28):

$$\begin{aligned} & \min_{[q(t^*-b); q(t^*-c)]} F_3(Q_2) = \\ & = \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Отметим, что из представления выражения (3.28) в виде

$$\frac{K_2}{3} \left((\sqrt{b-a} - \sqrt{b-c})^2 + 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right)$$

следует его неотрицательность.

Случай 3.2 $Q_2 > q(t^* - c)$.

Это неравенство равносильно следующему неравенству

$$\frac{K_2(b-a)}{(K_1+K_2)} > b-c$$

, которое в свою очередь равносильно неравенству:

$$\frac{K_1}{K_2} < \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае, учитывая знаки производной, точка $q(t^* - c)$ является минимумом функции $F_3(Q)$ на рассматриваемом отрезке. Найдем значение функции $F_3(q(t^* - c))$ в точке минимума, для этого подставим $q(t^* - c)$ в (3.20):

$$\min_{[q(t^*-b); q(t^*-c)]} F_3(Q) = \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}.$$

$F_4(Q) = \frac{K_1}{3} \left(3t^* - a - b - c - 3\frac{Q}{q} \right)$ - линейная убывающая функция, значит, минимальное значение достигается на правом конце отрезка $(-\infty; q(t^* - b)]$, следовательно, в точке $Q = q(t^* - b)$. Минимальное значение функции $F_4(Q)$, представлено формулой (3.29):

$$\begin{aligned} \min_{[-\infty; q(t^*-b)]} F_4(Q) &= \frac{K_1}{3} (3b + 3\alpha_0 - a - b - c - 3\alpha_0) \\ &= \frac{K_1}{3} (2b - a - c). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Отметим, что в силу того, что $a \leq c \leq b$, справедливо

$$\frac{K_1}{3} (2b - a - c) \geq 0.$$

Для получения итогового результата необходимо рассмотреть 4 случая соотношения параметров a, b, c, K_1, K_2 . А именно:

Случай 1.

$$\frac{K_1}{K_2} \geq \frac{b-c}{c-a} \text{ и } \frac{K_1}{K_2} \geq \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае

$$\min_Q F(Q) =$$

$$\min \left\{ \frac{1}{3} K_2 (b + c - 2a), \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2 (b - a)(c - a)}{(K_1 + K_2)}} \right), \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1 (b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)}} \right), \frac{K_1}{3} (2b - a - c) \right\}$$

Сравним первые два выражения в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} & \frac{K_2}{3} (b + c - 2a) - \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2 (b - a)(c - a)}{(K_1 + K_2)}} \right) = \\ & = \frac{2K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2 (b - a)(c - a)}{(K_1 + K_2)}} > 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что первое из выражений можно исключить из рассмотрения.

Аналогично сравним третье и четвертое выражения в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} & \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1 (b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)}} \right) - \frac{K_1}{3} (2b - a - c) = \\ & = -\frac{2K_1}{3} \sqrt{\frac{K_1 (b - a)(b - c)}{(K_1 + K_2)}} < 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что четвертое выражение можно исключить из рассмотрения.

Таким, образом:

$$\min_Q F(Q) =$$

$$\min \left\{ \frac{K_2}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right), \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) \right\}. \quad (3.30)$$

Значение оптимальной точки будет соответственно выбираться из множества

$$\left\{ -qa + qt^* - q \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}, \quad qt^* - qb + q \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right\}$$

в зависимости от выбора минимального из выражений в (3.30).

Случай 2.

$$\frac{K_1}{K_2} \geq \frac{b-c}{c-a} \text{ и } \frac{K_1}{K_2} < \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае

$$\min_Q F(Q) = \min \left\{ \frac{1}{3} K_2 (b+c-2a), \frac{K_2}{3} \left(b+c-2a-2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right), \frac{K_1(c-a)^2+K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} (2b-a-c) \right\}.$$

Согласно рассуждениям для случая 1, первое выражение можно исключить из рассмотрения. Таким образом:

$$\min_Q F(Q) = \min \left\{ \frac{K_2}{3} \left(b+c-2a-2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right), \frac{K_1(c-a)^2+K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} (2b-a-c) \right\} \quad (3.31)$$

Значение оптимальной точки буде соответственно выбираться из множества

$$\left\{ -qa + qt^* - q \sqrt{\frac{K_2(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}, q(t^* - c), q(t^* - c) \right\}$$

в зависимости от выбора минимального из выражений в (3.31).

Случай 3.

$$\frac{K_1}{K_2} < \frac{b-c}{c-a} \text{ и } \frac{K_1}{K_2} \geq \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае

$$\min_Q F(Q) =$$

$$\min \left\{ \frac{1}{3} K_2(b+c-2a), \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right), \frac{K_1}{3} (2b-a-c) \right\}.$$

Согласно рассуждениям для случая 1, четвертое выражение можно исключить из рассмотрения. Таким образом:

$$\min_Q F(Q) =$$

$$\min \left\{ \frac{1}{3} K_2(b+c-2a), \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} \left(2b-a-c-2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) \right\} \quad (3.32)$$

Значение оптимальной точки буде соответственно выбираться из множества

$$\left\{ q(t^* - a), q(t^* - c), qt^* - qb + q \sqrt{\frac{K_1(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right\}$$

в зависимости от выбора минимального из выражений в (3.32).

Случай 4.

$$\frac{K_1}{K_2} < \frac{b-c}{c-a} \text{ и } \frac{K_1}{K_2} < \frac{c-a}{b-c}$$

В этом случае

$$\min_Q F(Q) = \min \left\{ \frac{1}{3} K_2 (b+c-2a), \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} (2b-a-c) \right\}.$$

Исключая одинаковые выражения, получаем:

$$\min_Q F(Q) = \min \left\{ \frac{1}{3} K_2 (b+c-2a), \frac{K_1(c-a)^2 + K_2(b-c)^2}{3(b-a)}, \frac{K_1}{3} (2b-a-c) \right\} \quad (3.33)$$

Значение оптимальной точки будет соответственно выбираться из множества

$$\{q(t^* - a), q(t^* - c), q(t^* - b)\}$$

в зависимости от выбора минимального из выражений в (3.33).

Разработанная стохастическая модель, учитывающая неопределенность спроса и соответствующая ей оптимизационная задача по критерию минимизации математического ожидания интегральных дополнительных издержек в качестве результата определяют размер новой партии товара при известном времени поставки.

При предположении о треугольном распределении случайных отклонений фактического спроса от прогнозируемого было получено аналитическое решение задачи, выраженное соотношением (3.30) – (3.33).

Результат, а именно вид аналитического выражения и его содержание, зависят от входных параметров модели, а именно q – оценка среднесуточного количества реализации товара, α_0 - прогнозируемое время обнуления запаса товара, p - цена удельных складских издержек единичного объема товара, z - удельная прибыль от реализации товара, Q^* – объем партии товара, которая прибудет после реализации завезенного товара в объеме Q , t^* – время доставки товара, а также параметров треугольного распределения a , b , c случайной величины Δt , представляющая разницу между фактическим временем доставки и договорным.

3.2 Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности времени поставки по критерию минимизации дополнительных издержек

Рассмотрим стохастическую модель с неопределенностью реального времени прихода товара на склад. В большинстве случаев данную неопределенность нельзя полностью ликвидировать, а возможно лишь уменьшить, даже если грамотно спланировать весь процесс поставки. Основные результаты данного параграфа опубликованы автором в работах [60], [62].

В данной модели предположим, что спрос детерминирован, т.е. что момент окончания товара α точно может быть рассчитан. Такая ситуация характерна для случаев отпуска товара по предварительно согласованным графикам. Однако предполагаем, что существует неопределенность момента поставки товара. Пусть неопределенность времени доставки товара на склад x , выражена соотношением (3.34):

$$x = t^* + \Delta t, \quad (3.34)$$

где t^* - время заказа поставки товара; Δt - случайная величина отклонения фактического момента доставки от назначенного.

Будем считать, что случайная величина Δt распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – определяются из статистических данных, либо с помощью оценок экспертов, при соблюдении следующего условия: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел, b - верхний предел, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В частном случае $a = c$ или $c = b$ треугольное распределение строится по двум точкам. Тогда время реального прихода товара x имеет также треугольное распределение случайной величины на отрезке $[t^* + a, t^* + b]$ (рисунок 2.4).

В качестве целевой функции рассмотрим, как и в модели параграфа 2.1, интегральные дополнительные издержки, возникающие в результате расхождений момента завоза и момента обнуления товара на складе.

Дополнительные складские затраты пребывания объема Q в течении промежутка времени от доставки x и до фактического окончания товара α , в случае, когда прибытие товара на склад было реализовано до времени $x (x < \alpha)$ выражаются соотношением (3.35):

$$I = pQ(\alpha - x), \quad (3.35)$$

где $p = const$ - цена удельных складских издержек единичного объема товара.

Издержки дефицита товара от момента времени фактического обнуления товара α и до времени доставки товара x в объеме Q , в случае, когда поставка товара произошла позже срока $x (x > \alpha)$, составят, согласно формуле (3.36):

$$D = qz(x - \alpha), \quad (3.36)$$

где $z = const$ -прибыль от продажи единицы продукции, q -средний суточный объем продаваемого товара.

Суммарный объем дополнительных затрат, возникающих в следствие несвоевременности завоза можно выразить соотношением (3.37):

$$I + D = \begin{cases} pQ(\alpha - x), & x < \alpha; \\ qz(x - \alpha), & x > \alpha. \end{cases} \quad (3.37)$$

Общая графическая схема рассматриваемой задачи представлена на рис. 3.3.

В качестве целевой функции интегральных дополнительных издержек примем их математическое ожидание, поскольку суммарные издержки являются случайными.

Пусть в рассматриваемой модели неопределенность доставки выражается случайной величиной Δt , которая распределена согласно треугольному закону распределения с плотностью, выраженной соотношением (2.36).

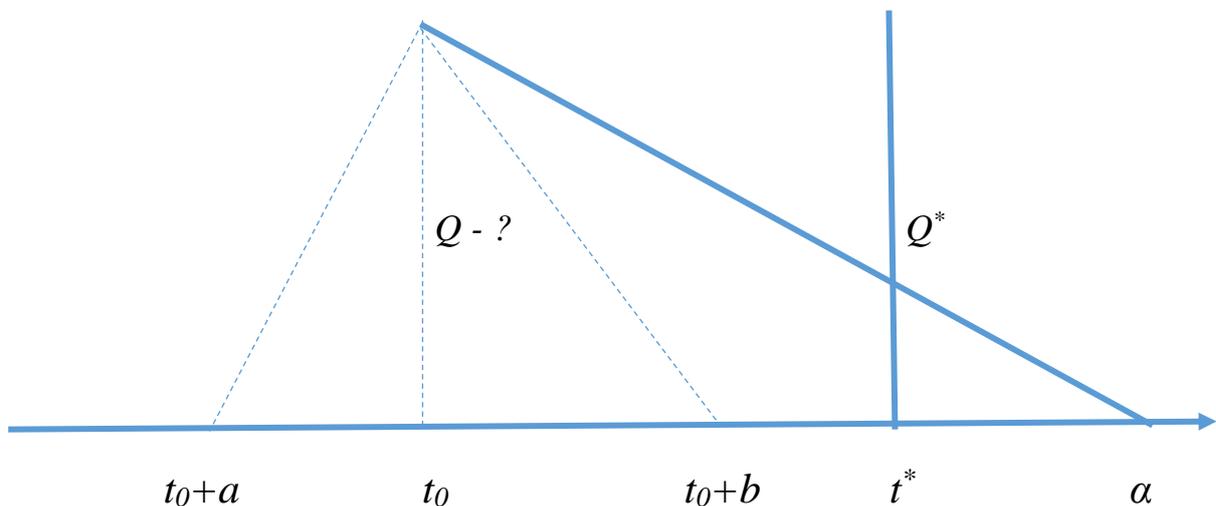


Рисунок 3.3 - Общая схема задачи определения объема поставки с учетом неопределенности момента доставки
Источник: составлено автором

Рассмотрим несколько диапазонов для поиска оптимального значения переменной Q . А именно, случаи 1 – 4, исследованные ниже:

Случай 1.

$\alpha \leq t^*$, или $t_0 + \frac{Q}{q} + b \leq t^*$, или $0 \leq Q \leq q(t^* - t_0 - b)$. Графически этот случай представлен на рис. 3.4. В этом случае возможны только издержки дефицита, математическое ожидание которых представляется формулой (3.38).

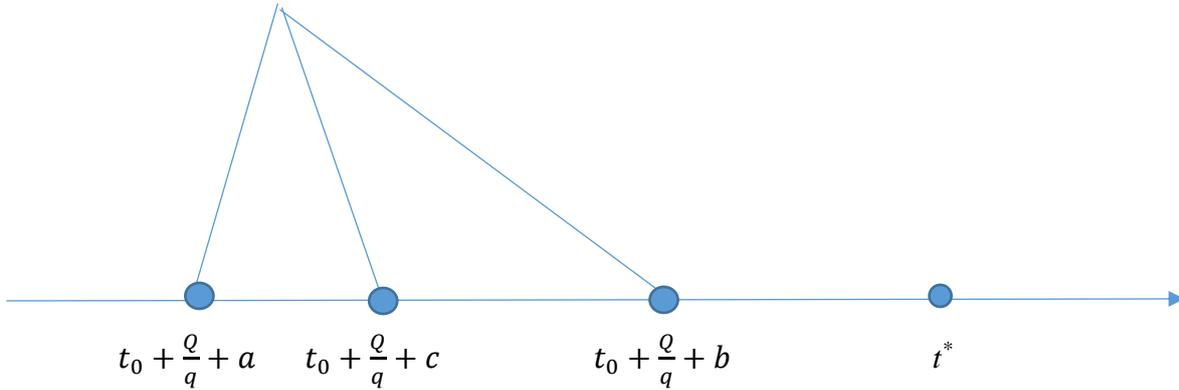


Рисунок 3.4 - Графическая схема случая 1

Источник: составлено автором

$$F(Q) = \int_{\alpha}^b qz \left(t^* - t_0 - \frac{Q}{q} - \Delta t \right) \rho(\Delta t) d\Delta t \quad (3.38)$$

В результате вычисления интеграла (3.38), получаем вид функции $F(Q)$ для случая 1, а именно:

$$F(Q) = qz \left(\left(t^* - t_0 - \frac{Q}{q} \right) - \frac{1}{3}(b - a) \right) \quad (3.39)$$

Таким образом математически формализованная задача минимизации интегральных дополнительных затрат, возникающая в процессе управления запасами, представленная соотношением (3.40), заключается в нахождении размера поставки Q , которому соответствует минимальное математическое ожидание суммарных дополнительных издержек.

$$F(Q) \rightarrow \min_Q. \quad (3.40)$$

Как видно из выражения (3.39) функция $F(Q)$ является линейной убывающей функцией, а следовательно, достигает своего минимума на правом конце рассматриваемого отрезка, то есть в точке, представленной выражением (3.41). Значение функции в этой точке представлено выражением (3.42).

$$Q_{\min 1}^* = q(t^* - t_0 - b) \quad (3.41)$$

$$F_{\min 1}^* = qz\left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a\right) \quad (3.42)$$

Случай 2.

$t_0 + \frac{Q}{q} + c \leq t^* \leq t_0 + \frac{Q}{q} + b$ или $q(t^* - t_0 - b) \leq Q \leq q(t^* - t_0 - c)$. Графически этот случай представлен на рис. 3.5. В этом случае возможны как издержки дефицита, так и издержки хранения, суммарное математическое ожидание которых представляется формулой (3.43).

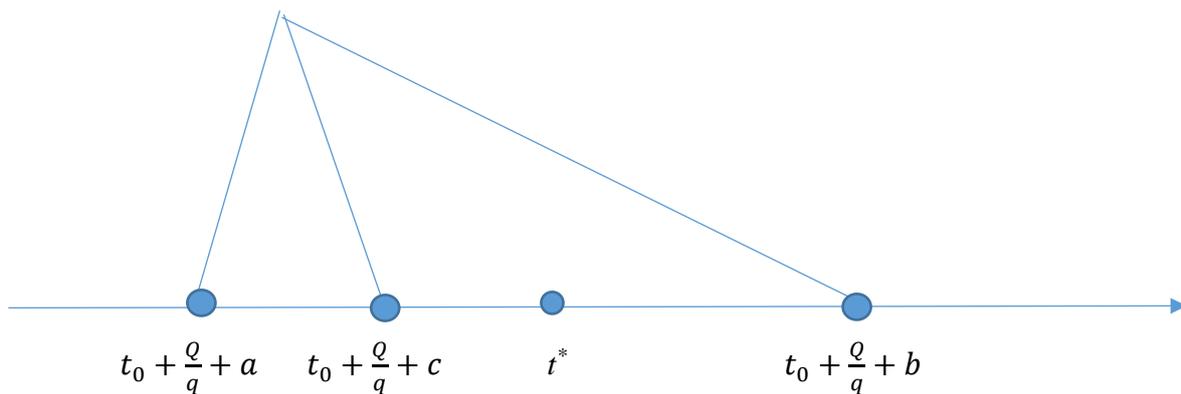


Рисунок 3.5 - Графическая схема случая 2

Источник: составлено автором

Для упрощения дальнейших выкладок сделаем замену переменных, а именно: $T = t^* - t_0 - \frac{Q}{q}$. При этом допустимый диапазон новой переменной в случае 2 представляется как $c \leq T \leq b$. Тогда с учетом данной замены и выражений (3.37) имеем:

$$\begin{aligned}
 F(T) = & \int_{\alpha}^c qz(T - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t + \\
 & + \int_{\alpha}^T qz(T - \Delta t) \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t - \\
 & - \int_T^b pQ^*(T - \Delta t) \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t.
 \end{aligned}$$

Для упрощения записи дальнейших выражений введем обозначение двух новых констант, а именно:

$$K_1 = \frac{2qz}{(b - a)(c - a)} \text{ и } K_2 = \frac{2pQ}{(b - a)(b - c)}.$$

С учетом замены $F(T) = K_1 \int_{\alpha}^c (T - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t +$

$$K_1 \int_{\alpha}^T (T - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t - K_2 \int_T^b (T - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t. \quad (3.43)$$

Для нахождения точек минимума функции (3.43) необходимо найти ее производную. Поскольку параметр T входит как в подынтегральные функции, так и в выражения нижнего и верхнего пределов интегрирования, воспользуемся известной формулой Лейбница [34, с. 218], которая имеет следующий вид:

Пусть

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} f(x, \alpha) dx$$

, тогда

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(x_2(\alpha), \alpha) \frac{dx_2(\alpha)}{d\alpha} - f(x_1(\alpha), \alpha) \frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha} \quad (3.44)$$

Используя формулу (3.44) для вычисления производной функции (3.43) получим:

$$\frac{dF(T)}{dT} = K_1 \int_a^c (\Delta t - a) d\Delta t + K_1 \int_a^T (b - \Delta t) d\Delta t - K_2 \int_T^b (b - \Delta t) d\Delta t \quad (3.45)$$

Вычисление интеграла (3.45) приводит нас к следующему соотношению (3.46):

$$\begin{aligned} \frac{dF(T)}{dT} = & -\frac{(K_1 + K_2)}{2} T^2 + b(K_1 + K_2)T \\ & + \left(\frac{1}{2} (K_1 a^2 - K_2 b^2) - K_1 c(a + b - c) \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Заметим, что производная является параболой с отрицательным главным коэффициентом, то есть параболой с ветвями вниз. Далее найдем корни уравнения $\frac{dF(T)}{dT} = 0$, которое преобразуем к виду

$$(T - b)^2 = P, \quad (3.47)$$

где константой P обозначим следующее выражение:

$$P = \frac{-2K_1c(a+b-c) + K_1(a^2 - b^2) - 2K_2b^2}{K_1 + K_2}.$$

Очевидно, что в случае $P < 0$, уравнение (3.47) не имеет корней, в случае $P = 0$, имеет единственный корень $T = b$, а в случае $P > 0$, имеет два различных корня, а именно: $T_1 = b - \sqrt{P}$ и $T_2 = b + \sqrt{P}$. Далее рассмотрим различные случаи, которые определяются взаимным расположением границ рассматриваемого интервала и корней T_1 и T_2 . Отметим, что $T_1 < b < T_2$. В каждом из этих случаев определим точку минимума для функции $F(T)$ на рассматриваемом отрезке $c \leq T \leq b$ и значение минимизируемой функции в точке минимума. Используя формулу Лейбница, мы вычислили производную функции $F(T)$ без явного вычисления этой функции из выражения (3.43), однако сделаем это сейчас, поскольку далее будем вычислять значения минимумов функции $F(T)$.

