

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Г.В. ПЛЕХАНОВА»

*На правах рукописи*

**МОИСЕЕВ НИКИТА АЛЕКСАНДРОВИЧ**

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИИ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА  
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

08.00.13 – Математические и инструментальные методы экономики

**Диссертация**

на соискание ученой степени доктора экономических наук

Научный консультант:

д.э.н., профессор

Тихомиров Н.П.

Москва – 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОВЕДЕНИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ.....	18
1.1 Проблемы моделирования и прогнозирования временных рядов макрэкономических процессов.....	18
1.2 Проблемы спецификации и оценки параметров регрессионных моделей.....	40
1.3 Отрицательное влияние мультиколлинеарности факторов на точность прогноза и способы ее устранения.....	57
1.4 Вычисление уровня значимости предикторов при проведении процедуры спецификации уравнения.....	74
ГЛАВА 2 ВЗВЕШИВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЕ ДИСПЕРСИЮ ОЖИДАЕМОЙ ОШИБКИ ПРОГНОЗА.....	96
2.1 Основные сведения о взвешивании регрессионных моделей и анализ существующих подходов.....	96
2.2 Метод взвешивания моделей путем минимизации дисперсии ожидаемой ошибки прогноза.....	108
2.3 Апробация метода взвешивания моделей на имитационных и исторических данных.....	127
ГЛАВА 3 ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ ОКНА НАБЛЮДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОЦЕДУРЫ ВЗВЕШИВАНИЯ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.....	155
3.1 Эмпирическое доказательство невыполнимости предпосылки МНК о постоянстве истинных параметров.....	155
3.2 Метод комбинирования регрессионных моделей, рассчитанных по разным окнам данных.....	167

3.3 Апробация метода выбора оптимальной длины окна на имитационных и исторических данных.....	188
ГЛАВА 4 ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПРОГНОЗА РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.....	203
4.1 Проблема систематической недооценки доверительных интервалов при динамическом взвешивании регрессионных уравнений.....	203
4.2 Численный метод корректировок доверительных интервалов.....	220
4.3 Апробация метода повышения достоверности интервального прогноза на имитационных и исторических данных.....	232
ГЛАВА 5 ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	250
5.1 Модель взаимосвязей макроэкономических процессов.....	250
5.2 Метод учета функциональных и корреляционных зависимостей между макроэкономическими индикаторами.....	262
5.3 Эмпирическое и имитационное тестирование метода учета функциональных и корреляционных зависимостей.....	278
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	299
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	305
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	333
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	353
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	358

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Процесс развития любой экономической системы характеризуется постоянным изменением ее показателей во времени под воздействием разнообразных внутренних и внешних факторов. В масштабах страны такими показателями являются социальные и макроэкономические индикаторы, которые дают некоторую объективную оценку состояния экономики и общества в целом за определенный временной промежуток. Для систем управления общественным развитием важной проблемой является также предсказание будущей динамики рассматриваемых макроэкономических показателей на определенный срок. При этом точность получаемых прогнозов имеет ключевое значение, поскольку напрямую влияет на эффективность принимаемых решений органами государственного управления, иностранными и отечественными инвесторами, корпорациями и другими хозяйствующими субъектами.

В настоящее время основным средством прогнозирования макроэкономических индикаторов является эконометрический инструментарий, который достаточно хорошо зарекомендовал себя в точных науках. Однако временные ряды социально-экономических процессов зачастую характеризуются постоянной изменчивостью волатильности, уровней и направлений взаимосвязей между макроэкономическими индикаторами, что осложняет процесс обоснования и разработки эконометрических прогнозных моделей, в том числе в части оценки параметров модели и достоверности доверительных интервалов получаемых прогнозов.

Изменчивость вышеупомянутых характеристик временных рядов макроэкономических процессов ставит исследователя перед проблемой выбора длины окна наблюдений, поскольку представляется невозможным однозначно определить, какой именно временной промежуток отражает наиболее актуальные взаимосвязи

между моделируемыми переменными для получения обоснованных и точных прогнозов.

Одной из важнейших задач при моделировании макроэкономических процессов является процедура спецификации регрессионного уравнения. Однако данная процедура не является унифицированной, что приводит к появлению множества методов проведения спецификации и критериев оптимальности модели. Таким образом, достаточно часто в рамках одного окна имеется возможность построить несколько регрессионных моделей, каждая из которых будет оптимальной согласно своему критерию, что ставит исследователя перед проблемой выбора наилучшей модели из набора альтернатив. В работах многих отечественных и зарубежных авторов было показано, что синтез набора моделей является более эффективным решением в данных условиях, чем осуществление выбора лишь одной модели из рассматриваемого набора. Однако существующие процедуры синтеза моделей имеют существенные недостатки, такие как невозможность расчета интервального прогноза, отсутствие адаптации к взвешиванию моделей, рассчитанных на окнах данных различной длины и т.д.

Также при моделировании макроэкономических процессов исследователь зачастую сталкивается со структурными сдвигами в анализируемых данных. Поскольку взаимосвязи между макроэкономическими индикаторами подвержены изменению по мере развития экономической системы, представляется рациональным проводить процедуру динамической спецификации для получения более точных прогнозов, при которой состав модели пересматривается по мере появления новых статистических данных. Однако при таком подходе возникает проблема расчета достоверного интервального прогноза вследствие того, что, поскольку каждый раз выбирается модель, имеющая наилучший показатель эффективности, это приводит к существенной систематической недооценке истинной дисперсии ошибок прогноза.

Наряду с вышеупомянутыми проблемами применения регрессионного

инструментария к моделированию временных рядов макроэкономических процессов существует также проблема рассогласованности прогнозов при одновременном прогнозировании комплекса макроэкономических индикаторов. Поскольку практически все макроэкономические индикаторы связаны между собой функциональной или корреляционной взаимосвязью, то если прогнозировать каждый из индикаторов по отдельности – полученные прогнозы не будут удовлетворять имеющимся функциональным зависимостям и будут являться рассогласованными с этой точки зрения.