$$\begin{aligned} F(T) = & K_1 \left(-\frac{(c^3 - a^3)}{3} + (T + a) \frac{(c^2 - a^2)}{2} - aT(c - a) \right) + \\ & + K_1 \left(\frac{(T^3 - c^3)}{3} - (T + b) \frac{(T^2 - c^2)}{2} + bT(T - c) \right) - \\ & - K_2 \left(\frac{(b^3 - T^3)}{3} - (T + b) \frac{(b^2 - T^2)}{2} + bT(b - T) \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Случай 2.1 $P \leq 0$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.47) либо не имеет корней, либо имеет единственный корень на правом конце отрезка в точке b . Тогда производная функции $F(T)$ на всем отрезке $[c, b]$ является неположительной, а следовательно, функция $F(T)$ является невозрастающей на всем отрезке, а следовательно ее минимум достигается на правом конце отрезка в точке b . То есть:

$$T_{\min 2.1}^* = b, \quad Q_{\min 2.1}^* = q(t^* - t_0 - b), \quad F_{\min 2.1}^* = F(b). \quad (3.49)$$

Случай 2.2 $P > 0, c \leq T_1 < b < T_2$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.47) имеет два различных корня, а именно: $T_1 = b - \sqrt{P}$ и $T_2 = b + \sqrt{P}$, а в силу их взаимного расположения с параметрами c и b , производная функции $F(T)$ отрезке $[c, T_1]$ является отрицательной, а следовательно, функция $F(T)$ является убывающей на этом отрезке. Производная функции $F(T)$ отрезке $[T_1, b]$ является положительной, а следовательно, функция $F(T)$ является возрастающей на этом отрезке. Из вышесказанного следует, что минимум функции в этом случае может достигаться только в точке T_1 . То есть:

$$T_{\min 2.2}^* = T_1, \quad Q_{\min 2.2}^* = q(t^* - t_0 - T_1), \quad F_{\min 2.2}^* = F(T_1) \quad (3.50)$$

Случай 2.3 $P > 0, T_1 \leq c < b < T_2$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.47) имеет два различных корня, а именно: $T_1 = b - \sqrt{P}$ и $T_2 = b + \sqrt{P}$, а в силу их взаимного расположения с параметрами c и b , производная функции $F(T)$ отрезке $[c, b]$ является положительной, а следовательно, функция $F(T)$ является возрастающей на этом отрезке. Откуда следует, что минимум функции в этом случае может достигаться только в точке c . То есть:

$$T_{\min 2.3}^* = c, \quad Q_{\min 2.3}^* = q(t^* - t_0 - c), \quad F_{\min 2.3}^* = F(c) \quad (3.51)$$

Таким образом, для случая 2 решение по функционалу будет определяться одним из значений $F_{\min 2.1}^*$, $F_{\min 2.2}^*$ или $F_{\min 2.3}^*$, в зависимости от соотношения параметров, обозначим его как $F_{\min 2}^*$. Оптимальный объем заказа будет определяться соответствующим значением $Q_{\min 2.1}^*$, $Q_{\min 2.2}^*$ или $Q_{\min 2.3}^*$, обозначим его как $Q_{\min 2}^*$.

Таким образом, случай 2 рассмотрен нами полностью. Перейдем теперь к рассмотрению случая 3.

Случай 3.

$t_0 + \frac{Q}{q} + a \leq t^* \leq t_0 + \frac{Q}{q} + c$ или $q(t^* - t_0 - c) \leq Q \leq q(t^* - t_0 - a)$. Графически этот случай представлен на рис. 3.6. В этом случае возможны как издержки дефицита, так и издержки хранения, суммарное математическое ожидание которых представляется формулой (3.44).

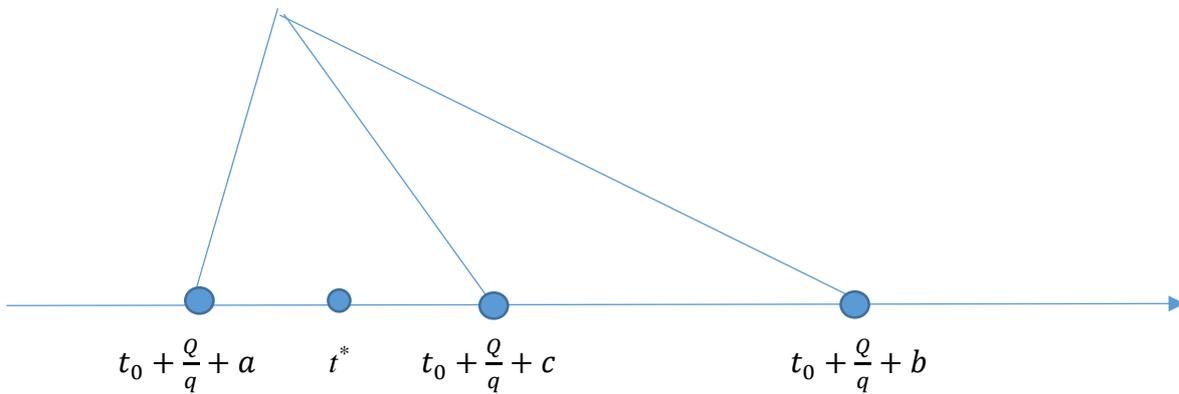


Рисунок 3.6 - Графическая схема случая 3

Источник: составлено автором

Как и в случае 2, для упрощения дальнейших выкладок будем использовать замену переменных: $T = t^* - t_0 - \frac{Q}{q}$. При этом допустимый диапазон новой переменной в случае 3 представляется как $a \leq T \leq c$. Тогда с учетом данной замены и выражений (3.37) имеем:

$$F(T) = \int_a^T qz(T - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t -$$

$$- \int_T^c pQ^*(T - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t -$$

$$- \int_c^b pQ^*(T - \Delta t) \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(c - a)} d\Delta t.$$

Для упрощения записи дальнейших выражений введем будем использовать те же константы K_1 и K_2 , что и в случае 2.

$$\begin{aligned} \text{С учетом замены } F(T) = & K_1 \int_a^T (T - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t - \\ & - K_2 \int_T^c (T - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t - K_2 \int_c^b (T - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Для нахождения точек минимума функции (3.52) необходимо найти ее производную. Поскольку параметр T входит как в подынтегральные функции, так и в выражения нижнего и верхнего пределов интегрирования, как и в случае 2, воспользуемся известной формулой Лейбница, общий вид которой был представлен выше выражением (3.44).

Используя формулу (3.44) для вычисления производной функции (3.52) получим:

$$\frac{dF(T)}{dT} = K_1 \int_a^T (\Delta t - a) d\Delta t - K_2 \int_T^c (\Delta t - a) d\Delta t - K_2 \int_c^b (b - \Delta t) d\Delta t \quad (3.53)$$

Вычисление интеграла (3.53) приводит нас к следующему соотношению (3.54):

$$\begin{aligned} \frac{dF(T)}{dT} = & \frac{(K_1 + K_2)}{2} T^2 - a(K_1 + K_2)T \\ & + \left(\frac{1}{2}(K_1 a^2 - K_2 b^2) + K_2 c(a + b - c) \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Заметим, что производная является параболой с положительным главным коэффициентом, то есть параболой с ветвями вверх. Далее найдем корни уравнения $\frac{dF(T)}{dT} = 0$, которое преобразуем к виду

$$(T - a)^2 = P, \quad (3.55)$$

где константой P обозначим следующее выражение:

$$P = \frac{-2K_2c(a + b - c) + K_2(a^2 + b^2)}{K_1 + K_2}.$$

Очевидно, что в случае $P < 0$, уравнение (3.55) не имеет корней, в случае $P = 0$, имеет единственный корень $T = a$, а в случае $P > 0$, имеет два различных корня, а именно: $T_1 = a - \sqrt{P}$ и $T_2 = a + \sqrt{P}$. Отметим, что $T_1 < a < T_2$. Далее рассмотрим различные случаи, которые определяются взаимным расположением границ рассматриваемого интервала и корней T_1 и T_2 . В каждом из этих случаев определим точку минимума для функции $F(T)$ на рассматриваемом отрезке $a \leq T \leq c$ и значение минимизируемой функции в точке минимума. Используя формулу Лейбница, мы вычислили производную функции $F(T)$ без явного вычисления этой функции из выражения (3.52), однако сделаем это сейчас, поскольку далее будем вычислять значения минимумов функции $F(T)$.

$$F(T) = K_1 \left(-\frac{(T^3 - a^3)}{3} + (T + a) \frac{(T^2 - a^2)}{2} - aT(T - a) \right) +$$

$$-K_2 \left(-\frac{(c^3 - T^3)}{3} + (T + a) \frac{(c^2 - T^2)}{2} - aT(c - T) \right) -$$

$$-K_2 \left(\frac{(b^3 - c^3)}{3} - (T + b) \frac{(b^2 - T^2)}{2} + bT(b - c) \right). \quad (3.56)$$

Случай 3.1 $P \leq 0$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.55) либо не имеет корней, либо имеет единственный корень на левом конце отрезка в точке a . Тогда производная функции $F(T)$ на всем отрезке $[a, c]$ является положительной, а следовательно, функция $F(T)$ является возрастающей на всем отрезке, а следовательно ее минимум достигается на левом конце отрезка в точке a . То есть:

$$T_{\min 3.1}^* = a, \quad Q_{\min 3.1}^* = q(t^* - t_0 - a), \quad F_{\min 3.1}^* = F(a). \quad (3.57)$$

Случай 3.2 $P > 0, T_1 < a < T_2 \leq c$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.55) имеет два различных корня, а именно: $T_1 = a - \sqrt{P}$ и $T_2 = a + \sqrt{P}$, а в силу их взаимного расположения с параметрами a и c , производная функции $F(T)$ отрезке $[a, T_2]$ является отрицательной, а следовательно, функция $F(T)$ является убывающей на этом отрезке. Производная функции $F(T)$ отрезке $[T_2, b]$ является положительной, а следовательно, функция $F(T)$ является возрастающей на этом отрезке. Из вышесказанного следует, что минимум функции в этом случае может достигаться только в точке T_2 . То есть:

$$T_{\min 3.2}^* = T_2, \quad Q_{\min 3.2}^* = q(t^* - t_0 - T_2), \quad F_{\min 3.2}^* = F(T_2) \quad (3.57)$$

Случай 3.3 $P > 0, T_1 < a < c \leq T_2$.

В этом случае, как мы отмечали выше, уравнение (3.55) имеет два различных корня, а именно: $T_1 = a - \sqrt{P}$ и $T_2 = a + \sqrt{P}$, а в силу их взаимного расположения с параметрами a и c , производная функции $F(T)$ отрезках $[a, c]$ является отрица-

тельной, а следовательно, функция $F(T)$ является убывающей на этом отрезке. Следовательно, минимум функции в этом случае может достигаться только в точке c . То есть:

$$T_{\min 3.3}^* = c, \quad Q_{\min 3.3}^* = q(t^* - t_0 - c), \quad F_{\min 3.3}^* = F(c) \quad (3.58)$$

Таким образом, для случая 3 решение по функционалу будет определяться одним из значений $F_{\min 3.1}^*$, $F_{\min 3.2}^*$ или $F_{\min 3.3}^*$, в зависимости от соотношения параметров, обозначим его как $F_{\min 3}^*$. Оптимальный объем заказа будет определяться соответствующим значением $Q_{\min 3.1}^*$, $Q_{\min 3.2}^*$ или $Q_{\min 3.3}^*$, обозначим его как $Q_{\min 3}^*$.

Таким образом, случай 3 рассмотрен нами полностью. Перейдем теперь к рассмотрению случая 4.

Случай 4.

$a \geq t^*$, или $t_0 + \frac{Q}{q} + a \geq t^*$, или $Q \geq q(t^* - t_0 - a)$. Графически этот случай представлен на рис. 3.7. В этом случае возможны только издержки хранения, математическое ожидание которых представляется формулой (3.59).

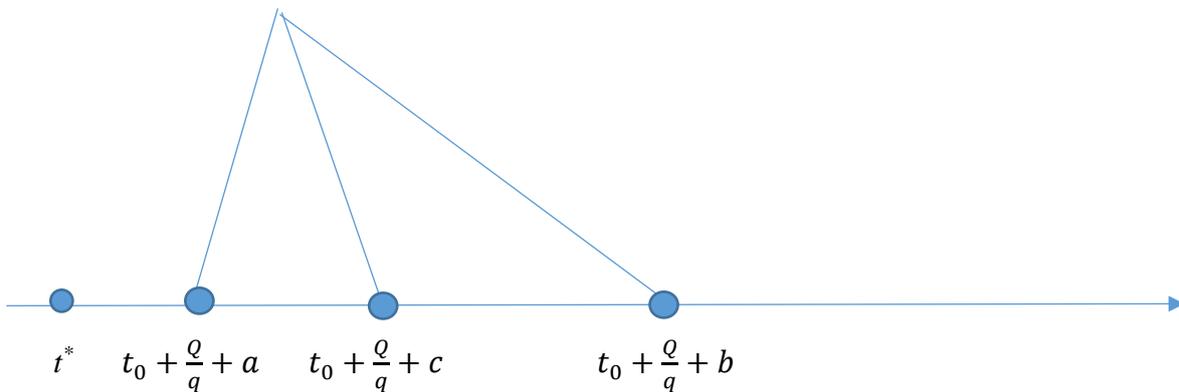


Рисунок 3.7 - Графическая схема случая 4

Источник: составлено автором

$$F(Q) = \int_{\alpha}^b pQ^* \left(t_0 + \frac{Q}{q} + \Delta t - t^* \right) \rho(\Delta t) d\Delta t \quad (3.59)$$

В результате вычисления интеграла (3.59), получаем вид функции $F(Q)$ для случая 4, а именно:

$$F(Q) = pQ^* \left(\left(t_0 + \frac{Q}{q} - t^* \right) + \frac{1}{3}(b - a) \right) \quad (3.60)$$

Как видно из выражения (3.60) функция $F(Q)$ является линейной возрастающей функцией, а следовательно, достигает своего минимума на левом конце рассматриваемого интервала, то есть в точке, представленной выражением (3.61).

$$Q_{min4}^* = q(t^* - t_0 - a), \quad F_{min4}^* = pQ^* \left(\frac{1}{3}b - \frac{4}{3}a \right). \quad (3.61)$$

Рассмотрение случаев 1 – 4 завершено. Сформируем итоговое решение задачи.

$$\min_Q F(Q) = \min \{ F_{min1}^*, F_{min2}^*, F_{min3}^*, F_{min4}^* \} \quad (3.62)$$

Значение оптимальной точки буде соответственно выбираться из множества

$$\{ Q_{min1}^*, Q_{min2}^*, Q_{min3}^*, Q_{min4}^* \} \dots \dots \dots (3.63)$$

в зависимости от выбора минимального из выражений в (3.62).

Разработанная стохастическая модель, учитывающая неопределенность времени доставки и соответствующая ей оптимизационная задача по критерию мини-

мизации математического ожидания интегральных дополнительных издержек в качестве результата определяют время размер новой партии товара при известном времени заказа доставки. При предположении о треугольном распределении случайных отклонений момента прибытия товарной партии от договорного было получено аналитическое решение задачи, сводящиеся к итоговому выбору на основании соотношений (3.62) и (3.63).

3.3 Модели оптимизации объема поставки в условиях неопределенности спроса по критерию максимизации ожидаемой прибыли

Предполагаем, что поставка товара происходит периодически в определенные моменты времени точно в назначенный момент, т.е. неопределенность времени поставки отсутствует. Объем товара, поставляемый в начале каждого периода, рассматривается как переменная величина, которая является оптимизирующей переменной в данной модели. Спрос на товар в каждом периоде является случайной величиной с известным законом распределения, с плотностью распределения вероятностей - $f(x)$ и известным множеством значений $x \in [0, XM]$, где XM есть максимально возможный объем спроса в рассматриваемый период. Задача решается для каждого периода поставки автономно, а следовательно, параметр XM и закон распределения $f(x)$ могут зависеть от рассматриваемого периода.

Предполагаем известной прибыль от реализации единицы товара - v . Полагаем, что $v \geq 0$. Общая прибыль пропорциональна объему реализованного товара.

В случае, если спрос оказывается выше объема товара, имеющегося в наличии в данном периоде, могут возникать различного рода финансовые риски, выраженные в договорных пенях, штрафах, другого рода неустойках, репутационные риски

или риски потери клиента. Риски потери клиента также могут быть оценены количественно в финансовом выражении. Такого рода модели логистической регрессии, оценивающие вероятность ухода клиента представлены, например, в [23]. Используя, регрессионный коэффициент подобных моделей при переменной «объем неудовлетворенного спроса» и сопоставляя его влияние на вероятность ухода клиента с данными о торговых историях клиентов, можно вывести некоторый удельный коэффициент, характеризующий усредненные финансовые потери компании при неудовлетворении спроса в единичном объеме. Обозначим этот коэффициент – w . Полагаем, что $w \leq 0$.

В случае, если имеющийся в данном периоде товар превосходит спрос, возникает неиспользованный излишек товара, который влечет за собой дополнительные затраты на хранение и финансовые потери от средств, «замороженных» в товаре. В этом случае целесообразно оценить издержки от хранения излишков товара в течение рассматриваемого периода пропорционально количеству невостребованного товара с некоторым коэффициентом h . Полагаем, что $h \leq 0$. Заметим, что мы исчисляем только дополнительные издержки хранения товара, который хранился период, но не был реализован. Издержки хранения товара, который был реализован в периоде поставки, мы предполагаем учтенными в прибыли товара v . Исследования данных моделей представлено в [64].

3.3.1 Модель оптимизации объема поставки с учетом дополнительных издержек хранения и рисков потери клиентов для товаров длительного срока хранения

В качестве оптимизируемого критерия в данной модели выступает математическое ожидание прибыли от реализации товара в рассматриваемом пери-

оде за вычетом двух видов издержек, описанных выше, а именно, издержки хранения (возникают при образовании нереализованных излишков товара) и издержки потери клиентов (возникают при невозможности полностью удовлетворить спрос данного периода). Целевая функция задачи в этом случае представлена далее выражением (3.64)

$$F(Q) = \int_0^Q (vx + h(Q - x))f(x)dx + \int_Q^{XM} (vQ + w(x - Q))f(x)dx \quad (3.64)$$

Задача состоит в максимизации функции (3.64) по переменной Q на допустимом множестве значений, а именно на отрезке $[0, XM]$. Проведем следующие преобразования функции (3.64):

$$\begin{aligned} F(Q) = & v \int_0^Q xf(x)dx + hQ \int_0^Q f(x)dx + h \int_0^Q xf(x)dx + vQ \int_Q^{XM} f(x)dx \\ & + w \int_Q^{XM} xf(x)dx - wQ \int_Q^{XM} f(x)dx. \end{aligned}$$

Для минимизации функции $F(x)$ найдем ее производную, воспользовавшись известной формулой Лейбница для дифференцирования интегральных функций с переменным верхним пределом [34, с. 218].

$$\frac{dF(Q)}{dQ} = h \int_0^Q f(x)dx + v \int_Q^{XM} f(x)dx - w \int_Q^{XM} f(x)dx. \quad (3.65)$$

Учитывая, что

$$\int_Q^{XM} f(x)dx = 1 - \int_0^Q f(x)dx, \quad (3.66)$$

и приравнивая производную 0, получим следующее уравнение относительно переменной Q , рассматриваемое при $x \in [0, XM]$:

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{w - v}{h + w - v} = \frac{1}{\frac{h}{w - v} + 1} = k_1. \quad (3.67)$$

Из второго разложения в соотношении (3.67) и знаков параметров h, w, v , обозначенных выше, следует $0 \leq k_1 \leq 1$. В силу того, что функция от переменной Q , которая находится в левой части уравнения (3.67) является монотонно неубывающей непрерывной функцией, меняющейся на рассматриваемом отрезке от 0 до 1, уравнение (3.67) имеет решение в силу теоремы Вейерштрасса [34, с. 170]. В общем случае нахождение корня уравнения (3.67) осуществляется известными численными методами. Пусть Q^* - корень уравнения (3.67). Далее заметим, что производная (2) является функцией невозрастающей на рассматриваемом отрезке, при этом

$$\frac{dF(0)}{dQ} = v - w \geq 0, \quad \frac{dF(XM)}{dQ} = h \leq 0.$$

В силу этого в точке Q^* , производная меняет знак с «+» на «-», а следовательно, точка Q^* является точкой искомого максимума и нет необходимости вычислять значение функции $F(x)$ на концах отрезка.

Далее проведем решение данной задачи в предположении, что случайная величина спроса распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – определяются из статистических данных, либо с помощью оценок экспертов, при соблюдении следующего условия: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел значений случайной величины, b - верхний предел значений случайной величины, c - мода (значение, встречающееся в распределении наиболее

часто). В этом случае функция плотности распределения вероятностей $f(x)$ выражается согласно (2.74), а функция распределения вероятностей согласно (2.75):

Откуда аналитическое решение задачи для случая, когда случайная величина спроса описывается треугольным распределением, выражается соотношениями (3.68).

$$Q^* = \begin{cases} a + \sqrt{k_1(b-a)(c-a)}, & 0 \leq k_1 \leq \frac{c-a}{b-a}, \\ b + \sqrt{(1-k_1)(b-a)(c-a)}, & \frac{c-a}{b-a} \leq k_1 \leq 1, \end{cases} \quad (3.68)$$

В заключении заметим, что данная модель допускает сужение задачи для случая отсутствия какого-либо вида издержек из рассматриваемых в модели.

Если отсутствуют издержки хранения, т.е. $h=0$, то $k_1=1$ и $Q^*=XM$. Экономический смысл этого результата понятен, поскольку в этом случае риск дополнительных издержек хранения отсутствует изначально, риск потери клиентов исчезает при поставке максимума объема возможного спроса, а нераспроданный товар переходит на следующий период без каких-либо дополнительных затрат.

Если отсутствуют издержки потери клиентов, т.е. $w=0$, то

$$k_1 = \frac{v}{v-h}.$$

Как видно $0 \leq k_1 \leq 1$ и уравнение (3.67) остается разрешимым. В этом случае решение является нетривиальным поскольку остается баланс между прибылью от продажи и издержками хранения излишков.

Если отсутствуют и издержки хранения, и издержки потери клиентов, т.е. $h=0$, $w=0$, то $k_1=1$ и $Q^*=XM$. Экономический смысл этого результата также понятен, поскольку в этом случае риск дополнительных издержек хранения и риск по-

тери клиентов отсутствуют изначально, нераспроданный товар переходит на следующий период без каких-либо дополнительных затрат, а завоз максимального объема увеличивает ожидаемые продажи.

3.3.2 Модель оптимизации объема поставки с учетом дополнительных издержек хранения и рисков потери клиентов для товаров с ограниченным сроком хранения

В качестве оптимизируемого критерия в данной модели выступает математическое ожидание прибыли от реализации товара в рассматриваемом периоде за вычетом двух видов издержек, описанных выше, а именно, издержки хранения (возникают при образовании нереализованных излишков товара) и издержки потери клиентов (возникают при невозможности полностью удовлетворить спрос данного периода). В отличие от модели, рассмотренной выше, вычитаются также затраты на закупку товарной партии, завозимой в рассматриваемом периоде. Это объясняется тем обстоятельством, что если в предыдущей модели невостребованный излишек товара переходил как входящий остаток на следующий период и учитывался при определении объема завоза товара следующего периода, то в данной модели предполагается, что нереализованный остаток рассматриваемого периода считается просроченным и далее не рассматривается, т.е. выходит из оборота. Целевая функция задачи в этом случае представлена далее выражением (3.69)

$$F(Q) = \int_0^Q (c_2x + h(Q - x))f(x)dx + \int_Q^{XM} (c_2Q + w(x - Q))f(x)dx - c_1Q, \quad (3.69)$$

где c_1 – цена закупки товара, c_2 – цена продажи товара. Полагаем, что

$$0 \leq c_1 \leq c_2.$$

Задача состоит в максимизации функции (3.69) по переменной Q на допустимом множестве значений, а именно на отрезке $[0, XM]$. Проведем следующие преобразования функции (3.69):

$$F(Q) = c_2 \int_0^Q xf(x)dx + hQ \int_0^Q f(x)dx + h \int_0^Q xf(x)dx + c_2Q \int_Q^{XM} f(x)dx \\ + w \int_Q^{XM} xf(x)dx - wQ \int_Q^{XM} f(x)dx - c_1Q.$$

Как и при исследовании модели параграфа 3.3.1, для минимизации функции $F(x)$ найдем ее производную, воспользовавшись известной формулой Лейбница для дифференцирования интегральных функций с переменным верхним пределом [34, с. 218].

$$\frac{dF(Q)}{dQ} = h \int_0^Q f(x)dx + c_2 \int_Q^{XM} f(x)dx - w \int_Q^{XM} f(x)dx - c_1. \quad (3.70)$$

Учитывая соотношение (3.66) и приравнявая производную 0, получим следующее уравнение относительно переменной Q , рассматриваемое при $x \in [0, XM]$:

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{w + c_1 - c_2}{h + w - c_2} = \frac{1 + \frac{c_1}{w - c_2}}{1 + \frac{h}{w - c_2}} = k_2. \quad (3.71)$$

С учетом знаков параметров w , h и соотношения $0 \leq c_1 \leq c_2$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$c_1 \leq c_2 - w, \quad w - c_2 < 0,$$

$$-1 \leq \frac{c_1}{w - c_2} \leq 0, \quad 0 \leq 1 + \frac{c_1}{w - c_2} \leq 1,$$

$$0 \leq \frac{h}{w - c_2}, \quad 1 \leq 1 + \frac{c_1}{w - c_2},$$

а следовательно $0 \leq k_2 \leq 1$.

В силу того, что функция от переменной Q , которая находится в левой части уравнения (3.71) является монотонно неубывающей непрерывной функцией, меняющейся на рассматриваемом отрезке от 0 до 1, уравнение (3.71) имеет решение в силу теоремы Вейерштрасса [34, с. 170]. В общем случае нахождение корня уравнения (3.71) осуществляется известными численными методами. Пусть Q^* - корень уравнения (3.71). Далее заметим, что производная (3.70) является функцией невозрастающей на рассматриваемом отрезке, при этом

$$\frac{dF(0)}{dQ} = c_2 - w - c_1 \geq 0, \quad \frac{dF(XM)}{dQ} = h - c_1 \leq 0.$$

В силу этого в точке Q^* , производная меняет знак с «+» на «-», а следовательно, точка Q^* является точкой искомого максимума и нет необходимости вычислять значение функции $F(x)$ на концах отрезка.

Далее проведем решение данной задачи в предположении, что случайная величина спроса распределена по треугольному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c – удовлетворяют следующим условиям: $a \leq c \leq b, a < b$, где a - нижний предел значений случайной величины, b - верхний предел значений случайной величины, c - мода (значение, встречающиеся в распределении наиболее часто). В этом случае функция плотности распределения вероятностей $f(x)$ выражается согласно соотношениям (2.74), а функция распределения вероятностей согласно соотношениям (2.75). Откуда аналитическое решение задачи для случая,

когда случайная величина спроса описывается треугольным распределением, выражается соотношениями (3.72).

$$Q^* = \begin{cases} a + \sqrt{k_1(b-a)(c-a)}, & 0 \leq k_2 \leq \frac{c-a}{b-a}, \\ b + \sqrt{(1-k_1)(b-a)(c-a)}, & \frac{c-a}{b-a} \leq k_2 \leq 1, \end{cases} \quad (3.72)$$

В заключении заметим, что данная модель допускает сужение задачи для случая отсутствия какого-либо вида издержек из рассматриваемых в модели.

Если отсутствуют издержки хранения, т.е. $h=0$, то

$$k_2 = 1 + \frac{c_1}{w - c_2}.$$

Как видно $0 \leq k_2 \leq 1$ и уравнение (3.71) остается разрешимым. В этом случае решение является нетривиальным поскольку остается баланс между прибылью от продажи товара, издержками потери клиентов и потерями нереализованных товарных остатков.

Если отсутствуют издержки потери клиентов, т.е. $w=0$, то

$$k_2 = \frac{1 - \frac{c_1}{c_2}}{1 - \frac{h}{c_2}}.$$

Как видно $0 \leq k_2 \leq 1$ и уравнение (3.71) остается разрешимым. В этом случае решение является нетривиальным поскольку остается баланс между прибылью от продажи товара, дополнительными издержками от хранения нераспроданного товара и потерями нереализованных товарных остатков.

Если отсутствуют и издержки хранения, и издержки потери клиентов, т.е. $h=0, w=0$, то

$$k_2 = 1 - \frac{c_1}{c_2}.$$

Как видно $0 \leq k_2 \leq 1$ и уравнение (3.71) остается разрешимым. В этом случае решение является нетривиальным поскольку остается баланс между прибылью от продажи товара и потерями нереализованных товарных остатков.

Глава 4 Численный анализ стохастических моделей оптимизации времени назначения поставки

В данной главе диссертации приведен анализ чувствительности разработанных стохастических моделей, основанный на результатах численных расчетов с использованием аналитических решений моделей оптимизации момента поставки с учетом неопределенностей спроса и времени поставки. Расчеты проведены с использованием тестовых данных с использованием языка MATLAB.

4.1 Расчет оптимального момента поставки с учетом неопределенности спроса

В параграфе 2.1 была получена модель, позволяющая при случайном спросе определить день поставки новой партии товара в определенном объеме при условии минимизации рисков. Основные результаты данного параграфа опубликованы автором в работе [58]. Оптимальный момент времени t^* назначения доставки новой партии товара, выражается соотношением (4.1):

$$\begin{aligned}
& \text{Если } p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right) < \frac{z}{\alpha_0} (2b - a - c - \\
& - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = a + \alpha_0 + \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}}; \\
& \text{Если } p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right) > \frac{z}{\alpha_0} (2b - a - c - \\
& - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = b + \alpha_0 - \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0} (b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}};
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где α_0 - прогнозируемое время обнуления запаса товара;

p - цена удельных складских издержек единичного объема товара;

z - удельная прибыль от реализации товара;

a, b, c – числовые характеристики треугольного распределения случайной величины $\Delta\alpha$ (отличие фактического времени обнуления товара от прогнозируемого), где a - нижний предел, b - верхний предел, c – мода.

Из соотношения (4.1) следует, что оптимальное время прибытия новой партии товара на склад меняется относительно прогнозируемого времени обнуления товара α_0 . Степень изменения определяется параметрами α_0, p, z, a, b, c . Далее исследуем влияние данных параметров на оптимальное время завоза новой товарной партии t^* .

В таблице 4.1 исследуем влияние прогнозируемого времени обнуления запаса товара α_0 на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., удельная прибыль от реализации товара $z = 10$ усл. ед., а случайная величина $\Delta\alpha$

описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Для сравнение двух величин $p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right)$ и $\frac{z}{\alpha_0} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0}(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right)$, обозначим первую $f_1 = p \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right)$, а вторую $f_2 = \frac{z}{\alpha_0} \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha_0}(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha_0} + p\right)}} \right)$. Расчеты представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра α_0 *

a	c	b	α_0	p	z	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	10,00	5,00	10,00	10,23	8,52	14,26
-2,00	2,00	7,00	11,00	5,00	10,00	9,81	7,94	15,37
-2,00	2,00	7,00	12,00	5,00	10,00	9,45	7,44	16,46
-2,00	2,00	7,00	13,00	5,00	10,00	9,14	7,00	17,55
-2,00	2,00	7,00	14,00	5,00	10,00	8,88	6,61	18,63
-2,00	2,00	7,00	15,00	5,00	10,00	8,64	6,27	19,70
-2,00	2,00	7,00	16,00	5,00	10,00	8,43	5,95	20,76
-2,00	2,00	7,00	17,00	5,00	10,00	8,25	5,67	21,82
-2,00	2,00	7,00	18,00	5,00	10,00	8,08	5,42	22,88
-2,00	2,00	7,00	19,00	5,00	10,00	7,93	5,19	23,93

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

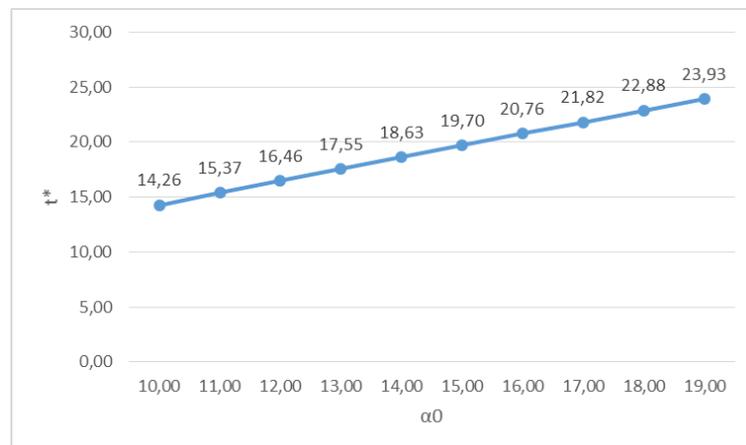


Рисунок 4.1 – Изменение времени завоза в зависимости от параметра α_0
 Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.1 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра α_0 . Зависимость является линейной. Чем позже ожидается, что закончится товар на складе, тем и позже следует назначить момент поставки.

Таблица 4.2 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра p *

a	c	b	p	α_0	z	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	5,00	10,00	10,00	10,23	8,52	14,26
-2,00	2,00	7,00	10,00	10,00	10,00	15,58	9,95	14,98
-2,00	2,00	7,00	15,00	10,00	10,00	20,72	10,65	15,32
-2,00	2,00	7,00	20,00	10,00	10,00	25,78	11,07	15,54
-2,00	2,00	7,00	25,00	10,00	10,00	30,83	11,37	15,68
-2,00	2,00	7,00	30,00	10,00	10,00	35,85	11,59	15,80
-2,00	2,00	7,00	35,00	10,00	10,00	40,87	11,76	15,88
-2,00	2,00	7,00	40,00	10,00	10,00	45,89	11,90	15,95
-2,00	2,00	7,00	45,00	10,00	10,00	50,90	12,02	16,01
-2,00	2,00	7,00	50,00	10,00	10,00	55,91	12,12	16,06

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

В таблице 4.2 исследуем влияние цены удельных складских издержек единичного объема товара p на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере прогнозируемое время обнуления запаса товара $\alpha_0 = 10$ дней, удельная прибыль от реализации товара $z = 10$ усл.ед., а случайная величина $\Delta\alpha$ описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.2.

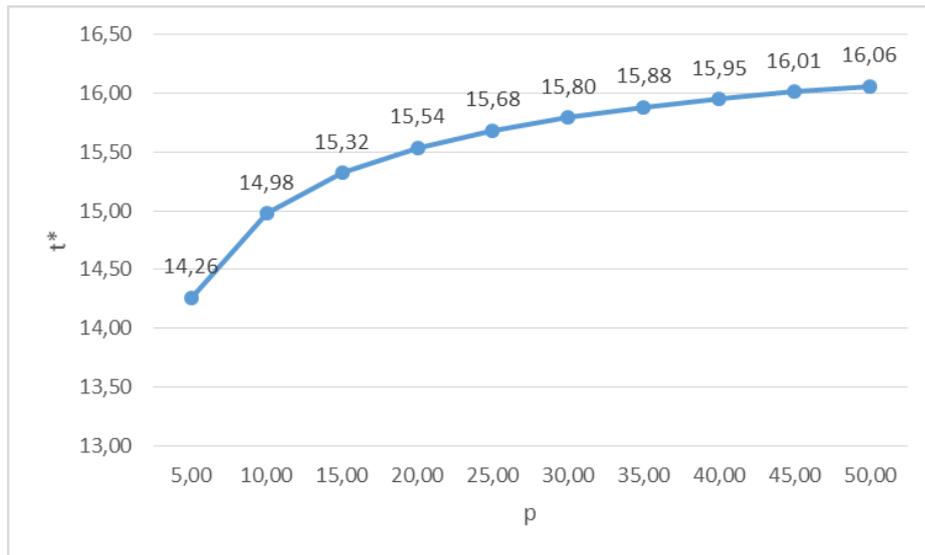


Рисунок 4.2 - Изменение времени завоза в зависимости от параметра p
 Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.2 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра p . Зависимость не является линейной, что подтверждает значимость данного исследования. Чем больше ожидаемая цена удельных складских издержек единичного объема товара, тем и позже следует назначить момент поставки.

Таблица 4.3 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра z *

a	c	b	z	α_0	p	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	10,00	10,00	5,00	10,23	8,52	14,26
-2,00	2,00	7,00	20,00	10,00	5,00	14,29	13,66	13,41
-2,00	2,00	7,00	30,00	10,00	5,00	17,57	17,35	12,89
-2,00	2,00	7,00	40,00	10,00	5,00	20,28	20,22	12,53
-2,00	2,00	7,00	50,00	10,00	5,00	22,57	22,57	12,26
-2,00	2,00	7,00	60,00	10,00	5,00	24,55	24,55	12,05
-2,00	2,00	7,00	70,00	10,00	5,00	26,27	26,27	11,87
-2,00	2,00	7,00	80,00	10,00	5,00	27,79	27,80	11,72
-2,00	2,00	7,00	90,00	10,00	5,00	29,14	29,19	11,59
-2,00	2,00	7,00	100,00	10,00	5,00	30,36	30,46	11,46

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

В таблице 4.3 исследуем влияние удельной прибыли от реализации товара z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере прогнозируемое время обнуления запаса товара $\alpha_0 = 10$ дней, цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., а случайная величина $\Delta\alpha$ описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.3.

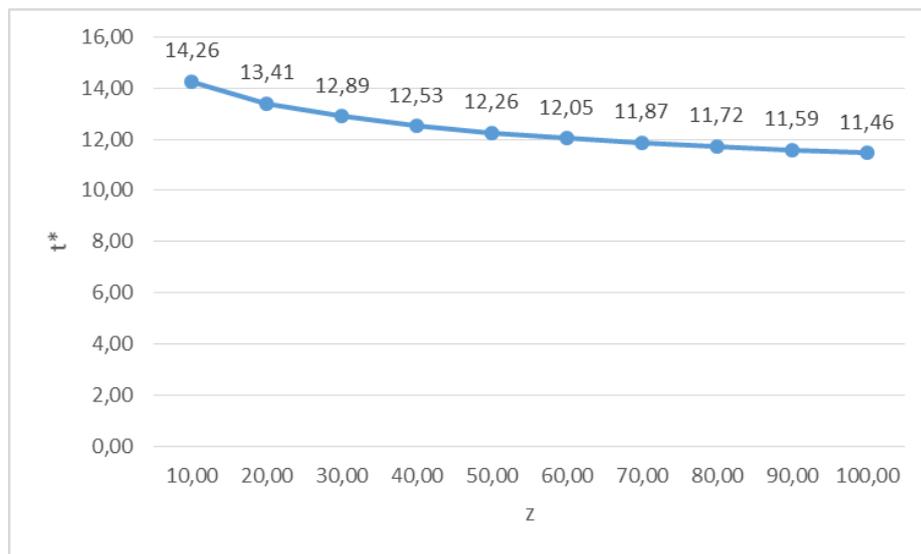


Рисунок 4.3 - Изменение времени завоза в зависимости от параметра z
 Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.3 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра z . Зависимость не является линейной, что подтверждает значимость данного исследования. Чем больше ожидаемая цена на товар, тем раньше следует поставить новую партию продукции.