Таким образом, принимая во внимание вышеизложенное, можно сказать, что существующие методы прогнозирования и моделирования макроэкономических процессов, основанные на регрессионном анализе, не в полной мере решают рассмотренные проблемы и могут быть усовершенствованы с целью повышения качества получаемых моделей, характеризующихся более высокой точностью оценки параметров модели и надежностью доверительных интервалов. Вследствие этого, исследования, направленные на разработку новых подходов регрессионного анализа, предлагающих устойчивое решение существующих проблем при моделировании макроэкономических процессов, представляются достаточно актуальными и могут быть использованы центральными банками и руководством страны при принятии управленческих решений.

**Степень научной разработанности проблемы.** Разработка подходов к моделированию и прогнозированию макроэкономических процессов является популярной темой исследований ученых-эконометристов. Значительный вклад в развитие области общей теории эконометрики, на которую опирается автор в диссертационном исследовании, внесли: Айвазян С.А., Дуброва Т.А., Ершов Э.Б., Лукашин Ю.П., Мхитарян В.С., Тихомиров Н.П., Трегуб И.В., Wooldridge J.M., Hoerl A.E., Kennard R., Tibshirani R., Pearson K., Wold H., Lovell M.C., Larzelere R.E., Mulaik S.A., Wishart J., Mood A., Graybill F., Boes D., Nydick S., Андерсон Т., Бродский Б.Е.,

Гуреев К.А., Голубева О.С., Доугерти К., Косов В.В., Льюис К.Д., Магнус Я.Р., Катышев П.К., Михайленко К.В., Райская Н., Сергиенко Я., Френкель А., Хейс Д., Четыркин Е.Н., Orphanides A., van Norden S., Justiniano A., Primiceri G.E., Johansen S., Juselius K., Hayashi F., Hamazacebi C., Greene W.H., Glostén L.R., Jagannathan R., Fama E., Evans M., Engsted T., Engle R., Davidson R., James G.M., Cochrane J.H.

Работы, посвященные различным критериям отбора регрессионных моделей, которые используются автором для разработки предлагаемых в диссертации методов, были выполнены следующими авторами: Claeskens G., Hjort N. L., Mallows C.L., Buckland S., Burnham K., Augustin N., Akaike H., Hurvich C.M., Tsai C.L., Lee S., Karagrigoriou A.

Работы, посвященные разработке различных алгоритмов взвешивания регрессионных уравнений, которые легли в основу методов, предлагаемых автором, принадлежат: Bates J.M., Granger C.W.J., Armstrong J.S., Ramanathan R., Chatfield C., Clemen R.T., Hendry D.F., Clements M.P., Timmermann A., Stock J.H., Watson M.W., Hansen B.E., Raftery A.E., Madigan D., Hoeting J.A., Volinsky T., Fernandez C., Ley C.E., Steel M.F.J., Sala-i-Martin X., Doppelhofer G., Miller R.I., Min C.-K., Zellner A., Wright J.H., Racine J., Zhang X., Zhang J., Zou G.

Работы, посвященные проблемам спецификации регрессионных моделей и одновременному прогнозированию макропроцессов, принадлежат таким авторам, как: Shibata R., Derksen S., Keselman H.J., Schwarz G., Shehata Y.A., White P., Šidák Z.K., Ing C.-K., Chen H., Wang Y., Welsh A.H., Yee T.W., Lestari B., Budiantara I.N., Sunaryo S., Mashuri M., Chamidah N., Zain I., Ruchstuhl A., Welsh A.H., Lin X., Carroll R.J., Guo W., Antoniadis A., Spatinas T., George E.I., McCulloch R.E.

Значительный вклад в развитие теории и практики моделирования и прогнозирования временных рядов внесли: Box G.E.P., Jenkins G., Tong H., Kihoro J.M., Otieno R.O., Wafula C., Hipel K.W., McLeod A.I., Garatt A., Lee K., Pesaran M., Shin Y., Wei C.-Z., Кендалл М., Ковалева Л.Н., Faraway J., Chatfield C., Zhang G.P.,

Hamilton J., Baillie R.T., Ching-Fun C.

Также в процессе разработки методов, представленных в диссертации, автор опирался на законы экономической теории, широко представленные в работах следующих авторов: Макконнел К.Р., Брю С.Л., Абель Э., Бернанке Б., Балацкий Е.В., Бернштам М., Вороновицкий М.М., Кэмпбелл Р.М., Стенли Л.Б., Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И., Sims С.А., Sheshinski E., Weiss Y., Romer D., Roberds W., Runckle D., Whiteman С.Н., Mishkin F., McCallum B., Cagan P.

Сформулированные в работах упомянутых выше авторов математические методы и модели макроэкономических процессов позволили проанализировать существующие подходы к процедуре проведения спецификации регрессионных моделей, взвешиванию регрессионных моделей и вычислению оценки истинного уровня значимости предикторов в уравнении. Было выявлено, что данные подходы, по мнению автора, не затрагивают следующие ключевые аспекты:

- в разработанных методах расчета истинного уровня значимости предикторов недостаточное внимание уделено неопределенности относительно истинной дисперсионно-ковариационной матрицы объясняющих переменных;
- методы взвешивания регрессионных уравнений не подразумевают алгоритма вычисления интервального прогноза, а также для большинства из них отсутствует возможность проводить взвешивание моделей, рассчитанных на окнах данных различной длины;
- недостаточно детализирована проработка методов вычисления достоверных доверительных интервалов для прогнозируемых значений при проведении процедуры динамической спецификации или динамического взвешивания;
- не в полной мере рассмотрено одновременное прогнозирование комплекса взаимосвязанных макроэкономических индикаторов;
- недостаточное внимание уделено гибкости используемых моделей и их

адаптивности к условиям изменчивости экономики и наличию структурных сдвигов.