В таблице 4.4 исследуем влияние прогнозируемого времени обнуления запаса товара α_0 и цены удельных складских издержек единичного объема p на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере удельная прибыль от реализации товара $z = 10$ усл. ед., а случайная величина $\Delta\alpha$ описывается треугольным законом распределения распределена с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α_0 и p *

$\alpha_0 \backslash p$	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00
10	14,26	14,98	15,32	15,54	15,68	15,80	15,88	15,95	16,01	16,06
11	15,37	16,06	16,40	16,60	16,74	16,85	16,93	17,00	17,06	17,10
12	16,46	17,14	17,46	17,66	17,80	17,90	17,98	18,04	18,10	18,14
13	17,55	18,21	18,52	18,71	18,84	18,94	19,02	19,08	19,13	19,17
14	18,63	19,27	19,57	19,75	19,88	19,98	20,05	20,11	20,16	20,20
15	19,70	20,32	20,62	20,80	20,92	21,01	21,08	21,14	21,19	21,23
16	20,76	21,37	21,66	21,83	21,95	22,04	22,11	22,17	22,21	22,25
17	21,82	22,42	22,70	22,87	22,98	23,07	23,14	23,19	23,24	23,28
18	22,88	23,46	23,73	23,90	24,01	24,10	24,16	24,21	24,26	24,30
19	23,93	24,50	24,76	24,93	25,04	25,12	25,18	25,24	25,28	25,32

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

На рисунке 4.4, полученном с помощью функции `num1()` на языке MATLAB (Приложение Н), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α_0 и p . Чем позже ожидается, что закончится товар и чем больше ожидаемая цена за хранение на складе, тем и позже следует назначить момент поставки.

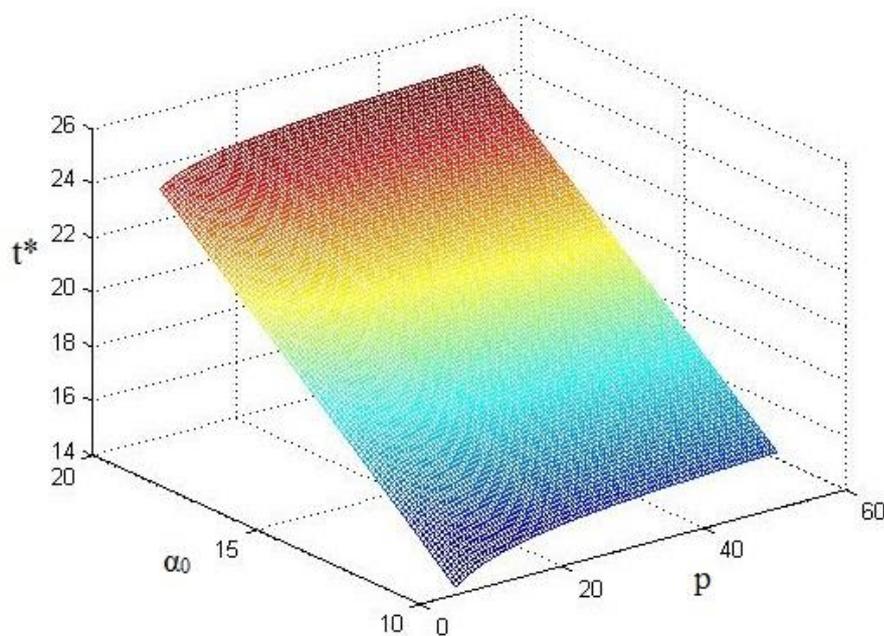


Рисунок 4.4 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров α_0 и p
 Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

Таблица 4.5 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α_0 и z *

$\alpha_0 \backslash z$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	14,26	13,41	12,89	12,53	12,26	12,05	11,87	11,72	11,59	11,46
11	15,37	14,54	14,01	13,65	13,37	13,15	12,98	12,83	12,70	12,57
12	16,46	15,65	15,13	14,76	14,48	14,26	14,08	13,93	13,79	13,67
13	17,55	16,75	16,23	15,86	15,58	15,35	15,17	15,02	14,89	14,77
14	18,63	17,84	17,33	16,95	16,67	16,44	16,26	16,10	15,97	15,85
15	19,70	18,92	18,41	18,04	17,76	17,53	17,34	17,18	17,05	16,93
16	20,76	20,00	19,50	19,13	18,84	18,61	18,42	18,26	18,12	18,00
17	21,82	21,07	20,57	20,21	19,92	19,68	19,49	19,33	19,19	19,07
18	22,88	22,14	21,65	21,28	20,99	20,76	20,56	20,40	20,26	20,13
19	23,93	23,20	22,71	22,35	22,06	21,83	21,63	21,46	21,32	21,20

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

В таблице 4.5 исследуем влияние прогнозируемого времени обнуления запаса товара α_0 и удельной прибыли от реализации товара z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., а случайная величина $\Delta\alpha$ описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.5.

На рисунке 4.5, полученном с помощью функции `num2()` на языке MATLAB (Приложение П), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α_0 и z . Чем раньше ожидается, что закончится товар на складе и чем больше ожидаемая цена на товар, тем раньше следует назначить момент поставки.

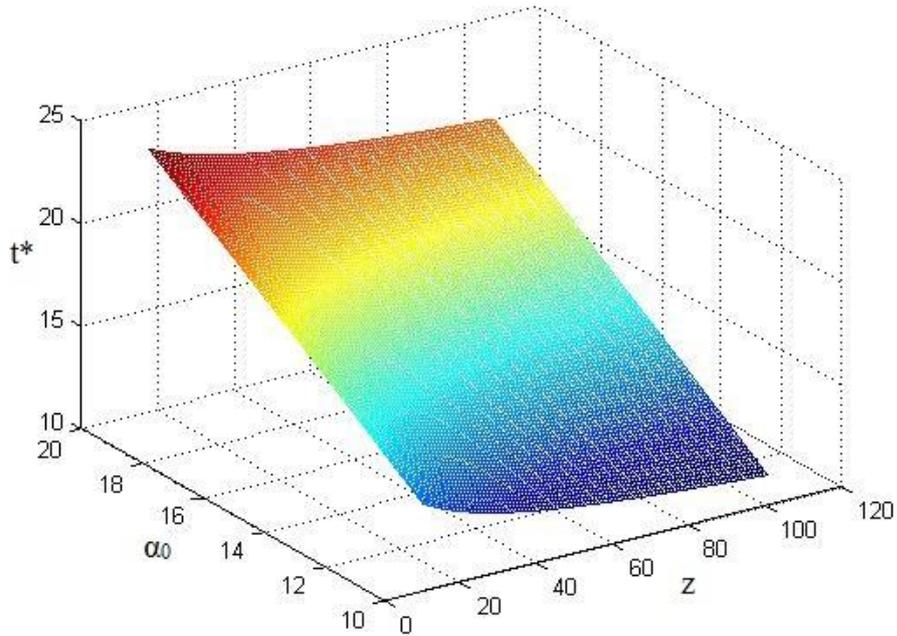


Рисунок 4.5 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров α_0 и z
 Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

Таблица 4.6 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров p и z *

$p \backslash z$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5	14,26	13,41	12,89	12,53	12,26	12,05	11,87	11,72	11,59	11,46
10	14,98	14,26	13,78	13,41	13,13	12,89	12,70	12,53	12,38	12,26
15	15,32	14,70	14,26	13,92	13,65	13,41	13,22	13,04	12,89	12,76
20	15,54	14,98	14,58	14,26	14,00	13,78	13,58	13,41	13,26	13,13
25	15,68	15,17	14,80	14,51	14,26	14,05	13,86	13,70	13,55	13,41
30	15,80	15,32	14,98	14,70	14,46	14,26	14,08	13,92	13,78	13,65
35	15,88	15,44	15,12	14,85	14,63	14,43	14,26	14,11	13,97	13,84
40	15,95	15,54	15,23	14,98	14,76	14,58	14,41	14,26	14,13	14,00
45	16,01	15,62	15,32	15,08	14,88	14,70	14,54	14,39	14,26	14,14
50	16,06	15,68	15,40	15,17	14,98	14,80	14,65	14,51	14,38	14,26

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

В таблице 4.6 исследуем влияние цены удельных складских издержек единичного объема товара p и удельной прибыли от реализации товара z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере прогнозируемое время об-

нуления запаса товара $\alpha_0 = 10$ дней, а случайная величина $\Delta\alpha$ описывается треугольным законом распределения распределена с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.6.

На рисунке 4.6, полученном с помощью функции `num3()` на языке MATLAB (Приложение Р), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров p и z . Чем меньше ожидаемая цена на товар и чем больше цена за хранение, тем и позже следует назначить момент поставки.

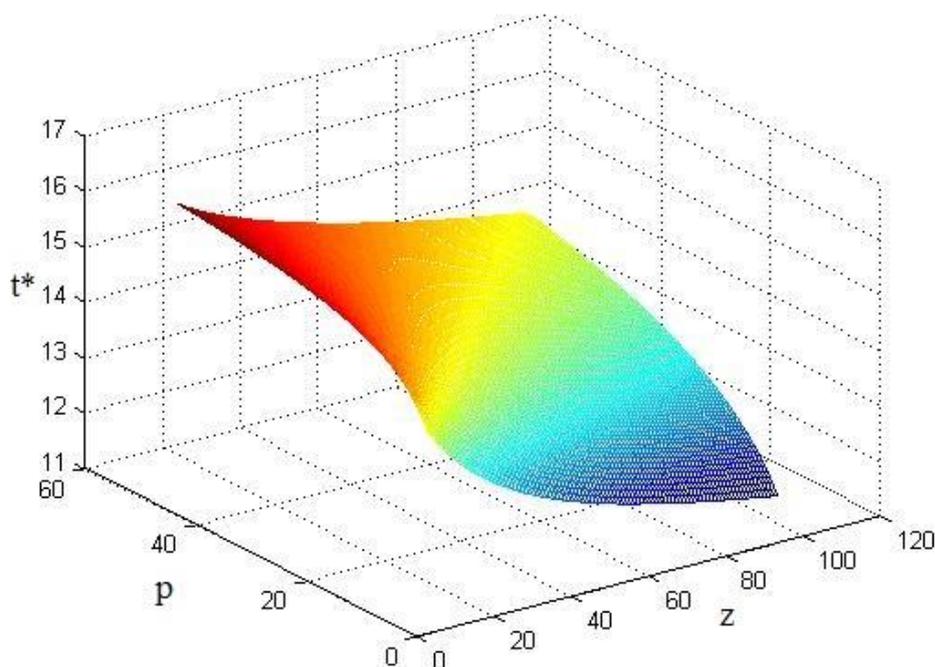


Рисунок 4.6 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров p и z
Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

Таким образом, можно сделать вывод, что полученная модель оптимизации момента поставки с учетом неопределенности спроса, является актуальной. Из полученной формулы (4.1) и из рисунков 4.1-4.6 видно, что зависимость оптимального момента поставки от таких параметров, как прогнозируемое время обнуления запаса товара, цена удельных складских издержек единичного объема товара и удельная прибыль от реализации товара не является линейной, а значит, не могла

быть получена без проведения исследования отраженного во второй главе данной диссертации.

4.2 Расчет оптимального момента поставки с учетом неопределенности времени поставки

В параграфе 2.2 была представлена оптимизационная модель определения времени поставки новой партии товара в известном объеме в условиях неопределенности времени поставки при условии минимизации ожидаемых суммарных издержек. Основные результаты данного параграфа опубликованы автором в работе [63]. Оптимальный момент времени t^* назначения доставки новой партии товара, выражается соотношением (4.2):

$$\begin{aligned}
 &\text{Если } p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right) > \frac{z}{\alpha} (b + c - 2a - \\
 &\quad - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = \alpha - a - \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}}; \\
 &\text{Если } p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right) < \frac{z}{\alpha} (b + c - 2a - \\
 &\quad - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha} (b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right), \text{ то } t^* = \alpha - b + \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}};
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где α – момент фактического обнуления товара на складе, а остальные входные параметры имеют тот же смысл, как и в разделе 4.1.

Из соотношения (4.2) следует, что оптимальное время прибытия новой партии товара на склад меняется относительно момента фактического обнуления товара на складе α . Степень изменения определяется параметрами α, p, z, a, b, c . Далее исследуем влияние данных параметров на оптимальное время завоза новой товарной партии t^* .

В таблице 4.7 исследуем влияние момента фактического обнуления товара на складе α на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., удельная прибыль от реализации товара $z = 10$ усл. ед., а случайная величина Δt описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Для

сравнение двух величин $p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right)$ и $\frac{z}{\alpha} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha}(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right)$, обозначим первую $f_1 = p \left(2b - a - c - 2 \sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right)$, а вторую $f_2 = \frac{z}{\alpha} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{\frac{z}{\alpha}(b-a)(c-a)}{\left(\frac{z}{\alpha} + p\right)}} \right)$. Расчеты представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра α *

a	c	b	α	p	z	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	10,00	5,00	10,00	8,76	8,10	9,55
-2,00	2,00	7,00	11,00	5,00	10,00	8,29	7,54	10,65
-2,00	2,00	7,00	12,00	5,00	10,00	7,89	7,05	11,73
-2,00	2,00	7,00	13,00	5,00	10,00	7,55	6,63	12,81
-2,00	2,00	7,00	14,00	5,00	10,00	7,25	6,26	13,88
-2,00	2,00	7,00	15,00	5,00	10,00	6,99	5,92	14,94
-2,00	2,00	7,00	16,00	5,00	10,00	6,75	5,63	16,00
-2,00	2,00	7,00	17,00	5,00	10,00	6,55	5,36	17,05
-2,00	2,00	7,00	18,00	5,00	10,00	6,36	5,11	18,10
-2,00	2,00	7,00	19,00	5,00	10,00	6,19	4,89	19,15

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

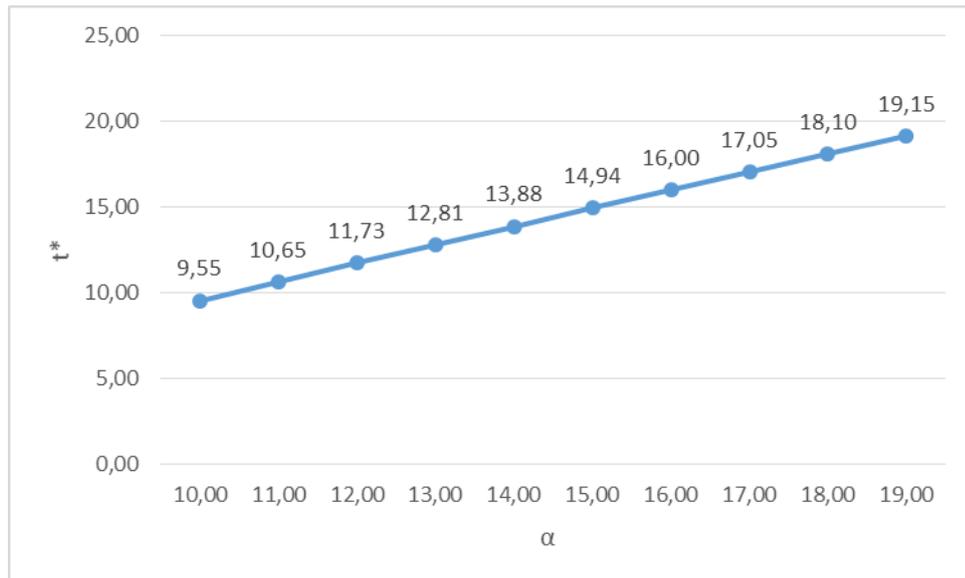


Рисунок 4.7 - Изменение времени завоза в зависимости от параметра α
 Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.1 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра α . Зависимость является линейной. Чем позже ожидается, что закончится товар на складе, тем и позже следует назначить момент поставки.

Таблица 4.8 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра p *

a	c	b	p	α_0	z	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	5,00	10,00	10,00	8,76	8,10	9,55
-2,00	2,00	7,00	10,00	10,00	10,00	12,08	9,38	10,19
-2,00	2,00	7,00	15,00	10,00	10,00	15,14	10,00	10,50
-2,00	2,00	7,00	20,00	10,00	10,00	18,14	10,38	10,69
-2,00	2,00	7,00	25,00	10,00	10,00	21,10	10,65	10,82
-2,00	2,00	7,00	30,00	10,00	10,00	24,05	10,84	10,92
-2,00	2,00	7,00	35,00	10,00	10,00	26,99	11,00	11,00
-2,00	2,00	7,00	40,00	10,00	10,00	29,93	11,13	11,06
-2,00	2,00	7,00	45,00	10,00	10,00	32,86	11,23	11,12
-2,00	2,00	7,00	50,00	10,00	10,00	35,79	11,32	11,16

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

В таблице 4.8 исследуем влияние цены удельных складских издержек единичного объема товара p на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном

примере прогнозируемое время обнуления запаса товара $\alpha = 10$ дней, удельная прибыль от реализации товара $z = 10$ усл. ед., а случайная величина Δt описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.8.

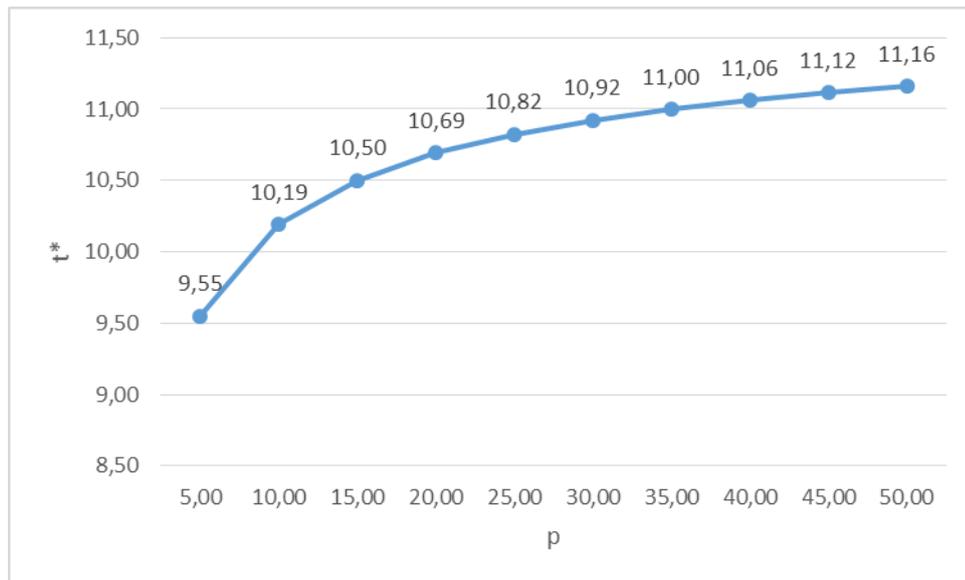


Рисунок 4.8 - Изменение времени завоза в зависимости от параметра p
 Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.8 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра p . Зависимость не является линейной, что подтверждает значимость данного исследования. Чем больше ожидаемая цена удельных складских издержек единичного объема товара, тем и позже следует назначить момент поставки.

В таблице 4.9 исследуем влияние удельной прибыли от реализации товара z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере прогнозируемое время обнуления запаса товара $\alpha = 10$ дней, цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., а случайная величина Δt описывается треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.9.

Таблица 4.9 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра z *

a	c	b	z	α_0	p	f_1	f_2	t^*
-2,00	2,00	7,00	10,00	10,00	5,00	8,76	8,10	9,55
-2,00	2,00	7,00	20,00	10,00	5,00	13,31	13,17	8,79
-2,00	2,00	7,00	30,00	10,00	5,00	16,97	16,95	8,33
-2,00	2,00	7,00	40,00	10,00	5,00	20,00	20,00	8,00
-2,00	2,00	7,00	50,00	10,00	5,00	22,57	22,57	7,74
-2,00	2,00	7,00	60,00	10,00	5,00	24,77	24,82	7,52
-2,00	2,00	7,00	70,00	10,00	5,00	26,70	26,84	7,33
-2,00	2,00	7,00	80,00	10,00	5,00	28,40	28,69	7,16
-2,00	2,00	7,00	90,00	10,00	5,00	29,91	30,41	7,01
-2,00	2,00	7,00	100,00	10,00	5,00	31,27	32,02	6,87

* Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

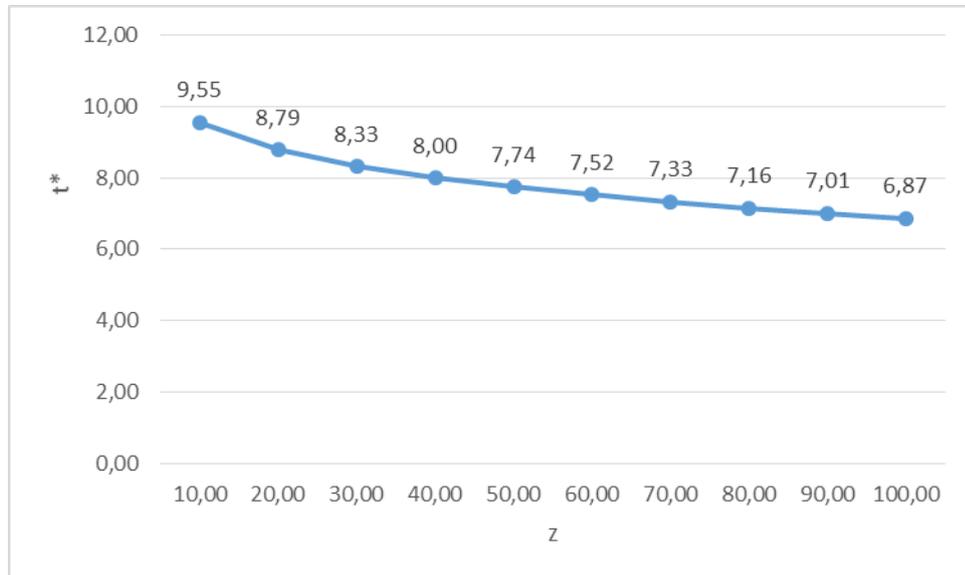


Рисунок 4.9 - Изменение времени завоза в зависимости от параметра z

Источник: составлено автором на основе расчетов в среде Excel

На рисунке 4.9 представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметра z . Зависимость не является линейной, что подтверждает значимость данного исследования. Чем больше ожидаемая цена на товар, тем раньше следует поставить новую партию продукции.

В таблице 4.10 исследуем влияние прогнозируемого времени обнуления запаса товара a и цены удельных складских издержек единичного объема p на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере удельная прибыль

от реализации товара $z = 10$ усл. ед., а случайная величина Δt описывается треугольным законом распределения распределена с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.10.

Таблица 4.10 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α и p *

$\alpha \backslash p$	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00
10	9,55	10,19	10,50	10,69	10,82	10,92	11,00	11,06	11,12	11,16
11	10,65	11,27	11,57	11,75	11,88	11,97	12,05	12,11	12,16	12,20
12	11,73	12,34	12,62	12,80	12,92	13,01	13,09	13,14	13,19	13,23
13	12,81	13,40	13,67	13,85	13,96	14,05	14,12	14,18	14,22	14,26
14	13,88	14,45	14,72	14,89	15,00	15,09	15,15	15,21	15,25	15,29
15	14,94	15,50	15,76	15,92	16,03	16,12	16,18	16,23	16,28	16,31
16	16,00	16,54	16,80	16,96	17,06	17,14	17,21	17,26	17,30	17,33
17	17,05	17,59	17,83	17,99	18,09	18,17	18,23	18,28	18,32	18,35
18	18,10	18,62	18,87	19,01	19,12	19,19	19,25	19,30	19,34	19,37
19	19,15	19,66	19,90	20,04	20,14	20,21	20,27	20,32	20,35	20,39

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

На рисунке 4.10, полученном с помощью функции `num4()` на языке MATLAB (Приложение С), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α и p . Чем позже ожидается, что закончится товар и чем больше ожидаемая цена за хранение на складе, тем и позже следует назначить момент поставки.

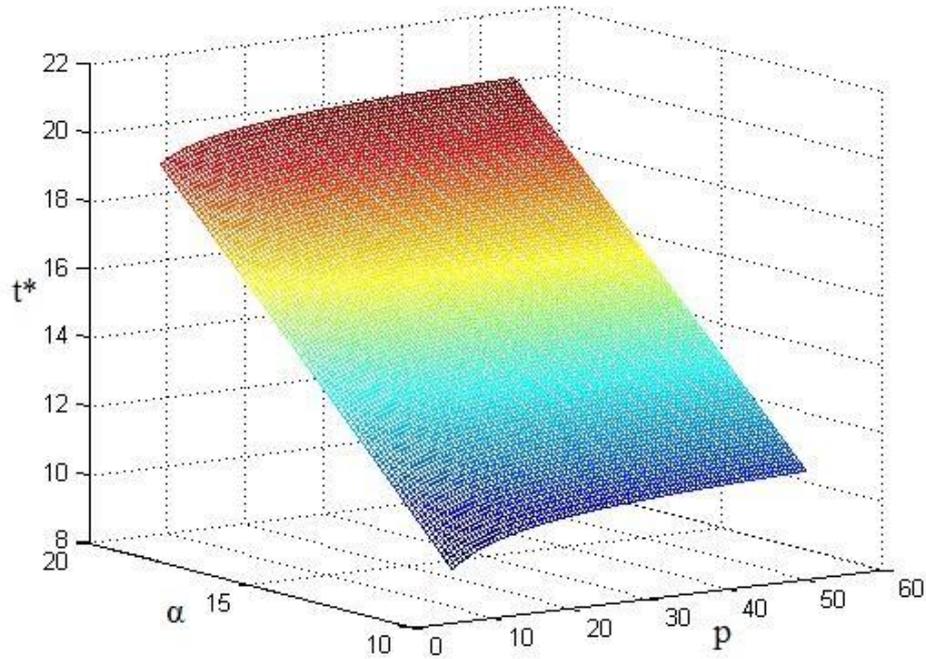


Рисунок 4.10 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров α и p
 Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

Таблица 4.11 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α и z .

$\alpha \backslash z$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	9,55	8,79	8,33	8,00	7,74	7,52	7,33	7,16	7,01	6,87
11	10,65	9,90	9,44	9,11	8,86	8,64	8,45	8,28	8,13	8,00
12	11,73	11,00	10,54	10,21	9,95	9,74	9,56	9,39	9,24	9,11
13	12,81	12,09	11,63	11,30	11,04	10,84	10,65	10,49	10,34	10,21
14	13,88	13,17	12,71	12,38	12,13	11,92	11,74	11,58	11,44	11,30
15	14,94	14,25	13,79	13,46	13,21	13,00	12,82	12,67	12,52	12,39
16	16,00	15,32	14,87	14,54	14,28	14,07	13,90	13,74	13,60	13,47
17	17,05	16,38	15,94	15,61	15,35	15,14	14,97	14,81	14,68	14,55
18	18,10	17,44	17,00	16,67	16,41	16,21	16,03	15,88	15,74	15,62
19	19,15	18,50	18,06	17,73	17,48	17,27	17,09	16,94	16,81	16,68

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

В таблице 4.11 исследуем влияние прогнозируемого времени обнуления запаса товара α и удельной прибыли от реализации товара z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере цена удельных складских издержек единичного объема товара $p = 5$ усл. ед., а случайная величина Δt описывается

треугольным законом распределения с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.11.

На рисунке 4.11, полученном с помощью функции `num5()` на языке MATLAB (Приложение Г), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров α и z . Чем раньше ожидается, что закончится товар на складе и чем больше ожидаемая цена на товар, тем и раньше следует назначить момент поставки.

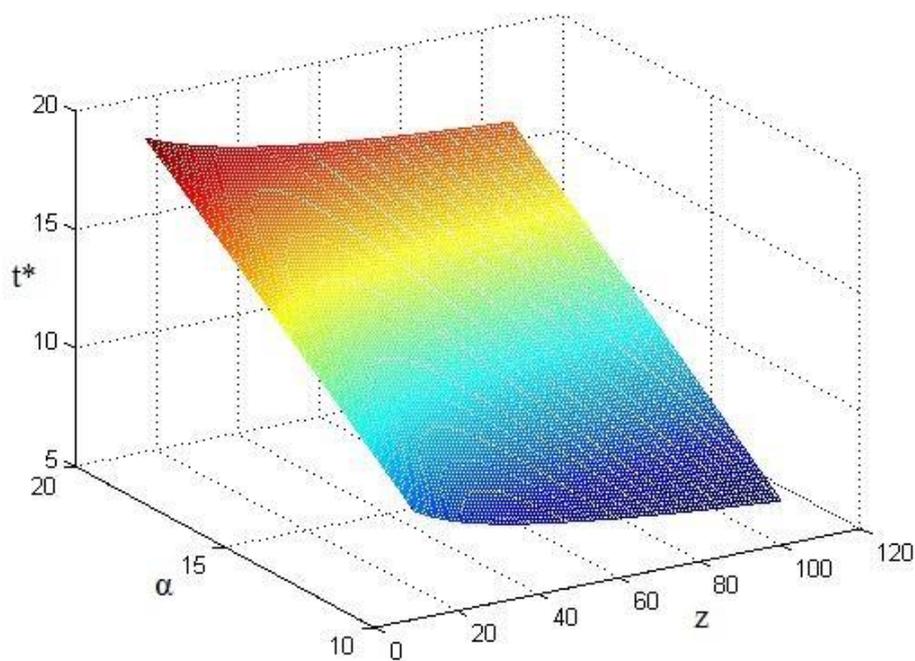


Рисунок 4.11 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров α и z
 Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

В таблице 4.12 исследуем влияние цены удельных складских издержек единичного объема товара p и удельной прибыли от реализации товара прибыли z на время завоза новой товарной партии t^* . Пусть в данном примере прогнозируемое время обнуления запаса товара $\alpha = 10$ дней, а случайная величина Δt описывается треугольным законом распределения распределена с параметрами $a = -2, b = 7, c = 2$. Расчеты представлены в таблице 4.12.

Таблица 4.12 - Расчет времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров p и z .

$p \backslash z$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5	9,55	8,79	8,33	8,00	7,74	7,52	7,33	7,16	7,01	6,87
10	10,19	9,55	9,12	8,79	8,54	8,33	8,15	8,00	7,87	7,74
15	10,50	9,94	9,55	9,25	9,00	8,79	8,62	8,46	8,33	8,21
20	10,69	10,19	9,83	9,55	9,32	9,12	8,94	8,79	8,66	8,54
25	10,82	10,37	10,04	9,77	9,55	9,36	9,19	9,05	8,91	8,79
30	10,92	10,50	10,19	9,94	9,73	9,55	9,39	9,25	9,12	9,00
35	11,00	10,61	10,31	10,08	9,88	9,70	9,55	9,41	9,29	9,17
40	11,06	10,69	10,42	10,19	10,00	9,83	9,68	9,55	9,43	9,32
45	11,12	10,76	10,50	10,29	10,10	9,94	9,80	9,67	9,55	9,44
50	11,16	10,82	10,57	10,37	10,19	10,04	9,90	9,77	9,66	9,55

* Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

На рисунке 4.12, полученном с помощью функции `surf()` на языке MATLAB (Приложение У), представлено изменение времени завоза новой товарной партии в зависимости от параметров p и z . Чем меньше ожидаемая цена на товар и чем больше цена за хранение, тем и позже следует назначить момент поставки.

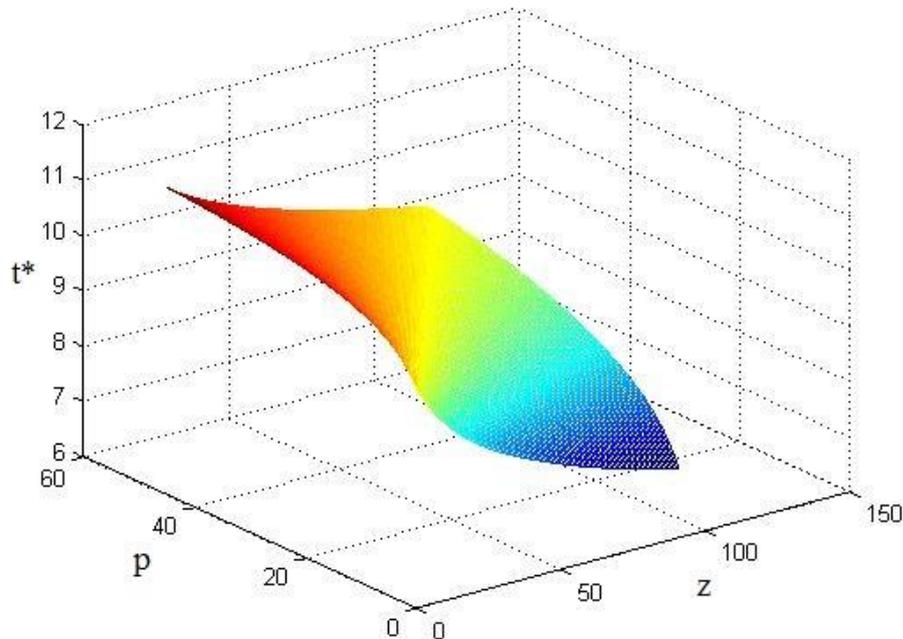


Рисунок 4.12 - Изменение времени завоза в зависимости от параметров p и z
 Источник: составлено автором на основе расчетов в программе Matlab

Таким образом, можно сделать вывод, что разработанные в главе 1 модель оптимизации момента поставки с учетом неопределенности времени поставки, является актуальной. Из полученной формулы (4.2) и из рисунков 4.7-4.12 видно, что зависимость оптимального момента поставки от таких параметров, как прогнозируемое время обнуления запаса товара на складе, цены удельных складских издержек единичного объема товара и удельной прибыли от реализации товара не является линейной, а значит, не могла быть получена без проведения исследования отраженного во второй главе данной диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование математического моделирования в системах управления запасами позволяет повысить уровень эффективности компании, но на сегодняшний день в России лишь некоторые крупные компании используют в практической деятельности оптимизационными методы и применяют стохастическое моделирование в условиях неопределенности спроса и времени поставки при принятии управленческих операционных решений.

В ходе диссертационного исследования, проанализировав существующие методы моделирования систем управления запасами, было выявлено, что у большинства рассматриваемых моделей поиск решения проводился не аналитическими, а численными методами и почти во всех исследованиях случайные характеристики моделей представлены равномерным или нормальным законами распределения, что часто не адекватно отражает реальную ситуацию. В диссертации рассмотрены актуальные постановки задач стохастического моделирования для минимизации издержек в системах управления запасами, учитывающие основные источники неопределенности в этой сфере, а именно, неопределенность спроса и неопределенность времени поставки.

Разработана модель, основанная на минимизации рисков дополнительных издержек хранения излишков продукции на складе и дефицита продукции, позволяет найти оптимальный момент поставки с учетом неопределенности спроса. В предположении, что неопределенность спроса определяется некоторой случайной величиной, распределенной по треугольному закону распределения, оптимизационная задача, лежащая в основе данной модели, имеет аналитическое решение, которое получена автором и представлено в данной работе.

Разработана модель, так же, как и первая, основана на минимизации рисков дополнительных издержек хранения излишков продукции на складе и дефицита

продукции, позволяет найти оптимальный момент поставки с учетом неопределенности времени поставки. Как и в первой модели, при предположении, что случайная величина отклонений во времени поставки распределена по треугольному закону, оптимизационная задача была решена автором аналитически.

В главе 2 представлены также модели оптимизации времени назначения поставки, которые ориентированы на учет рисков выплат неустоек в виде штрафов или пеня за нарушение договорных обязательств поставок. Следует отметить актуальность представленных моделей в связи с имеющей место тенденцией ужесточения договорных условий при работе с торговыми сетями. Представлены аналитические решения оптимизационных задач определения моментов назначения поставки в предположении о треугольном распределении случайных отклонений фактического времени поставки от договорного.

В диссертации автором разработана модель, основанная на минимизации рисков дополнительных издержек хранения излишков продукции на складе и дефицита продукции, которая позволяет найти оптимальный объем поставки с учетом неопределенности спроса, исходя из критерия минимума возникающих дополнительных издержек хранения и дефицита. Автором получено аналитическое решение данной оптимизационной задачи в предположении треугольного распределения отклонений фактического спроса от прогнозируемого.

В третьей главе диссертационного исследования автор представил модель минимизации рисков дополнительных издержек хранения излишков продукции на складе и дефицита продукции, которая позволяет найти оптимальный объем поставки с учетом неопределенности времени поставки. Как и в предыдущих моделях автором получено аналитическое решение оптимизационной задачи определения объема заказа в предположении о треугольном распределении случайных величин отклонений в сроках поставки.

В третьей главе диссертации представлены, разработанные автором модели, учитывающие риски потери клиентов в результате неудовлетворенности спроса,

как для товаров с длительными сроками хранения, так и для товаров с ограниченными сроками хранения. Представлено аналитическое решение оптимизационных задач для случая треугольных распределений.

Использование треугольных законов распределения является общепризнанной практикой, что, как обосновано в диссертационном исследовании, позволяет воспользоваться результатами оптимизационного моделирования и при отсутствии статистических данных, а для определения параметров распределения использовать, например, оценки экспертов.

Разработанные в диссертации системы оптимизационных моделей могут быть полезны для построения научно обоснованной бизнес-стратегии управления товарными запасами торгового или производственного предприятия. Они могут составлять основу информационных систем поддержки принятия решений управления запасами. Практическое использование разработанных моделей позволит снизить общие издержки за счет оптимизации параметров системы управления запасами, тем самым увеличить прибыль торговых и производственных компаний, что в свою очередь ведет к повышению их конкурентоспособности.

В качестве дальнейших научных исследований в этом направлении планируется рассмотрение модели, основанную на минимизации рисков дополнительных издержек хранения излишков продукции на складе и дефицита продукции, позволяющую найти оптимальный момент поставки или оптимальный объем поставки с учетом одновременной неопределенности спроса и времени поставки, где неопределенность спроса и времени поставки определяются некоторыми случайными величинами, распределенными как по треугольному закону распределения, так и с учетом иных практически важных законов распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникин, Б. А. Коммерческая логистика / Б. А. Аникин, А. П. Тяпухин. – М. : Проспект, 2012. – 432 с.
2. Аникин, Б. А. Логистика: учебное пособие / Б. А. Аникин. – М. : ИНФРА-М, 1999. – 327 с.
3. Антипенко, В. С. Задачи управления запасами со случайным спросом и случайным временем задержки / В. С. Антипенко, Г. Б. Кац // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 7. – С. 178–182.
4. Бауэрсокс, Д. Дж. Логистика. Интегрированная цепь поставок / Д. Дж. Бауэрсокс, Д. Дж. Клосс – М. : ЗАО «ОЛИМП-БИЗНЕС», 2005. – 640 с.
5. Беседина, В. Н. Основы логистики в торговле: учебное пособие / В. Н. Беседина, А. А. Демченко. – М. : Экономистъ, 2005. – 157 с.
6. Бродецкая, Н. Г. Оптимизация системы управления запасами в условиях неопределенности с учетом временной стоимости денег / Н. Г. Бродецкая, Г. Л. Бродецкий // Логистика сегодня. – 2008. – № 1 (25). – С. 32-48.
7. Бродецкий, Г. Л. Методы стохастической оптимизации Математические модели управления запасами: учеб. пособие / Бродецкий Г. Л. – М. : РЭА, 2004. – 324 с.
8. Бродецкий, Г.Л. Управление запасами: учебное пособие / Г.Л. Бродецкий – М. : Эксмо, 2007. – 400 с.
9. Бродецкий, Г. Л. Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределенности / Г.Л. Бродецкий. – М. : Академия, 2010. – 336 с.
10. Бродецкий, Г. Л. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации / Г. Л. Бродецкий, Д. А. Гусев. – М. : Академия, 2012. – 288 с.