В диссертационной работе предлагается предложить подходы к решению вышеупомянутых проблем регрессионного анализа и моделирования макроэкономических процессов с целью повышения точности получаемых прогнозов и надежности их доверительных интервалов.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является развитие методологии повышения качества эконометрических моделей временных рядов макроэкономических индикаторов посредством достижения более высокой достоверности оценок параметров и надежности получаемых доверительных интервалов по сравнению с существующими методами.

В соответствии с целью в данной работе ставятся и решаются следующие задачи:

- Провести исследование способов спецификации уравнения регрессии, проанализировать их особенности и сформировать набор рекомендаций относительно применения того или иного метода в определенной ситуации;
- Провести анализ способов борьбы с высокой степенью мультиколлинеарности независимых переменных в регрессионных моделях и сформировать набор рекомендаций относительно применения того или иного метода в определенной ситуации;
- Разработать метод вычисления истинного уровня значимости предиктора в многофакторной линейной регрессионной модели при проведении процедуры спецификации;
- Усовершенствовать методы построения эконометрических моделей на основе взвешивания как вложенных, так и невложенных линейных регрессионных моделей;
- Разработать метод оптимизации весовых коэффициентов для взвешивания линейных регрессионных моделей, рассчитанных на окнах данных

различной длины и различающихся по составу;

- Разработать метод уточнения оценки доверительного интервала прогнозируемых значений для моделей временных рядов при проведении процедуры динамического взвешивания;
- Разработать модель взаимосвязей макроэкономических показателей, связывающую более двадцати индикаторов функциональной зависимостью;
- Разработать метод учета функциональных и корреляционных взаимосвязей между моделируемыми макроэкономическими процессами с целью повышения точности получаемых прогнозов;
- Апробировать предложенные методы и модели макроэкономических процессов на имитационных и реальных исторических данных и сравнить их эффективность с уже существующими.

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования в диссертационной работе являются временные ряды макроэкономических процессов. В качестве предмета исследования выступают методы регрессионного анализа, моделирования и прогнозирования временных рядов макроэкономических процессов.

**Область исследования.** Диссертационная работа выполнена в рамках п. 1.1 «Разработка и развитие математического аппарата анализа экономических систем: математической экономики, эконометрики, прикладной статистики, теории игр, оптимизации, теории принятия решений, дискретной математики и других методов, используемых в экономико-математическом моделировании» и п. 1.2. «Теория и методология экономико-математического моделирования, исследование его возможностей и диапазонов применения: теоретические и методологические вопросы отображения социально-экономических процессов и систем в виде математических, информационных и компьютерных моделей» специальности 08.00.13 «Математические и инструментальные методы экономики».

**Теоретической и методологической базой исследования** послужили труды

российских и зарубежных ученых в области моделирования и прогнозирования временных рядов макроэкономических процессов, эконометрике и статистике.

В процессе решения поставленных в работе задач использовались статистические методы регрессионного и корреляционного анализа, моделирования временных рядов, а также табличные и графические методы представления результатов исследования.

**Информационной базой исследования** послужили официальные статистические данные Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics), Совета управляющих Федеральной резервной системы США (англ. Board of Governors of the Federal Reserve System), Бюро экономического анализа США (англ. U.S. Bureau of Economic Analysis), S&P Dow Jones Indices LLC, Управления энергетической информации США (англ. U.S. Energy Information Administration), Организации экономического сотрудничества и развития (англ. Organization for Economic Co-operation and Development), Центрального банка Англии (англ. Bank of England), Международного валютного фонда (англ. International Monetary Fund), Федеральной службы государственной статистики РФ, Центрального банка РФ и других печатных и электронных СМИ по исследуемой тематике.

В диссертации были использованы следующие пакеты прикладных программ: «MS Excel», «R», «IBM SPSS Statistics», «MATLAB», «STATISTICA».

**Научная новизна.** В диссертационной работе предложены методы построения математических моделей временных рядов, обеспечивающие повышение точности прогнозов макроэкономических процессов и надежности их доверительных интервалов.

Предмет защиты составляют следующие результаты, полученные лично автором и содержащие элементы научной новизны:

1. Предложен численный метод расчета истинного уровня значимости предикторов ( $p$ -значения) в многофакторном регрессионном уравнении при

проведении процедуры спецификации. Классический метод определения уровня значимости дает истинные оценки  $p$ -значения при условии, что все набранные потенциальные предикторы включены в модель. В случае, когда проводится процедура спецификации уравнения, традиционные  $p$ -значения являются смещенными, поскольку выбираются «лучшие» факторы в процессе спецификации. Разработанный метод учитывает число наблюдений в окне данных, число потенциальных объясняющих переменных и их выборочную дисперсионно-ковариационную матрицу. Проводится сравнение данного метода с существующими поправками  $p$ -значения (Бонферрони, Шидака, Шехата и Уайта) и показывается их смещенность при тех или иных условиях. Вычисление истинного уровня значимости позволяет сократить долю ошибок 1-ого рода при построении регрессионных моделей макроэкономических процессов, и, как следствие, существенно повысить надежность экспликативных выводов, полученных из таких моделей.