11. Бродецкий, Г. Л. Модификация экономического размера заказа при управлении запасами для предприятий мясоперерабатывающей отрасли / Г. Л. Бродецкий, Е. В. Токарева. // Логистика и управление цепями поставок. – 2008. – № 3. – С 49-61.
12. Букан, Дж. Научное управление запасами / Пер. с англ. Дж. Букан, Э. Кенигсберг. – М. : Наука, 1967. – 424 с.
13. Бухвалова, В. В. Определение оптимальных объемов производства в условиях информационной неопределенности спроса / В. В. Бухвалова, А. В. Петрусевиц // Экономика и математические методы. – 2011. – 47 (2). – С. 3–23.
14. Быков, А. С. Оптимизация запасов на основе имитационного моделирования / А. С. Быков // Логистика. – 2004. – № 1. – С. 19-21.
15. Вегера, М. В. Система моделей управления запасами в логистических системах: дисс.-канд. экон. наук: 08.00.13 / Вегера Максим Владимирович – М. : 2008. – 139 с.
16. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Сов Радио, 1972. – 551 с.
17. Военный энциклопедический лексикон. - Санкт-Петербург, 1850. – 757 с.
18. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 471 с.
19. Гаджинский, А. М. Логистика: учебник для высших и средних специальных заведений. – 5-е изд., перераб. и доп. / А. М. Гаджинский. – М. : Издательско-книготорговый центр «Маркетинг», 2002. – 408 с.
20. Глухов, В. В. Математические методы и модели для менеджмента / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробко. – СПб. : Лань, 2000. – 528 с.
21. Голдсби, Т. Бережливое производство и 6 сигм в логистике. Руководство по оптимизации логистических процессов / Т. Голдсби, Р. Мартиченко – Изд-во: ГревцовПаблшер, 2009. – 416 с.

22. Гольдштейн, Е. Г. Математический аппарат экономического моделирования / Е. Г. Гольдштейн. – М. : Наука, 1983. – 276 с.
23. Грищенко, Д. А. Анализ методов моделирования и прогнозирования оттока клиентов / Д. А. Грищенко, А. В. Катаев // Вестник науки и образования. – 2018. – т. 2. – № 5(41). – С. 21-23.
24. Грибанова, Е. Б. Алгоритмические имитационные модели управления материальными запасами на складе / Е. Б. Грибанова, А. А. Мицель // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – № 8. – С. 201-207.
25. Гаджинский А. М. Управление запасами компании / А. М. Гаджинский // Справочник экономиста. - 2008. - N 9. - С. 118-127.
26. Данилов А. Д. Повышение эффективности системы управления запасами материалов на мебельном предприятии / А. Д. Данилов // Деревообрабатывающая промышленность. – 2003. - N 5. - С. 11-13.
27. Домбровский, В. В. Математическая модель управления запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках / В. В. Домбровский, Е. В. Чаусова // Вестник томского государственного университета. – 2000. – № 271. – С. 141-146.
28. Дубров, А. М. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталева. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 224 с.
29. Дыбская, В. В. Логистика складирования / В. В. Дыбская. – М.: ГУ ВШЭ, 1999. – 232 с.
30. Емельянов, А. А. Имитационное моделирование экономических процессов / А. А. Емельянов, Е. А. Власова, Р. В. Дума. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 416 с.
31. Зеваков, А.М., Логистика производственных и товарных запасов : учебник / А.М. Зеваков, В.В. Петров. – СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2002. – 320 с.
32. Иваненко, В. И. Проблемы неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. – Киев : Наукова думка, 1990. – 136 с.

33. Иванов, В. Б. Автоматизированное управление запасами предприятия / В. Б. Иванов, Г. Г. Куликов, Я. А. Речкалов. - Уфа, 2002. – 320 с.
34. Ильин, В. А. Математический анализ. 2-е изд., перераб. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – Ч. 1. – 662 с.
35. Исупова, Е. В. Моделирование системы управления товарными запасами и потоками торгово-посреднической организации: дисс. канд. экон. наук: 08.00.13 / Исупова Елена Валентиновна. – М., 2009. – 140 с.
36. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М. : Физматлит, 2004. – 264 с.
37. Карнаухов, С. Б. Концепции логистики. Системный анализ / С. Б. Карнаухов. – М. : Изд-во Российской экономической академии, 2003. – 162 с.
38. Кокин, А. С. Финансовый менеджмент. 2-е изд. / А. С. Кокин, В. Н. Ясенев. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 511 с.
39. Колобова, А. А. Моделирование производственно-сбытовых систем и процессов управления / Под ред. А. А. Колобова, Л. Ф. Шкляренко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993. -216 с.
40. Корсаков, А. А. Основы логистики: учебное пособие / А. А. Корсаков. – М. : МЭСИ, 2005. – 69 с.
41. Косоруков, О. А. Методы количественного анализа в бизнесе: учебник / О. А. Косоруков. – М. : ИНФРА-М, 2005. – 368 с.
42. Косоруков, О. А. Имитационное моделирование в стохастической задаче управления запасами / О. А. Косоруков, О. А. Свиридова // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – 2013. – № 2. – С. 147-149.
43. Косоруков, О. А. Стохастическая непрерывная модель управления запасами / О. А. Косоруков, О. А. Свиридова // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. – 2012. – № 4 (46). – С. 91-95.
44. Косоруков, О. А. Модель минимизации издержек в системах управления запасами с учетом неопределенности спроса / О. А. Косоруков, О. А.

Свиридова // Логистика и управления цепями поставок. – 2009. – № 5 (34). – С. 52-58.

45. Косоруков, О. А. Модель минимизации издержек в системах управления запасами / О. А. Косоруков, О. А. Свиридова // Вестник Российской экономической академии имени Г.В. Плеханова. – 2009. – № 6 (30). – С. 94-102.

46. Косоруков, О. А. Учет неопределенности спроса при оптимизации системы управления запасами / О. А. Косоруков, О. А. Свиридова // Логистика. – 2012. – № 6 (67). – С. 12-13.

47. Косоруков, О. А. Модели минимизации издержек в системах управления запасами с учетом неопределенности спроса и времени поставок / О. А. Косоруков, О. А. Свиридова // Актуальные проблемы экономики и управления современной России : сб. статей конференции Пермского института экономики и финансов. – 2009. – Вып. 3. – С. 197-198.

48. Косоруков, О. А. Некоторые аспекты моделирования спроса в имитационных моделях управления запасами / О. А. Косоруков, Д. А. Максимов, Е. Д. Шимченко // Логистика. – 2014. – № 12. – С. 48-50.

49. Карпенко, В. Д. Управление товарным запасом компании в условиях меняющегося рынка / В. Д. Карпенко // Логистика. – 2014. – № 5. – С. 34–37.

50. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2004. – 407 с.

51. Кристофер, М. Логистика и управление цепочками поставок / М. Кристофер. – М. : Питер, 2004. – 320 с.

52. Кузнецов, Д. Н. Оптимизация затрат в системе управления запасами торгового предприятия в краткосрочной перспективе. дис. ... канд. экон. наук 08.00.13 / Кузнецов Дмитрий Николаевич. – Тамбов, 2007. – 193 с.

53. Лукинский, В. С. Модели и методы теории логистики: Учебное пособие 2-е изд. / под ред. В. С. Лукинского. – СПб. : Питер, 2007. – 448 с.

54. Лю, Б. Теория и практики неопределенного программирования / Б. Лю; пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 416 с.
55. Мандель, А. С. Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Нормативная модель / А. С. Мандель // Проблемы управления. – 2011. – Ч. 1. – № 6. – С. 47-51.
56. Мандель, А. С. Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Ч. II. Создание страховых запасов / А. С. Мандель // Проблемы управления. – 2012. – Ч. 2. – № 1. – С. 42–46.
57. Маслов, С. Е. Модель определения времени поставки с учетом неопределенности спроса / С. Е. Маслов, О. А. Косоруков // Логистика и управление цепями поставок. – 2018. – № 4 (87). – С. 45-52.
58. Маслов, С. Е. Расчет оптимального момента поставки с учетом неопределенности спроса / С. Е. Маслов // Логистика и управление цепями поставок. – 2018. – № 5 (88). – С. 82-90.
59. Маслов, С. Е. Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности спроса / С. Е. Маслов, О. А. Косоруков // Финансовая экономика. – 2019. – № 1. – С. 191-197.
60. Маслов, С. Е. Модель оптимизации объема поставки с учетом неопределенности времени поставки / С. Е. Маслов // Финансовая экономика. – 2019. – № 1. – С. 507-512.
61. Маслов, С. Е. Стохастическая модель оптимального выбора объема поставки / С. Е. Маслов // Актуальные вопросы экономических наук и современного менеджмента: сб. ст. по матер. XVII-XVIII междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск : СибАК. – 2019. – № 1(12). – С. 32-42.
62. Маслов, С. Е. Оптимизация объема закупки с учетом смещения времени поставки. / С. Е. Маслов // Научный диалог: Экономика и менеджмент: сб. ст. по матер. XIX междунар. науч.-практ. конф. – СПб. : – 2019. – С. 26-33.

63. Маслов, С. Е. Оптимизация момента поставки в условиях неопределенности / С. Е. Маслов // Финансовая экономика. – 2019. – № 2. – С. 191-197.
64. Маслов, С. Е. Модели оптимизации времени и объема поставки в условиях неопределенности с учетом рисков неустоек и потери клиентов / С. Е. Маслов, О.А. Косоруков // Финансовая экономика. – 2019. – № 3. – С. 473-479.
65. Мельников, Р. В. Исследование проблем управления запасом непрерывного продукта в стохастической модели регенерации: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05 / Мельников Роман Витальевич. – М., 2010. – 175 с.
66. Мешкова, Л. Л. Логистика в сфере материальных услуг (на примере снабженческо-заготовительных и транспортных услуг). 2-е изд. испр. и перераб / Л. Л. Мешкова, И. И. Белоус, Н. М. Фролов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. – 188 с.
67. Мицель, А. А. Трехпродуктовая модель управления запасами со случайным спросом / А. А. Мицель, Л. Г. Ставчук // Экономический анализ: теория и практика. – 2017. – Т. 16. – № 3. – С. 561–572.
68. Николайчук, В. С. Транспортно-складская логистика. : учебное пособие / В. С. Николайчук. – М. : Издательский дом "Дашков и К", 2006. - 452 с.
69. Первозванская, Т. Н. Элементы теории управления запасами / Т. Н. Первозванская, А.А. Первозванский. – Ленинград : Лань, 1983. – 109 с.
70. Первозванский, А. А. Математические модели в управлении производством / А. А. Первозванский. – М. : Наука, 1975. – 616 с.
71. Петрусевич, А. В. Оптимальное управление объемами выпуска в условиях неопределенности спроса / А. В. Петрусевич // Российский журнал менеджмента. – 2011. – т. 9. – № 4. – С. 35-50.
72. Просветов, Г. И. Математические методы в логистике. Задачи и решения / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2008. – 304 с.
73. Просветов, Г. И. Управление запасами. Задачи и решения / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 192 с.

74. Проценко, О. Д. Логистика и управление цепями поставок - взгляд в будущее. Макроэкономический аспект / О. Д. Проценко, И. О. Проценко. – М. : Издательский дом "Дело" РАНХиГС, 2012. – 192 с.
75. Родников, А. Н. Логистика: Терминологический словарь / А. Н. Родников. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 251 с.
76. Рубальский, Г. Б. Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем) / Г.Б. Рубальский. – М. : Сов. Радио, 1977. – 160 с.
77. Рыжиков, Ю. И. Теория очередей и управления запасами / Ю. И. Рыжиков. –СПб. : Питер, 2001. 384 с.
78. Рябов А. Н. Династия Жомини на службе России / А. Н. Рябов. – Н.Новгород, Саранск. : Типография «Красный Октябрь», 2015. – 200 с.
79. Савчук, В. П. Диагностика предприятия: поддержка управленческих решений / В. П. Савчук. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 175 с.
80. Саульев, В. К. Математическая теория оптимального управления запасами: конспект лекций / В. К. Саульев, А.С. Лавренченко. – М. : МАИ, 1974. – 93 с.
81. Свиридова, О. А. Стохастические модели оптимизации управления запасами торговых организаций: дис. канд.экон.наук : 08.00.13 / Свиридова Ольга Александровна. – М., 2015. – 148 с.
82. Свиридова, О. А. Детерминированная и стохастическая модели минимизации издержек в системах управления запасами / О. А. Свиридова // Логистика. – 2011. – № 4(57). – С. 28-30.
83. Свиридова, О. А. Математические модели и методы теории управления запасами. Виды и классификации / О. А. Свиридова // Логистика. – 2010. – № 4(53). – С. 21-22.
84. Свиридова, О. А. Имитационные модели в задачах управления запасами / О. А. Свиридова // Электронный научный журнал Известия РЭУ им. Г.В. Плеханова. – 2011. – № 2. – С. 127-135.

85. Серая О. В., Клименко Т. А., Самородов В. Б. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами / О. В. Серая, Т. А. Клименко, В. Б. Самородов // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2009. – № 45. – С. 31-34.

86. Сергеев, В. И. Системы и логистика: информационные системы и технологии / В. И. Сергеев, М. Н. Григорьев, С. А. Уваров. – М. : Альфа - пресс, 2008. – 607 с.

87. Смехов, А. А. Введение в логистику / А. А. Смехов. – М. : Транспорт, 1993. – 112 с.

88. Смехов, А. А. Основы транспортной логистики: учебник для вузов / А. А. Смехов. – М. : Транспорт, 1995 – 197 с.

89. Сосненко Л. С. Анализ материально-производственных запасов / Л. С. Сосненко // Экономический анализ: теория и практика. – 2007. - N 3. - С. 2-15.

90. Степанов, В. И. Логистика в товароведении / В. И. Степанов. – М. : Академия, 2007. – 272 с.

91. Стерлигова, А. Н. Систематизация элементов моделей управления запасами в звеньях цепей поставок / А. Н. Стерлигова // Логистика и управление цепями поставок. – 2005. – № 4. – С. 36-54.

92. Тектов, Д.А. Динамические и статистические модели управления запасами в розничной торговле: дисс. ... канд.экон.наук: 08.00.13 / Тектов Денис Анатольевич. – СПб., 2003. – 159 с.

93. Титов, В. В. Управление серийным производством на предприятиях машиностроения в условиях неопределенности спроса на продукцию / В. В. Титов, И. В. Цомаева // Экономические науки. Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2012. – № 2. – С. 101-106.

94. Фараонов, А. Е. Экономико-математическое моделирование финансовых потоков при решении задач управления запасами: дисс. ... канд.экон.наук: 08.00.13 / Фараонов Александр Евгеньевич. – СПб., 2006. – 138 с.

95. Фасоляк, Н. Д. Управление производственными запасами / Н. Д. Фасоляк. – М. : Экономика, 2012. – 272 с.
96. Цвиринько, И. А. Методология, методы и модели управления логистическими бизнес-процессами / И. А. Цвиринько. – СПб. : СПбГИЭУ, 2003. – 262 с.
97. Шапиро, Дж. Моделирование цепи поставок / пер. с англ. под ред. В. С. Лукинського. – СПб. : Питер, 2006. – 720 с.
98. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. 2-е изд. / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. – М. : Дело, 2002. – 440 с.
99. Шрайбфедер, Дж. Эффективное управление запасами / Дж. Шрайбфедер; пер. с англ. 2-е изд. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.
100. Хедли, Дж. Анализ систем управления запасами / Дж. Хедли, Т. Уайтин. Перевод с английского. – М. : Наука, 2009. – 508 с.
101. Юденков, А. В. Математическое программирование в экономике / А. В. Юденков, М. И. Дли, В. В.Круглов. – М. : Финансы и статистика, 2010. – 240 с.
102. Юдин, Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М., Сов.радио, 1974. – 400 с.
103. Яни, Е. Е. Алгоритмы оптимизации системы управления запасами в условиях неопределенности / Е. Е. Яни // Молодой ученый. – 2017. – №15. – С. 112-118.
104. Arreola-Risa, A. Inventory Management Under Random Supply Disruptions and Partial Backorders / Arreola-Risa A., DeCroix G. A. // Naval Research Logistics (NRL). – 1998, – vol. 45. – № 7. – P. 687-703.
105. Agarwal, G. Supply chain risk management: review, classification and future research directions / G. Agarwal, P. Singhal, M. Mittal // International Journal of Business Science and Applied Management. – 2011. – Vol. 6. – Issue 3. – P. 15-42.
106. Aggoun, L. On a stochastic inventory model with deteriorating items / L. Aggoun, L. Benkherouf, L. Tadj // IJMMS. – 2001. – V. 25. – № 3. – P. 197-203.

107. Alkhedher, M.J. Stochastic inventory model for imperfect production processes / M.J. Alkhedher, M.A. Darwish, A.R. Alenezi // *Logistics Systems and Management*. – 2013. – Vol. 15, No. 1. – P. 32-46.
108. Buzacott, J. A. Economic order quantities with inflation / J. A. Buzacott // *Operational Research Quarterly*. – 1975. – Vol. 26. – P. 553-558.
109. Chang, C-T. Optimal ordering policies for deteriorating items using a discounted cash-flow analysis when a trade credit is limited to order quantity / C-T. Chang, L-Y. Ouyang, J-T. Teng, M-C. Cheng // *Computers & Industrial Engineering*. – 2010. – Vol. 59. – P. 770- 777.
110. Chican, A. Inventory models / A. Chican. -Ed. Akademiai kiado, Budapest, 1990. – 419 pp.
111. Chung, K-J. The optimal ordering policy of EOQ model under trade credit depending on the ordering quantity from the DCF approach. / K-J. Chung, J.J. Liao // *European Journal of Operational Research*. – 2009. – Vol. 196. – P. 563-568.
112. Darwish, M.A. Stochastic inventory model with finite production rate and partial backorders / M.A. Darwish, Suresh Kumar Goyal; A.R. Alenezi // *International Journal of Logistics Systems and Management (IJLSM)*. – 2014. – Vol. 17. – № 3. – P. 289-302
113. Hung, K.C. Continuous review inventory models under time value of money and crashable lead time consideration / K.C. Hung // *Yugoslav Journal of Operations Research*. – 2011. – Vol. 21. – № 2. – P.293-306.
114. Jia-Qin, H. A. O. An EOQ Model with Stock-Dependent Demand under Two Levels of Trade Credit and Time Value of Money / H. A. O. Jia-Qin, M. O. Jiangtao // *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*. – 2013. – № 5(18). – P. 4524-4529.
115. Jesse, R. R. EOQ formula: is it valid under inflationary conditions / R. R. Jesse, J. A. Mitra, J. F. Cox // *Decisions Sciences*. – 1983. – Vol. 14. – P. 370-374.
116. Kosorukov, O. A. Effective Strategy Formation Models for Inventory Management under the Conditions of Uncertainty, *International Education* / O. A.

Kosorukov, O. A. Sviridova // *International Education Studies*. – 2015. – Vol. 8. – № 5. – P. 64 – 83.

117. Kosorukov, O. A. Optimization Problems of Transportation in Communication Networks with Variable Capacities / Kosorukov O. A. // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2016. – Vol. 55. – No. 6. – P. 1010-1015.