2. Разработан метод оптимизации весовых коэффициентов для взвешенной суммы набора как вложенных, так и невложенных многофакторных моделей временного ряда, основанный на вычислении несмещенной оценки дисперсии прогноза взвешенной модели и последующей ее минимизации. Существует множество способов оценки качества регрессионных моделей. Вследствие этого при прогнозировании некоторого временного ряда социально-экономического процесса, как правило характеризующегося недостатком наблюдений, согласно различным критериям эффективности модели исследователь может получить разные по составу уравнения. В отечественной и зарубежной литературе было показано, что взвешивание моделей является более предпочтительным вариантом, чем выбор только одной модели. В связи с этим в работе предлагается новый метод оптимизации весовых коэффициентов. В результате применения данного метода вычисляется комбинированная модель, являющаяся более эффективной, чем все входящие в нее уравнения по отдельности. Также предложенный метод в среднем дает более низкую

ошибку прогноза по сравнению с такими популярными методами взвешивания, как внутривыборочное взвешивание, байесовское взвешивание, взвешивание Акаике, взвешивание по критерию Маллоуса и простая средняя. Выведена формула числа степеней свободы для вычисления интервальных прогнозов, полученных в результате применения предложенного метода построения многофакторных регрессионных моделей, что недоступно для существующих методов взвешивания.

3. Показано, что при прогнозировании одних и тех же значений временного ряда макроэкономических процессов с помощью моделей, построенных на окнах данных различной длины, зависимость между точностью прогноза и длиной окна имеет не гиперболическую, а параболическую зависимость. В диссертационной работе выдвигается гипотеза, что данный эффект возникает из-за изменчивости степени и направления влияния факторов на целевую переменную во времени. Таким образом, возникает дилемма о выборе длины окна наблюдений, которую предлагается решить с помощью взвешивания регрессионных моделей, рассчитанных на окнах данных различной длины. Показывается, что предложенный метод дает более точные прогнозы, чем каждая из входящих в него моделей по отдельности, а также он является более эффективным, чем байесовское взвешивание, взвешивание Акаике, простая средняя, выбор модели по байесовскому информационному критерию и критерию Акаике.

4. Предложен метод вычисления корректирующей поправки для среднеквадратической ошибки прогноза при проведении процедуры динамического взвешивания регрессионных моделей. Данный метод позволяет получить более полную картину относительно показателя несмещенной среднеквадратической ошибки прогноза при проведении процедуры динамической спецификации. Данная поправка существенна для повышения достоверности получаемых доверительных интервалов при прогнозировании временных рядов макроэкономических процессов.

5. Разработан метод учета функциональных и корреляционных

зависимостей между макроэкономическими индикаторами для повышения точности их прогнозирования. В случае, когда необходимо комплексное прогнозирование макроэкономических индикаторов, информацию об известной функциональной зависимости между индикаторами можно использовать для увеличения точности прогнозирования каждого из них. Если прогнозировать каждый из индикаторов по отдельности, то полученные прогнозы не будут удовлетворять имеющимся функциональным зависимостям и будут являться рассогласованными с этой точки зрения. Предложенный метод учета функциональных связей и комплексного моделирования макроэкономических показателей существенно повышает точность прогноза за счет приведения получаемых прогнозов в соответствие с заданной функциональной или корреляционной связью в зависимости от формы вероятностного распределения каждого из получаемых прогнозов.

**Теоретическая значимость исследования.** Разработанные в диссертационном исследовании методы построения многофакторной линейной регрессии с распределенными лагами позволяют качественно улучшить прогностический потенциал классических регрессионных моделей при сохранении надежности доверительных интервалов, а также расширить экспликативные возможности регрессионных уравнений.

**Практическая значимость полученных результатов** заключается в возможности применения разработанных методов для построения моделей макроэкономических процессов с целью их краткосрочного, среднесрочного и долгосрочного прогнозирования. Получаемые прогнозы обладают более высокой точностью по сравнению с прогнозами, рассчитанными по уже существующим методам, а также имеют надежные доверительные интервалы. Полученные модели и прогнозы могут быть использованы для принятия оптимальных управленческих решений органами государственной власти и управления. Также результаты работы

могут использоваться в учебном процессе вузов при создании и совершенствовании дисциплин «Эконометрика», «Моделирование макроэкономических процессов» и др.

**Внедрение и апробация результатов работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на многих международных и всероссийских научно-практических конференциях, основными из которых являются:

- Международная научная школа-семинар имени академика С.С. Шаталина «Системное моделирование социально-экономических процессов», Воронеж, 29.09-4.10.2013 г.;

- Международная научно-практическая конференция «Интеграция отечественной науки в мировую: проблемы, тенденции и перспективы», г. Москва, 26-29 сентября 2014 г.

- Международная научно-практическая конференция «Probability theory and mathematical statistics», г. Казань, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, 6-12 ноября 2017 г.;

- Международная научно-практическая конференция «12<sup>th</sup> International Conference on Computational and Financial Econometrics», г. Пиза, Пизанский Университет, 14-16 декабря 2018 г.;

- Международная научно-практическая конференция «IX Абалкинские чтения», г. Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова, 25-26 апреля 2019 г.;

- Международная научно-практическая конференция «13<sup>th</sup> International Conference on Computational and Financial Econometrics», г. Лондон, Лондонский Университет (Биркбек), 14-16 декабря 2019 г.

Разработанные методики были с успехом внедрены при выполнении следующих научно-исследовательских работ:

- «Анализ инфляционных процессов в российской экономике и обуславливающих их факторов», государственный контракт № 32/дБ с НИИ СП от «04» июня 2012 г.;

- «Разработка технологий выявления кризисных ситуаций и определения путей их разрешения. Создание модели опережающего стратегического управления», в рамках субсидии, полученной согласно постановлению №218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства», совместно с ООО «ИБС Экспертиза» и ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова»;

- «Система многофакторного динамического прогнозирования биржевых котировок и индексов», внутренний грант РЭУ им. Г.В. Плеханова, приказ № 1129 от 19 ноября 2014 г.;

- «Методология и информационно-аналитические средства решения проблем пространственного развития экономики России в условиях современных реформ», Госзадание Министерства Образования и Науки, проект № 1675, 2015-2016 гг.;

- «Разработка алгоритмов машинного обучения скоринговых моделей для микрофинансовых организаций», внутренний грант РЭУ им. Г.В. Плеханова, приказ №1172 от 12.10.2016 г.;

- «Совершенствование методического инструментария краткосрочного прогнозирования социально-экономических показателей», внутренний грант РЭУ им. Г.В. Плеханова, приказ №1173 от 12.10.2016 г.;

- «Развитие регрессионного инструментария прогнозирования временных рядов макроэкономических процессов», грант Президента РФ для молодых ученых – кандидатов наук, 2017-2018 гг., договор №14.Z56.17.1169-МК.

- «Разработка системы численной оценки экономических проектов на основе межотраслевого баланса с использованием комбинированных методов компьютерной оптимизации», договор №18-310-20008\18 от «12» октября 2018 г.

Разработанные в диссертационном исследовании методы и модели используются для подготовки ежеквартальных прогнозов ключевых макроэкономических индикаторов Российской Федерации на базе Научно-исследовательского объединения РЭУ им. Г.В. Плеханова с последующей публикацией на сайте Университета.

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликованы 24 печатных работы общим объемом 25,6 п.л. (из них авторские - 22,7 п.л.), в том числе 15 печатных работ из Перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора наук общим объемом 9,6 п.л. (авторских - 7,9 п.л.), 10 печатных работ в изданиях, зарегистрированных в БД SCOPUS общим объемом 8,3 п.л. (авторских - 6,5 п.л.), 5 работ в изданиях, зарегистрированных в БД Web of Science (Core Collection) общим объемом 3,7 п.л. (авторских - 3 п.л.), 1 монография общим объемом 9,5 п.л. (авторских – 9,5 п.л.). Также зарегистрированы 5 РИД (программа ЭВМ).

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из оглавления, введения, пяти глав, заключения и трех приложений, содержит список литературы из 285 наименований. В диссертации 361 страница машинописного текста, 56 таблиц, 163 рисунка.

# ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

## 1.1 Проблемы моделирования и прогнозирования временных рядов макроэкономических процессов

Макроэкономические процессы в совокупности представляют собой сложную динамически изменяющуюся систему взаимозависимых характеристик крупного экономического объекта. В связи с этим, на основе макроэкономических индикаторов формируется некое объективное суждение о текущем состоянии рассматриваемого государства, траектории его развития и потенциальных рисках [1, 21, 40, 230]. На основе данной информации многочисленные экономические агенты формируют свои стратегии взаимодействия как с анализируемой страной в целом, так и с отдельными ее хозяйствующими субъектами. Таким образом, важной задачей для всех заинтересованных в рассматриваемом государстве сторон является получение прогнозов будущей динамики рассматриваемых макроэкономических показателей на определенный срок. При этом точность получаемых прогнозов имеет ключевое значение, поскольку напрямую влияет на эффективность принимаемых решений органами государственного управления, иностранными и отечественными инвесторами, корпорациями и другими экономическими агентами [8, 10, 36, 37, 217].

В настоящее время самым часто используемым средством прогнозирования макроэкономических индикаторов является регрессионный инструментарий, который достаточно хорошо зарекомендовал себя в точных науках [118, 248, 101]. Однако при попытке его использования в неизменном виде для моделирования экономических процессов возникают определенные пока до конца не решенные проблемы, которые

могут быть условно разделены на два основных класса:

- недостаточная точность оценки параметров модели;
- недостаточная надежность получаемых доверительных интервалов.

Если говорить о первом заявленном классе проблем, то в рамках него можно выделить такие подпроблемы, как выбор метода спецификации модели, выбор метода устранения мультиколлинеарности объясняющих переменных, вычисление значимости предикторов при предварительном проведении процедуры спецификации регрессионного уравнения, оптимизация весовых коэффициентов при взвешивании набора моделей, выбор оптимальной длины окна наблюдений, а также приведение прогнозов функционально и корреляционно связанных макроэкономических индикаторов в соответствие с заявленной зависимостью. В рамках второго класса проблем можно выделить задачи повышения надежности доверительного интервала при проведении динамического взвешивания и динамической спецификации регрессионных моделей.

Рассмотрим подробнее каждый из заявленных типов подпроблем и приведем обоснование их принадлежности к сформированным классам проблем эконометрического моделирования временных рядов макроэкономических процессов.

Выбор метода спецификации модели или подмодели считается одним из ключевых этапов эконометрического исследования [163]. В зависимости от используемого алгоритма и критерия качества регрессионного уравнения формируется состав предикторов, который напрямую влияет на точность получаемой модели. Действительно, если в процессе спецификации были отброшены значимые факторы и/или включены незначимые, то при оптимизации параметров модели возникает смещенность их оценок относительно параметров истинной модели [126, 92]. Следует отметить, что не существует унифицированного алгоритма спецификации модели, который был бы наиболее эффективным при любой природе

моделируемых данных [165, 131]. Поэтому исследования, направленные на выявление характеристик исходных данных, которые могут помочь обеспечить более обоснованный выбор используемого метода спецификации могут считаться актуальными, поскольку направлены на повышение точности оценки параметров модели и, как следствие, снижение дисперсии ошибки прогноза.

Следующей рассматриваемой задачей является выбор метода устранения мультиколлинеарности среди объясняющих переменных. Высокая степень взаимозависимости факторов модели (особенно при малых выборках) существенно повышает дисперсию ошибки оценки параметров, что может быть в некоторой степени нивелировано с помощью различных методов, специально разработанных для решения данной проблемы [170, 283]. Однако, как и в предыдущей задаче, методы устранения мультиколлинеарности также не имеют однозначного фаворита при любой природе данных. Таким образом, для повышения точности получаемых оценок параметров регрессионного уравнения необходим обоснованный выбор метода устранения мультиколлинеарности при тех или иных характеристиках исходных данных.