118. Kopytov, E. Modelling of two strategies in inventory control system with random lead time and demand / E. Kopytov, L. Greenglaz, A. Muravyov, E.P uzinkevich // *Computer Modelling and New Technologies*. – 2007. – Vol. 1. – №. 1. – P. 21-30.

119. Kopytov, E. Investigation of two strategies in inventory control system with random parameters / E. Kopytov, A. Muravjov, L. Greenglaz, G.Burakov // *Proceedings of the 21st European Conference on Modelling and Simulation (ECMS 2007)*. (June 4-6, 2007) - Prague, Check Republic: Thomas Bata University in Zlin, 2007. – P. 566-571.

120. Liao, H. An inventory model with deteriorating items under inflation when a delay in payment is permissible / H. Liao, C. Tsai, C. Su // *International Journal of Production Economics*. – 2000. – Vol. 63. – P. 207-214.

121. Lo, M. Economic ordering quantity model with lead time reduction and backorder price discount for stochastic demand / M. Lo // *American Journal of Applied Sciences*. – 2009. – Vol. 6. – № 3. – P. 387-392.

122. Maslov, S.E. Model of optimizing the delivery moment taking into account the uncertainty of demand / S.E. Maslov, O.A. Kosorukov, *Journal of Social Sciences Research*. – 2018. – Issue 3. – P. 135-143.

123. Moon, I. The effects of inflation and time value of money on an economic order quantity model with a random product life cycle / I. Moon, S. Lee // *European Journal of Operational Research*. – 2000. – Vol. 125. – P. 588-601.

124. Roy, T. A finite time-horizon EOQ model with ramp-type demand rate under inflation and time-discounting / T. Roy, K. S. Chaudhuri // *Int. J. Operational Research*. – 2011. – Vol. 11. – № 1. – P.100-118.

125. Tan, Y. Optimal stochastic inventory control with deterioration and partial backlogging/service-level constraints / Y. Tan, M. X. Weng // International Journal of Operational Research (IJOR). – 2013. – Vol. 16. – № 2. – P. 241-261.

126. Chen, X. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Infinite Horizon Case / X. Chen, D. Simchi-Levi // Mathematics of Operations Research. – 2004. – vol. 29. – № 3. – P. 698-723.

Приложение А

(обязательное)

Обоснование формулы (2.41)

$$\begin{aligned}
 F_{D_1}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \cdot \\
 &\cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (t^* + \Delta t - \alpha)(\Delta t - a) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_a^c a(\alpha - t^*) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot d\Delta t + \int_a^c (t^* - \alpha - a)\Delta t d\Delta t + \int_a^c \Delta t^2 d\Delta t \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b(t^* - \alpha) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \int_c^b (\alpha - t^* + b) \cdot \Delta t d\Delta t - \int_c^b \Delta t^2 d\Delta t \right) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(\alpha - t^*) \cdot \right. \\
 &\cdot \Delta t|_a^c + \frac{1}{2}(t^* - \alpha - a)\Delta t^2|_a^c + \frac{1}{3}\Delta t^3|_a^c) + \frac{1}{(b-c)} \left(b(t^* - \alpha)\Delta t|_c^b + \frac{1}{2}(\alpha - \right. \\
 &- t^* + b)\Delta t^2|_c^b - \frac{1}{3}\Delta t^3|_c^b) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left((a\alpha - at^*)(c-a) + \frac{1}{2}(t^* - \right. \right. \\
 &- \alpha - a)(c-a)(c+a) + \frac{1}{3}(c-a)(c^2 + ac + a^2) \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} ((bt^* - ba) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (b - c) + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)(b - c)(b + c) - \frac{1}{3}(b - c)(b^2 + bc + c^2) \Big) \Big] = \\
& = \frac{2K_1}{(b - a)} \left[a\alpha - at^* - \frac{1}{2}c\alpha - \frac{1}{2}a\alpha + \frac{1}{2}t^*c + \frac{1}{2}t^*a - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}c^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{3}ac + \frac{1}{3}a^2 - b\alpha + bt^* + \frac{1}{2}b\alpha + \frac{1}{2}c\alpha - \frac{1}{2}t^*b - \frac{1}{2}t^*c + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{3}c^2 \right] = \frac{2K_1}{(b - a)} \left[-\frac{1}{2}b\alpha + \frac{1}{2}a\alpha - \frac{1}{2}at^* + \frac{1}{2}bt^* - \frac{1}{6}ac + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6}bc - \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}b^2 \right] = \frac{2K_1}{(b - a)} \left[\frac{1}{2}\alpha(a - b) + \frac{1}{2}t^*(b - a) + \frac{1}{6}c(b - a) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6}(b - a)(b + a) \right] = \frac{2K_1}{(b - a)} \frac{1}{6}(b - a)(3t^* + a + b + c - 3\alpha) = \\
& = \frac{K_1}{3}(3t^* + a + b + c - 3\alpha).
\end{aligned}$$

Приложение Б

(обязательное)

Обоснование формулы (2.42)

$$\begin{aligned}
 F_{D_2}(t^*) &= \int_{\alpha-t^*}^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha_0}}_{K_1} z(t^* + \Delta t - \alpha) \cdot \\
 &\cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_{\alpha-t^*}^c (t^* + \Delta t - \alpha)(\Delta t - a) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_{\alpha-t^*}^c a(\alpha - t^*) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot d\Delta t + \int_{\alpha-t^*}^c (t^* - \alpha - a)\Delta t d\Delta t + \int_{\alpha-t^*}^c \Delta t^2 d\Delta t \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b(t^* - \alpha) \cdot \right. \\
 &\cdot d\Delta t + \int_c^b (\alpha - t^* + b)\Delta t d\Delta t - \int_c^b \Delta t^2 d\Delta t \left. \right) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(\alpha - t^*) \cdot \right. \\
 &\cdot \Delta t \Big|_{\alpha-t^*}^c + \frac{1}{2} (t^* - \alpha - a)\Delta t^2 \Big|_{\alpha-t^*}^c + \frac{1}{3} \Delta t^3 \Big|_{\alpha-t^*}^c \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} (b(t^* - \alpha)\Delta t \Big|_c^b + \\
 &+ \frac{1}{2} (\alpha - t^* + b)\Delta t^2 \Big|_c^b - \frac{1}{3} \Delta t^3 \Big|_c^b \left. \right) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} ((a\alpha - at^*)(c - \alpha + \right. \\
 &+ t^*) + \frac{1}{2} (t^* - \alpha - a)(c^2 - \alpha^2 + 2at^* - t^{*2}) + \frac{1}{3} c^3 - \frac{1}{3} \alpha^3 + \alpha^2 t^* - \alpha t^{*2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}t^{*3}) + \frac{1}{(b-c)}((bt^* - b\alpha)(b-c) + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)(b-c)(b+c) - \frac{1}{3} \cdot \\
& \cdot (b-c)(b^2 + bc + c^2)) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (aca\alpha - a\alpha^2 + at^*\alpha - act^* + \right. \\
& + at^*\alpha - at^{*2} + \frac{1}{2}t^*c^2 - \frac{1}{2}t^*\alpha^2 + at^{*2} - \frac{1}{2}t^{*3} - \frac{1}{2}c^2\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 - \alpha^2t^* + \\
& + \frac{1}{2}t^{*2}\alpha - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{2}a\alpha^2 - aat^* + \frac{1}{2}at^{*2} + \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2t^* - at^{*2} + \\
& + \frac{1}{3}t^{*3}) - b\alpha + bt^* + \frac{1}{2}b\alpha + \frac{1}{2}c\alpha - \frac{1}{2}t^*b - \frac{1}{2}t^*c + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{3}b^2 - \\
& \left. - \frac{1}{3}bc - \frac{1}{3}c^2 \right] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}(a+t^*)\alpha^2 + \left(\frac{1}{2}t^{*2} + at^* + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + ac - \frac{1}{2}c^2 \right) \alpha - \frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{2}t^{*2}a - act^* + \frac{1}{2}t^*c^2 - \frac{1}{2}ac^2 + \frac{1}{3}c^3 \right) + \frac{1}{6}(b - \\
& - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}\alpha^3 + \left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}t^* - \frac{1}{6}t^* + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c \right) \alpha^2 + \left(\frac{1}{3}t^{*2} + \frac{1}{6}t^{*2} + at^* + ac - \frac{2}{3}c^2 + \frac{1}{6}c^2 - \frac{2}{3}ct^* + \frac{1}{3}ct^* + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3}ct^* \right) \alpha - \frac{1}{6}(t^{*3} + 3t^{*2}a + 6act^* - 3t^*c^2 + 3ac^2 + 2c^3) \right) + \frac{1}{6}(b-c) \cdot \\
& \cdot (3t^* + b + 2c - 3\alpha) \Big] = \frac{2K_1}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{3}(t^* + c)\alpha^2 - \frac{1}{6}(t^* + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3a - 2c)\alpha^2 + \frac{1}{3}(t^* + c)(t^* + 3a - 2c)\alpha + \frac{1}{6}(t^* + c)^2\alpha - \frac{1}{6}(t^* + c)^2 \cdot \\
& \cdot (t^* + 3a - 2c) + \frac{1}{6}(b - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \Big] = \frac{2K_1}{(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} \left(\frac{1}{6} \cdot \right. \right. \\
& (\alpha^3 - 2(t^* + c)\alpha^2 + (t^* + c)^2\alpha) - \frac{1}{6}((t^* + 3a - 2c)\alpha^2 - 2(t^* + c)(t^* + \\
& + 3a - 2c)\alpha + (t^* + c)^2(t^* + 3a - 2c)) + \frac{1}{6}(b - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \Big] = \\
& = \frac{2K_1}{(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} \left(\frac{1}{6}\alpha(\alpha - t^* - c)^2 - \frac{1}{6}(t^* + 3a - 2c)(\alpha - t^* - c)^2 \right) + \frac{1}{6} \cdot \right. \\
& \cdot (b - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \Big] = \frac{K_1}{3(b - a)} \left[\frac{1}{(c - a)} (\alpha - t^* - c)^2 (\alpha - t^* - \right. \\
& \left. - 3a + 2c) + (b - c)(3t^* + b + 2c - 3\alpha) \right].
\end{aligned}$$

Приложение В

(обязательное)

Обоснование формулы (2.43)

$$\begin{aligned}
 F_{D_3}(t^*) &= \int_{\alpha-t^*}^b \frac{Q}{\underbrace{\alpha_0}_{K_1}} z(t^* + \Delta t - \alpha) \frac{2(b - \Delta t)}{(b - a)(b - c)} d\Delta t = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} \cdot \\
 &\cdot \int_{\alpha-t^*}^b (t^* + \Delta t - \alpha)(b - \Delta t) d\Delta t = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} \left[\int_{\alpha-t^*}^b b(t^* - \alpha) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \int_{\alpha-t^*}^b (\alpha - t^* + b)\Delta t d\Delta t - \int_{\alpha-t^*}^b \Delta t^2 d\Delta t \right] = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} [b(t^* - \alpha) \cdot \\
 &\cdot \Delta t|_{\alpha-t^*}^b + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)\Delta t^2|_{\alpha-t^*}^b - \frac{1}{3}\Delta t^3|_{\alpha-t^*}^b] = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} [(bt^* - \\
 &- b\alpha)(b - \alpha + t^*) + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)(b^2 - \alpha^2 + 2\alpha t^* - t^{*2}) - \frac{1}{3}(b^3 - \alpha^3 + \\
 &+ 3\alpha^2 t^* - 3\alpha t^{*2} + t^{*3})] = \frac{2K_1}{(b - a)(b - c)} [b^2 t^* - bt^* \alpha + bt^{*2} - b^2 \alpha + \\
 &+ b\alpha^2 - bt^* \alpha + \frac{1}{2}b^2 \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3 + t^* \alpha^2 - \frac{1}{2}t^{*2} \alpha - \frac{1}{2}t^* b^2 + \frac{1}{2}t^* \alpha^2 - t^{*2} \alpha + \\
 &+ \frac{1}{2}t^{*3} + \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{2}b\alpha^2 + bt^* \alpha - \frac{1}{2}bt^{*2} - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}\alpha^3 - t^* \alpha^2 + t^{*2} \alpha -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}t^{*3}] = \frac{2K_1}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}(t^* + b)\alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}b^2 - bt^* - \frac{1}{2}t^{*2} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \alpha + \frac{1}{6}(t^{*3} + 3bt^{*2} + 3b^2t^* + b^3) \left. \right] = \frac{2K_1}{(b-a)(b-c)} \left[-\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}(t^* + b) \cdot \right.$$

$$\cdot \alpha^2 - \frac{1}{2}(t^* + b)^2\alpha + \frac{1}{6}(t^* + b)^3 \left. \right] = \frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)} (\alpha - t^* - b)^3.$$

Приложение Г

(обязательное)

Обоснование формулы (2.47)

$$\begin{aligned}
 F_{I_2}(t^*) &= \int_a^{\alpha-t^*} \underbrace{pQ}_{K_2} (\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} \cdot \\
 &\cdot \int_a^{\alpha-t^*} (\alpha - t^* - \Delta t) (\Delta t - a) d\Delta t = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} \cdot \left[\int_a^{\alpha-t^*} a(t^* - \alpha) d\Delta t + \right. \\
 &\left. + \int_a^{\alpha-t^*} (\alpha - t^* + a) \Delta t d\Delta t - \int_a^{\alpha-t^*} \Delta t^2 d\Delta t \right] = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} [a(t^* - \alpha) \cdot \\
 &\cdot \Delta t|_a^{\alpha-t^*} + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + a) \Delta t^2|_a^{\alpha-t^*} - \frac{1}{3} \Delta t^3|_a^{\alpha-t^*}] = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} [(at^* - \\
 &- a\alpha)(\alpha - t^* - a) + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + a)(\alpha^2 - 2t^*\alpha + t^{*2} - a^2) - \frac{1}{3}\alpha^3 + t^*\alpha^2 - \\
 &- t^{*2}\alpha + \frac{1}{3}t^{*3} + \frac{1}{3}a^3] = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} [at^*\alpha - at^{*2} - a^2t^* - a\alpha^2 + \\
 &+ at^*\alpha + a^2\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 - t^*\alpha^2 + \frac{1}{2}t^{*2}\alpha - \frac{1}{2}a^2\alpha - \frac{1}{2}t^*\alpha^2 + t^{*2}\alpha - \frac{1}{2}t^{*3} + \\
 &+ \frac{1}{2}a^2t^* + \frac{1}{2}a\alpha^2 - at^*\alpha + \frac{1}{2}at^{*2} - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}\alpha^3 + t^*\alpha^2 - t^{*2}\alpha + \frac{1}{3}t^{*3} + \\
 &+ \frac{1}{3}a^3] = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{1}{6}\alpha^3 + \left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}t^*\right)\alpha^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 + at^* + \frac{1}{2}t^{*2}\right) \cdot \right.
 \end{aligned}$$

$$\cdot \alpha - \frac{1}{2}at^{*2} - \frac{1}{2}a^2t^* - \frac{1}{6}t^{*3} - \frac{1}{6}a^3 \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}(a+t^*) \cdot$$

$$\cdot \alpha^2 + \frac{1}{2}(a+t^*)^2\alpha - \frac{1}{6}(a+t^*)^3 \Big] = \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} (\alpha - a - t^*)^3.$$

Приложение Д

(обязательное)

Обоснование формулы (2.48)

$$\begin{aligned}
 F_{I_3}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^{\alpha-t^*} \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \cdot \\
 &\cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (\alpha - t^* - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^{\alpha-t^*} (\alpha - t^* - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_a^c a(t^* - \alpha) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot d\Delta t + \int_a^c (\alpha - t^* + a)\Delta t d\Delta t - \int_a^c \Delta t^2 d\Delta t \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^{\alpha-t^*} b(\alpha - t^*) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \int_c^{\alpha-t^*} (-\alpha + t^* - b)\Delta t d\Delta t + \int_c^{\alpha-t^*} \Delta t^2 d\Delta t \right) \left. \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(t^* - \alpha) \cdot \right. \\
 &\cdot \Delta t \Big|_a^c + \frac{1}{2}(\alpha - t^* + a)\Delta t^2 \Big|_a^c - \frac{1}{3}\Delta t^3 \Big|_a^c \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} (b(\alpha - t^*)\Delta t \Big|_c^{\alpha-t^*} - \frac{1}{2}(\alpha - \\
 &- t^* + a)\Delta t^2 \Big|_c^{\alpha-t^*} + \frac{1}{3}\Delta t^3 \Big|_c^{\alpha-t^*} \left. \right) \left. \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} ((at^* - aa)(c-a) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2}(\alpha - t^* + a)(c-a)(c+a) - \frac{1}{3}(c-a)(c^2 + ac + a^2) \right) + \frac{1}{(b-c)} ((ba -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -bt^*)(\alpha - t^* - c) - \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)(\alpha^2 - 2t^*\alpha + t^{*2} - c^2) + \frac{1}{3}\alpha^3 - \\
& -t^*\alpha^2 + t^{*2}\alpha - \frac{1}{3}t^{*3} - \frac{1}{3}c^3) \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[at^* - a\alpha + \frac{1}{2}c\alpha + \frac{1}{2}a\alpha - \frac{1}{2}t^*c - \right. \\
& - \frac{1}{2}t^*a + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}ac - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{(b-c)}(b\alpha^2 - bt^*\alpha - bc\alpha - \\
& - bt^*\alpha + t^{*2}b + bct^* - \frac{1}{2}\alpha^3 + t^*\alpha^2 - \frac{1}{2}t^{*2}\alpha + \frac{1}{2}c^2\alpha + \frac{1}{2}t^*\alpha^2 - t^{*2}\alpha + \\
& + \frac{1}{2}t^{*3} - \frac{1}{2}t^*c^2 - \frac{1}{2}b\alpha^2 + bt^*\alpha - \frac{1}{2}t^{*2}b + \frac{1}{2}bc^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - t^*\alpha^2 + t^{*2}\alpha - \\
& \left. - \frac{1}{3}t^{*3} - \frac{1}{3}c^3) \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{2}(c-a)\alpha + \frac{1}{6}(a-c)(3t^* + a + 2c) + \frac{1}{(b-c)} \cdot \right. \\
& \cdot \left(-\frac{1}{6}\alpha^3 + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}t^* \right) \alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}t^{*2} - bt^* - bc + \frac{1}{2}c^2 \right) \alpha + \frac{1}{6}t^{*3} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}t^{*2}b + bct^* - \frac{1}{2}t^*c^2 + \frac{1}{2}bc^2 - \frac{1}{3}c^3 \right) \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3t^* + a + \right. \\
& \left. + 2c - 3\alpha) + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6}\alpha^3 + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t^* + \frac{1}{6}t^* + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c \right) \alpha^2 + \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{2}t^{*2} - \frac{1}{2}t^*c + \frac{1}{2}t^*c - bt^* - bc + \frac{1}{2}c^2 \right) \alpha + \frac{1}{6}(t^* + c)^2(t^* + 3b - \right. \\
& \left. - 2c) \right) \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3t^* + a + 2c - 3\alpha) + \frac{1}{(b-c)} \left(-\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{3} \cdot \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (t^* + c)\alpha^2 + \frac{1}{6}(t^* + 3b - 2c)\alpha^2 - \frac{1}{3}(t^* + c)(t^* + 3b - 2c)\alpha - \frac{1}{6}(t^* + \\
& + c)^2\alpha + \frac{1}{6}(t^* + c)^2(t^* + 3b - 2c) \Big] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3t^* + a + 2c - \right. \\
& \left. - 3\alpha) + \frac{1}{(b-c)} \left(\frac{1}{6}(t^* + c)^2 - \frac{1}{3}(t^* + c)\alpha + \frac{1}{6}\alpha^2 \right) (t^* + 3b - 2c - \alpha) \right] = \\
& = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{6}(a-c)(3t^* + a + 2c - 3\alpha) + \frac{1}{6(b-c)}(t^* + c - \alpha)^2(t^* + 3b - \right. \\
& \left. - 2c - \alpha) \right].
\end{aligned}$$