Возвращаясь к задаче выбора метода спецификации регрессионного уравнения, следует отметить, что многие из них базируются на вычислении уровня значимости каждого потенциального предиктора в модели [280, 265]. Классический метод определения уровня значимости дает истинные оценки  $p$ -значения при условии, что все набранные потенциальные предикторы включены в модель. В случае, когда проводится процедура спецификации уравнения, традиционные  $p$ -значения являются смещенными, поскольку выбираются «лучшие» факторы в процессе спецификации. Вследствие этого необходимо применение модифицированной процедуры расчета значимости предикторов, которая бы учитывала число наблюдений в окне данных, число потенциальных объясняющих переменных и их выборочную дисперсионно-ковариационную матрицу. Поскольку вычисление истинного уровня значимости

позволяет сократить долю ошибок 1-ого рода при построении регрессионных моделей макроэкономических процессов, можно с уверенностью отнести данное направление исследований к классу повышения точности оценок параметров эконометрического уравнения.

Как уже было отмечено выше, не существует универсального метода спецификации регрессионного уравнения, что зачастую приводит к тому, что в рамках одного и того же окна данных имеется возможность построить несколько регрессионных моделей, каждая из которых будет оптимальной согласно своему критерию, что ставит исследователя перед проблемой выбора наилучшей модели из набора альтернатив [219, 263, 281]. В работах многих отечественных и зарубежных авторов было показано, что синтез набора моделей является более эффективным решением в данных условиях, чем осуществление выбора лишь одной модели из рассматриваемого набора [120, 75, 93]. Тем не менее консенсус относительно метода оптимизации весовых коэффициентов подмоделей до сих пор не был достигнут. Существующие процедуры синтеза моделей имеют, на взгляд автора, существенные недостатки, такие как невозможность расчета интервального прогноза, отсутствие адаптации к взвешиванию моделей, рассчитанных на окнах данных различной длины и т.д. В связи с этим новый метод, устраняющий в некотором смысле слабые стороны существующих подходов, мог бы повысить как эффективность интегральной модели, так и достоверность получаемых интервальных прогнозов. Таким образом, данное направление исследований можно отнести как к первому классу рассматриваемых проблем эконометрического моделирования, связанному с повышением точности оценки параметров, так и ко второму, рассматривающему задачи повышения достоверности доверительных интервалов.

Довольно часто при моделировании макроэкономических процессов исследователь сталкивается с разнообразными структурными сдвигами в анализируемых данных, которые обуславливаются происходящими политическими,

социальными и экономическими процессами [138, 81, 110, 105, 104]. Причем данные сдвиги далеко не всегда вызывают резкое единичное изменение параметров моделируемого процесса. Зачастую изменения в характере взаимосвязей макроэкономических процессов происходят постепенно, что требует совершенно иных подходов к их моделированию. В целях демонстрации данных явлений проанализируем следующие макроэкономические индикаторы экономики США: Индекс Потребительских Цен (англ. Consumer Price Index, CPI) (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные), денежный агрегат M2 (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные) и безработица (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные), а также некоторые макроэкономические показатели других ведущих мировых экономик. В целях обеспечения стационарности рассматриваемых временных рядов преобразуем показатели безработицы в разности первого порядка, а ИПЦ и M2 конвертируем в темпы прироста. В таблице 1.1 представлены результаты теста Дики-Фуллера на единичный корень по преобразованным данным.

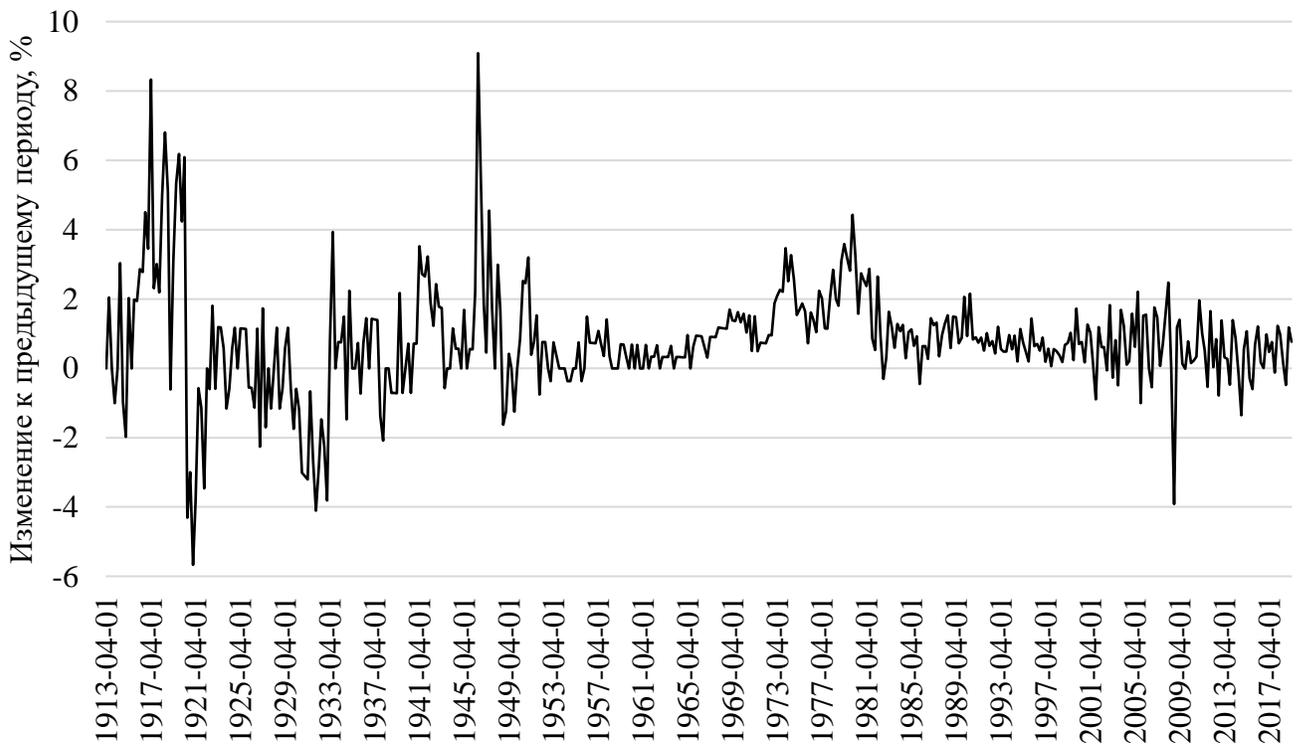
**Таблица 1.1** – Тест Дики-Фуллера на единичный корень для исследуемых макроэкономических процессов

Модель	Нестандартизованные коэффициенты		Стандартизованные коэффициенты	t	Значимость по таблице Дики-Фуллера
	В	Стандартная ошибка	Бета		
1 (Константа) ИПЦ США	,371 -,474	,073 ,041		5,092 -11,466	
2 (Константа) M2 США	1,167 -,710	,122 ,062		9,584 -11,411	
3 (Константа) Безработица США	1,992E-5 -,849	,038 ,059		,001 -14,470	

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Из таблицы 1.1 можно видеть, что с высокой долей вероятности все моделируемые процессы могут считаться стационарными.

Начнем анализ с показателя ИПЦ США. На рисунке 1.1 представлена динамика квартальных темпов прироста данного индикатора.

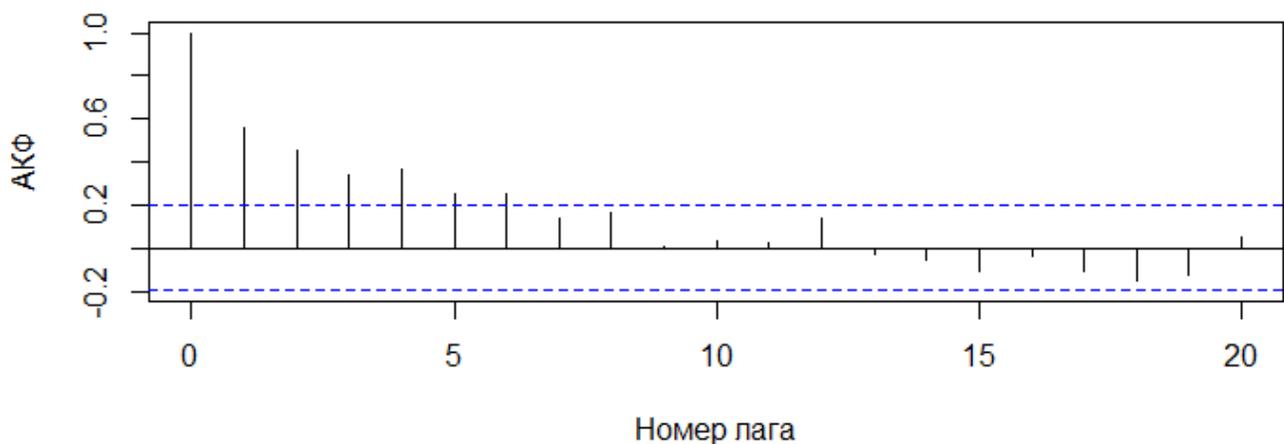


**Рисунок 1.1** – Временной ряд квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Как видно из рисунка 1.1, инфляция в США представляет собой процесс с непостоянной волатильностью. Основные периоды повышенного разброса значений данного временного ряда наблюдаются в периоды кризисных явлений и экономической нестабильности в стране. Здесь можно отметить высокую инфляцию периода первой мировой войны, сменившуюся затяжной дефляцией во время кризиса

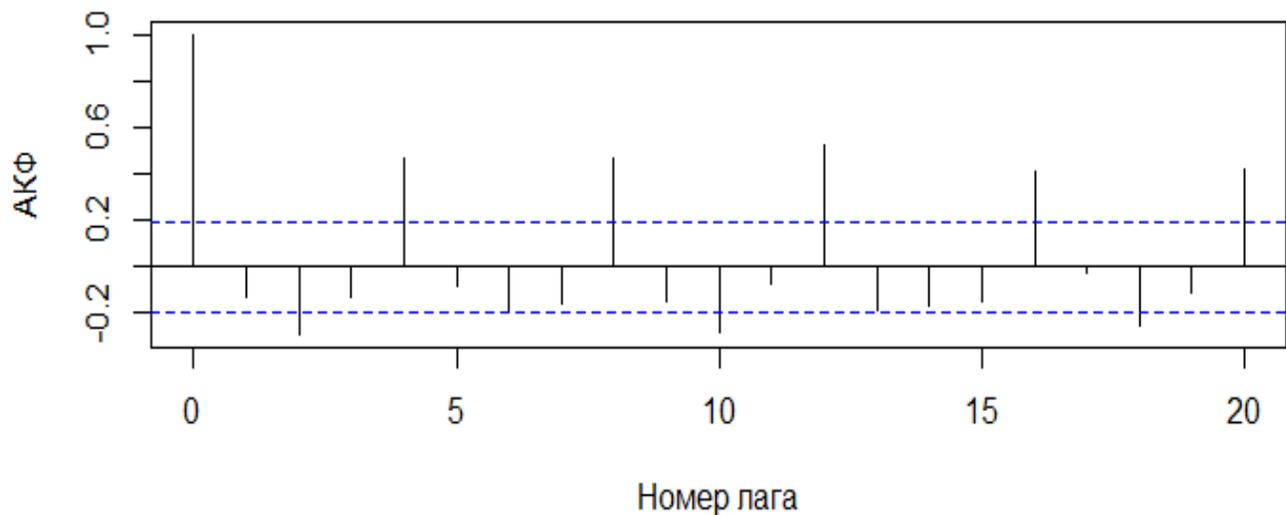
1920 г. и Великой депрессии 1929 г. Также повышенная волатильность в индексе потребительских цен наблюдается в периоды Второй мировой войны, мирового кризиса 1980-х годов, а также Мирового финансового кризиса 2007-2009 гг. Следует также особо отметить, что периоды рецессии могут сопровождаться как высокой инфляцией, так и дефляционными процессами, как это было во время последнего мирового финансового кризиса. Поскольку падение темпов роста физического объема ВВП может быть вызвано как снижением потребительского или инвестиционного спроса, так и инфляцией издержек, индекс потребительских цен в эти периоды соответственно снижается или повышается. Более того тенденции развития данного процесса, структура взаимосвязей его лаговых переменных подвержена существенным изменениям с течением времени. Для демонстрации данного феномена проведем следующий эмпирический эксперимент. Будем сравнивать автокорреляционные и частные автокорреляционные функции для первых 100 значений анализируемого ряда и последних 100 значений. Рисунки 1.2-1.3 показывают автокорреляционную функцию, а рисунки 1.4-1.5 – частную автокорреляционную функцию.