Приложение Е

(обязательное)

Обоснование формулы (2.49)

$$\begin{aligned}
 F_{I_4}(t^*) &= \int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \frac{2(\Delta t - a)}{(b-a)(c-a)} d\Delta t + \int_c^b \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha - t^* - \Delta t) \cdot \\
 &\cdot \frac{2(b - \Delta t)}{(b-a)(b-c)} d\Delta t = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \int_a^c (\alpha - t^* - \Delta t)(\Delta t - a) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(b-c)} \int_c^b (\alpha - t^* - \Delta t)(b - \Delta t) d\Delta t \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left(\int_a^c a(t^* - \alpha) \cdot \right. \right. \\
 &\cdot d\Delta t + \int_a^c (\alpha - t^* + a) \Delta t d\Delta t - \int_a^c \Delta t^2 d\Delta t \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(\int_c^b b(\alpha - t^*) d\Delta t + \right. \\
 &+ \left. \int_c^b (-\alpha + t^* - b) \cdot \Delta t d\Delta t + \int_c^b \Delta t^2 d\Delta t \right) \left. \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (a(t^* - \alpha) \cdot \right. \\
 &\cdot \Delta t \Big|_a^c + \frac{1}{2} (\alpha - t^* + a) \Delta t^2 \Big|_a^c - \frac{1}{3} \Delta t^3 \Big|_a^c \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left(b(\alpha - t^*) \Delta t \Big|_c^b - \frac{1}{2} (\alpha - \right. \\
 &- t^* + a) \Delta t^2 \Big|_c^b + \frac{1}{3} \Delta t^3 \Big|_c^b \left. \right) \left. \right] = \frac{2K_2}{(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} \left((at^* - a\alpha)(c-a) + \frac{1}{2} (\alpha - \right. \right. \\
 &- t^* + a)(c-a)(c+a) - \frac{1}{3} (c-a)(c^2 + ac + a^2) \left. \right) + \frac{1}{(b-c)} \left((b\alpha - bt^*) \cdot \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (b - c) - \frac{1}{2}(\alpha - t^* + b)(b - c)(b + c) + \frac{1}{3}(b - c)(b^2 + bc + c^2) \Big) \Big] = \\
& = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[at^* - a\alpha + \frac{1}{2}c\alpha + \frac{1}{2}a\alpha - \frac{1}{2}t^*c - \frac{1}{2}t^*a + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}c^2 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3}ac - \frac{1}{3}a^2 + b\alpha - bt^* - \frac{1}{2}b\alpha - \frac{1}{2}c\alpha + \frac{1}{2}t^*b + \frac{1}{2}t^*c - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}bc + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}c^2 \right] = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[\frac{1}{2}b\alpha - \frac{1}{2}a\alpha + \frac{1}{2}at^* - \frac{1}{2}bt^* + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{6}bc + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{6}b^2 \right] = \frac{2K_2}{(b - a)} \left[\frac{1}{2}\alpha(b - a) + \frac{1}{2}t^*(a - b) + \frac{1}{6}c(a - b) + \frac{1}{6}(a - \right. \\
& \quad \left. - b)(a + b) \right] = \frac{2K_2}{(b - a)} \frac{1}{6} (a - b)(3t^* + a + b + c - 3\alpha) = \\
& = \frac{K_2}{3} (3\alpha - a - b - c - 3t^*).
\end{aligned}$$

Приложение И

(обязательное)

Обоснование формулы (2.54)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*} &= \frac{K_1}{3(b-a)} \left[\frac{1}{(c-a)} (-2)(\alpha - t^* - c)(\alpha - t^* - 3a + 2c) - \frac{1}{(c-a)} \cdot \right. \\
&\quad \cdot (\alpha - t^* - c)^2 + 3(b-c) \left. \right] - \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} 3(\alpha - a - t^*)^2 = \\
&= -\frac{K_1}{(b-a)(c-a)} \frac{2}{3} (\alpha^2 - 2\alpha t^* + c\alpha - 3a\alpha + t^{*2} - ct^* - 2c^2 + 3ac + \\
&\quad + 3at^*) - \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} (\alpha^2 - 2c\alpha - 2t^*\alpha + 2ct^* + c^2 + t^{*2}) + \frac{K_1}{(b-a)} \cdot \\
&\quad \cdot (b-c) - \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (\alpha^2 - 2a\alpha - 2t^*\alpha + 2at^* + a^2 + t^{*2}) = \\
&= -\frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (\alpha^2 - 2t^*\alpha - c^2 + t^{*2} - 2a\alpha + 2ac + 2at^* + a^2 - \\
&\quad - a^2) + \frac{K_1}{(b-a)} (b-c) - \frac{K_2}{(b-a)(c-a)} (\alpha^2 - 2a\alpha - 2t^*\alpha + 2at^* + a^2 + \\
&\quad + t^{*2}) = -\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} (\alpha^2 - 2a\alpha - 2t^*\alpha + a^2 + 2at^* + t^{*2}) + \\
&\quad + \frac{K_1}{(b-a)(c-a)} (a^2 - 2ac + c^2) + \frac{K_1}{(b-a)} (b-c) = -\frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(c-a)} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (\alpha^2 - 2\alpha(a + t^*) + (a + t^*)^2) + \frac{K_1c - K_1a + K_1b - K_1c}{(b - a)} = \\
& = -\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} (\alpha - a - t^*)^2 + \frac{K_1(b - a)}{(b - a)} = -\frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(c - a)} \cdot \\
& \cdot (\alpha - a - t^*)^2 + K_1.
\end{aligned}$$

Приложение К

(обязательное)

Обоснование формулы (2.56)

$$\begin{aligned}
 F_2(t_2^*) &= \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \left(\alpha - c - \alpha + a + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right)^2 (\alpha - \\
 &- 3a + 2c - \alpha + a + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1(b-c)}{3(b-a)} (3\alpha - 3a + b + 2c - \\
 &- 3\alpha - 3 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2}{3(b-a)(c-a)} (\alpha - a - \alpha + a + \\
 &+ \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}})^3 = \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} ((a-c)^2 + 2(a-c) \cdot \\
 &\cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}) (-2a + 2c + \\
 &+ \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \cdot \\
 &\cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2 K_1 (b-a)(c-a)}{3(b-a)(c-a)(K_1+K_2)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \cdot \\
& \cdot \left((c-a)^2 - 2(c-a) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) (2(c-a) + \\
& + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)(c-a)} \frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} (2(c-a) + \\
& + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 - \\
& - 3b \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) = \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)} \left((c-a) - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) \cdot \\
& \cdot \left(2(c-a) + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{K_1^2}{3(K_1+K_2)} \left((2(c-a) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_1}{3(b-a)} (b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 - 3b \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) = \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)}. \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)} \left(2(c-a)^2 - 3(c-a) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} \right) + \frac{2K_1^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \\
& \quad + \frac{K_1}{3(b-a)} \left(b^2 + bc - 3ab + 3ac - 2c^2 + 3(c-b) \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right) = \\
& = \frac{(K_1 K_2 + K_1^2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{2K_1^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1}{3(b-a)} (2c^2 - 4ac + \\
& \quad + 2a^2 - 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + 3a \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + b^2 + bc - 3ab + \\
& \quad + 3ac - 2c^2 + 3c \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} - 3b \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \Big) - \frac{2K_1}{3(b-a)}. \\
& \cdot \frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)} = \frac{K_1(K_1+K_2)}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{2K_1^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2K_1^2(c-a)}{3(K_1+K_2)} + \frac{K_1(b-a)c}{3(b-a)} + \frac{K_1(b-a)(-3)}{3(b-a)} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \\
& + \frac{K_1}{3(b-a)}(2a^2 - 3ab + b^2) = \frac{K_1}{3} \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1c}{3} - \\
& -K_1 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1}{3(b-a)}(b-a)(b-2a) = -\frac{2K_1}{3}. \\
& \cdot \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_1c}{3} + \frac{K_1b}{3} - \frac{2K_1a}{3} = \\
& = \frac{K_1}{3} \left(b + c - 2a - 2 \sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}} \right).
\end{aligned}$$

Приложение Л

(обязательное)

Обоснование формулы (2.58)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*} &= \frac{K_1}{3(b-a)(b-c)} 3(\alpha - t^* - b)^2 + \frac{K_2}{3(b-a)} \left[3(a-c) + \frac{1}{(b-c)} 2 \cdot \right. \\
 &\cdot (t^* + c - \alpha)(t^* + 3b - 2c - \alpha) + \left. \frac{1}{(b-c)} (t^* + c - \alpha)^2 \right] = \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} \cdot \\
 &\cdot (\alpha^2 - 2b\alpha - 2t^*\alpha + b^2 + 2bt^* + t^{*2}) + \frac{K_2(a-c)}{(b-a)} + \frac{2K_2}{3(b-a)(b-c)} \cdot \\
 &\cdot (t^{*2} + 3t^*b - 2t^*c - t^*\alpha + t^*c + 3bc - 2c^2 - c\alpha - t^*\alpha - 3b\alpha + 2c\alpha + \\
 &+ \alpha^2) + \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} (\alpha^2 - c\alpha - t^*\alpha - c\alpha + c^2 + t^*c - t^*\alpha + t^*c + \\
 &+ t^{*2}) = \frac{K_1}{(b-a)(b-c)} (\alpha^2 - 2b\alpha - 2t^*\alpha + b^2 + 2bt^* + t^{*2}) + \\
 &+ \frac{K_2(a-c)}{(b-a)} + \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} (\alpha^2 + 2bt^* - 2t^*\alpha + 2bc - c^2 - 2b\alpha + t^{*2} + \\
 &+ b^2 - b^2) = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (\alpha^2 - 2\alpha(b + t^*) + (b + t^*)^2) + \frac{K_2(a-c)}{(b-a)} - \\
 &- \frac{K_2}{(b-a)(b-c)} (b-c)^2 = \frac{(K_1 + K_2)}{(b-a)(b-c)} (\alpha - b - t^*)^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{K_2 a - K_2 c - K_2 b + K_2 c}{(b - a)} = \frac{(K_1 + K_2)}{(b - a)(b - c)} (\alpha - b - t^*)^2 - K_2.$$

Приложение М

(обязательное)

Обоснование формулы (2.60)

$$\begin{aligned}
 F_3(t_2^*) &= \frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)} \left(\alpha - \alpha + b - \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - b \right)^3 + \\
 &+ \frac{K_2}{3(b-a)} \left[(a-c) \left(3\alpha - 3b + 3\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + a + 2c - 3\alpha \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{(b-c)} \left(\alpha - b + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + c - \alpha \right)^2 (\alpha - b + 3b - 2c - \alpha + \\
 &+ \left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) \Big] = \frac{K_1 K_2 (b-a)(b-c)}{3(b-a)(b-c)(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \\
 &+ \frac{K_2}{3(b-a)} \left[(a-c) \left(a + 2c - 3b + 3\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{1}{(b-c)} (c - \right. \\
 &\quad \left. - b + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right)^2 \left(2b - 2c + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) \Big] = \\
 &= \frac{K_1 K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} (a^2 - ac + 2ac - 2c^2 - 3ab +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3bc + 3(a-c) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} ((c-b)^2 + 2(c-b) \\
& \quad -b) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \left(2(b-c) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) + \\
& \quad + \frac{K_2}{3(b-a)(b-c)} \frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)} \left(2(b-c) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) = \\
& = \frac{K_1K_2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} (a^2 + ac - 2c^2 - 3ab + 3bc + \\
& \quad + 3(a-c) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) + \frac{K_2}{3(b-a)} ((b-c) - 2 \cdot \\
& \quad \cdot \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}) \left(2(b-c) + \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) + \frac{2K_2^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \\
& \quad + \frac{K_2^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = \frac{K_1K_2 + K_2^2}{3(K_1+K_2)} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \\
& \quad + \frac{K_2}{3(b-a)} \left(a^2 + ac - 2c^2 - 3ab + 3bc + 3(a-c) \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{K_2}{3(b-a)} \left(2b^2 - 4bc + 2c^2 - 3b \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + 3c \cdot \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - 2 \frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)} \right) + \frac{2K_2^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} = \frac{K_2(K_1+K_2)}{3(K_1+K_2)}.$$

$$\left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2}{3(b-a)} (a^2 + ac - 3ab - bc + 2b^2 + 3(a-b)) \cdot \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} - \frac{2K_2^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} + \frac{2K_2^2(b-c)}{3(K_1+K_2)} = \frac{K_2}{3} \cdot \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \frac{K_2(a-b)c}{3(b-a)} + \frac{K_2(a^2 - 3ab + 2b^2)}{3(b-a)} - K_2 \cdot \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} = -\frac{K_2c}{3} - \frac{2K_2}{3} \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{K_2(b-a)(2b-a)}{3(b-a)} = \frac{K_2}{3} \left(-2 \sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}} + 2b - a - c \right).$$

Приложение Н

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности спроса в зависимости от параметров α_0 и p *

```
function num1 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.09;
h2=0.45;
Alfa (1)=10;
p (1)=5;
z=10;
N=100;
for i=2:N+1
    Alfa (i)=Alfa (i-1)+h1;
    p (i)=p (i-1)+h2;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p (j) * (b+c-2*a-2*sqrt (p (j) * (b-a) * (c-
a) / ((z/Alfa (i)) +p (j)))));
        f2=(z/Alfa (i)) * (2*b-a-c-2*sqrt ((z/Alfa (i)) * (b-
a) * (b-c) / ((z/Alfa (i)) +p (j)))));
        if f1<f2
            t (i, j)=a+Alfa (i)+sqrt (p (j) * (b-a) * (c-
a) / ((z/Alfa (i)) +p (j)));
        else
```

```
t(i,j)=b+Alfa(i)-sqrt((z/Alfa(i))*(b-a)*(b-  
c)/((z/Alfa(i))+p(j)));  
    end  
end  
end  
t  
[X,Y]=meshgrid(p,Alfa);  
mesh(X,Y,t)  
end
```

* Источник: составлено автором

Приложение II

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности спроса в зависимости от параметров α_0 и z^*

```
function num2 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.09;
h2=0.9;
Alfa(1)=10;
p=5;
z(1)=10;
N=100;
for i=2:N+1
    Alfa(i)=Alfa(i-1)+h1;
    z(i)=z(i-1)+h2;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p*(b+c-2*a-2*sqrt(p*(b-a)*(c-
a)/((z(j)/Alfa(i))+p)));
        f2=(z(j)/Alfa(i))*(2*b-a-c-
2*sqrt((z(j)/Alfa(i))*(b-a)*(b-c)/((z(j)/Alfa(i))+p)));
        if f1<f2
            t(i,j)=a+Alfa(i)+sqrt(p*(b-a)*(c-
a)/((z(j)/Alfa(i))+p));
        else
```

```
t(i,j)=b+Alfa(i)-sqrt((z(j)/Alfa(i))*(b-a)*(b-  
c)/((z(j)/Alfa(i))+p));
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
t
```

```
[X,Y]=meshgrid(z,Alfa);
```

```
mesh(X,Y,t)
```

```
end
```

*** Источник: составлено автором**

Приложение Р

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности спроса в зависимости от параметров p и z *

```
function num3 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.45;
h2=0.9;
Alfa=10;
p(1)=5;
z(1)=10;
N=100;
for i=2:N+1
    z(i)=z(i-1)+h2;
    p(i)=p(i-1)+h1;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p(i)*(b+c-2*a-2*sqrt(p(i)*(b-a)*(c-
a)/((z(j)/Alfa)+p(i)))));
        f2=(z(j)/Alfa)*(2*b-a-c-2*sqrt((z(j)/Alfa)*(b-
a)*(b-c)/((z(j)/Alfa)+p(i)))));
        if f1<f2
            t(i,j)=a+Alfa+sqrt(p(i)*(b-a)*(c-
a)/((z(j)/Alfa)+p(i)));
        else
```

```
t(i,j)=b+Alfa-sqrt((z(j)/Alfa)*(b-a)*(b-  
c)/((z(j)/Alfa)+p(i)));
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
t
```

```
[X,Y]=meshgrid(z,p);
```

```
mesh(X,Y,t)
```

```
end
```

* Источник: составлено автором

Приложение С

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности момента поставки в зависимости от параметров α и p *

```
function num4 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.09;
h2=0.45;
Alfa(1)=10;
p(1)=5;
z=10;
N=100;
for i=2:N+1
    Alfa(i)=Alfa(i-1)+h1;
    p(i)=p(i-1)+h2;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p(j) * (2*b-a-c-2*sqrt(p(j) * (b-a) * (b-
c) / ((z/Alfa(i)) + p(j)))));
        f2=(z/Alfa(i)) * (b+c-2*a-2*sqrt((z/Alfa(i)) * (b-
a) * (c-a) / ((z/Alfa(i)) + p(j)))));
        if f1<f2
            t(i,j)=Alfa(i) -b+sqrt(p(j) * (b-a) * (b-
c) / ((z/Alfa(i)) + p(j)));
        else
```

```
t(i,j)=Alfa(i)-a-sqrt((z/Alfa(i))*(b-a)*(c-  
a)/((z/Alfa(i))+p(j)));  
    end  
end  
end  
t  
[X,Y]=meshgrid(p,Alfa);  
mesh(X,Y,t)  
end
```

* Источник: составлено автором

Приложение Т

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности момента поставки в зависимости от параметров α и z *

```
function num5 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.09;
h2=0.9;
Alfa (1)=10;
p=5;
z (1)=10;
N=100;
for i=2:N+1
    Alfa (i)=Alfa (i-1)+h1;
    z (i)=z (i-1)+h2;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p*(2*b-a-c-2*sqrt (p*(b-a)*(b-
c)/((z (j)/Alfa (i))+p)));
        f2=(z (j)/Alfa (i))*(b+c-2*a-
2*sqrt ((z (j)/Alfa (i))*(b-a)*(c-a)/((z (j)/Alfa (i))+p)));
        if f1<f2
            t (i,j)=Alfa (i)-b+sqrt (p*(b-a)*(b-
c)/((z (j)/Alfa (i))+p));
        else
```

```
t(i,j)=Alfa(i)-a-sqrt((z(j)/Alfa(i))*(b-a)*(c-  
a)/((z(j)/Alfa(i))+p));
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
t
```

```
[X,Y]=meshgrid(z,Alfa);
```

```
mesh(X,Y,t)
```

```
end
```

*** Источник: составлено автором**

Приложение У

(обязательное)

Программный модуль расчета момента поставки с учетом неопределенности момента поставки в зависимости от параметров p и z *

```
function num6 ()
a=-2;
b=7;
c=2;
h1=0.45;
h2=0.9;
Alfa=10;
p(1)=5;
z(1)=10;
N=100;
for i=2:N+1
    z(i)=z(i-1)+h2;
    p(i)=p(i-1)+h1;
end
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        f1=0;
        f2=0;
        f1=p(i)*(2*b-c-a-2*sqrt(p(i)*(b-a)*(b-
c)/((z(j)/Alfa)+p(i)))));
        f2=(z(j)/Alfa)*(b-2*a+c-2*sqrt((z(j)/Alfa)*(b-
a)*(c-a)/((z(j)/Alfa)+p(i)))));
        if f1<f2
            t(i,j)=Alfa-b+sqrt(p(i)*(b-a)*(b-
c)/((z(j)/Alfa)+p(i)));
        else
```

```
        t(i,j)=Alfa-a-sqrt((z(j)/Alfa)*(b-a)*(c-  
a)/((z(j)/Alfa)+p(i)));  
    end  
end  
end  
t  
[X,Y]=meshgrid(z,p);  
mesh(X,Y,t)  
end
```

* Источник: составлено автором

Приложение Ф

(справочное)



Рисунок Ф.1 – Акт о практическом применении ООО «Сахар-Пром»

* Источник: составлено автором