**Рисунок 1.2** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

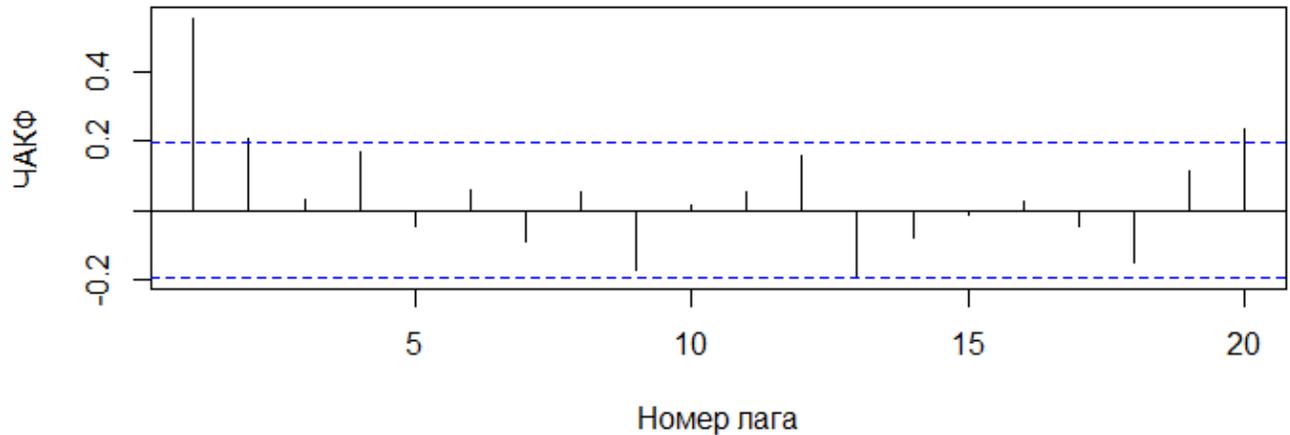
Как видно из рисунка 1.2, с 1913 г. по 1938 г. процесс развития инфляции в США представлял собой ярко выраженный инерционный процесс с практически неуловимой сезонной компонентой. Однако, если обратиться к рисунку 1.3, характеризующему автокорреляционную структуру инфляции за период с 1994 г. по 2019 г., то здесь уже отчетливо прослеживается сезонная компонента, а инерционность наоборот – почти незаметна.



**Рисунок 1.3** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

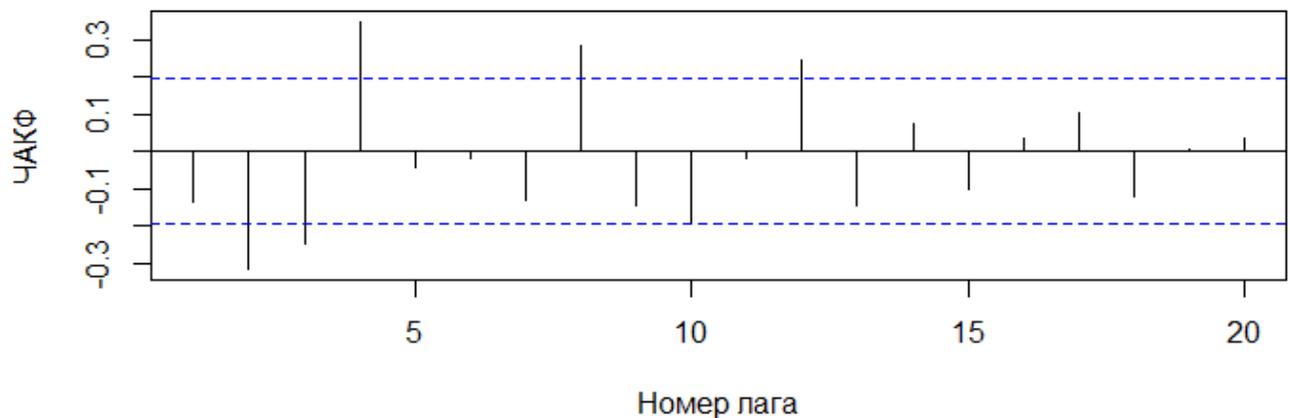
Если проанализировать частные автокорреляционные функции, представленные на рисунках 1.4 и 1.5, то в первые 25 лет анализируемого временного отрезка процесс развития инфляции больше напоминает процесс AR(2) или MA(1), в то время, как за последние 100 периодов прослеживается ярко выраженная сезонная составляющая и данный процесс уже логично моделировать с помощью моделей SARIMA (2,0,0)(1,0,0)<sub>4</sub>.



**Рисунок 1.4** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Ярко выраженную сезонность инфляционных процессов в США за последние 25 лет можно объяснить сформировавшимися нормами финансового года в части повышения государственных тарифов и бонусных выплат работникам компаний как частного, так и бюджетного сектора.

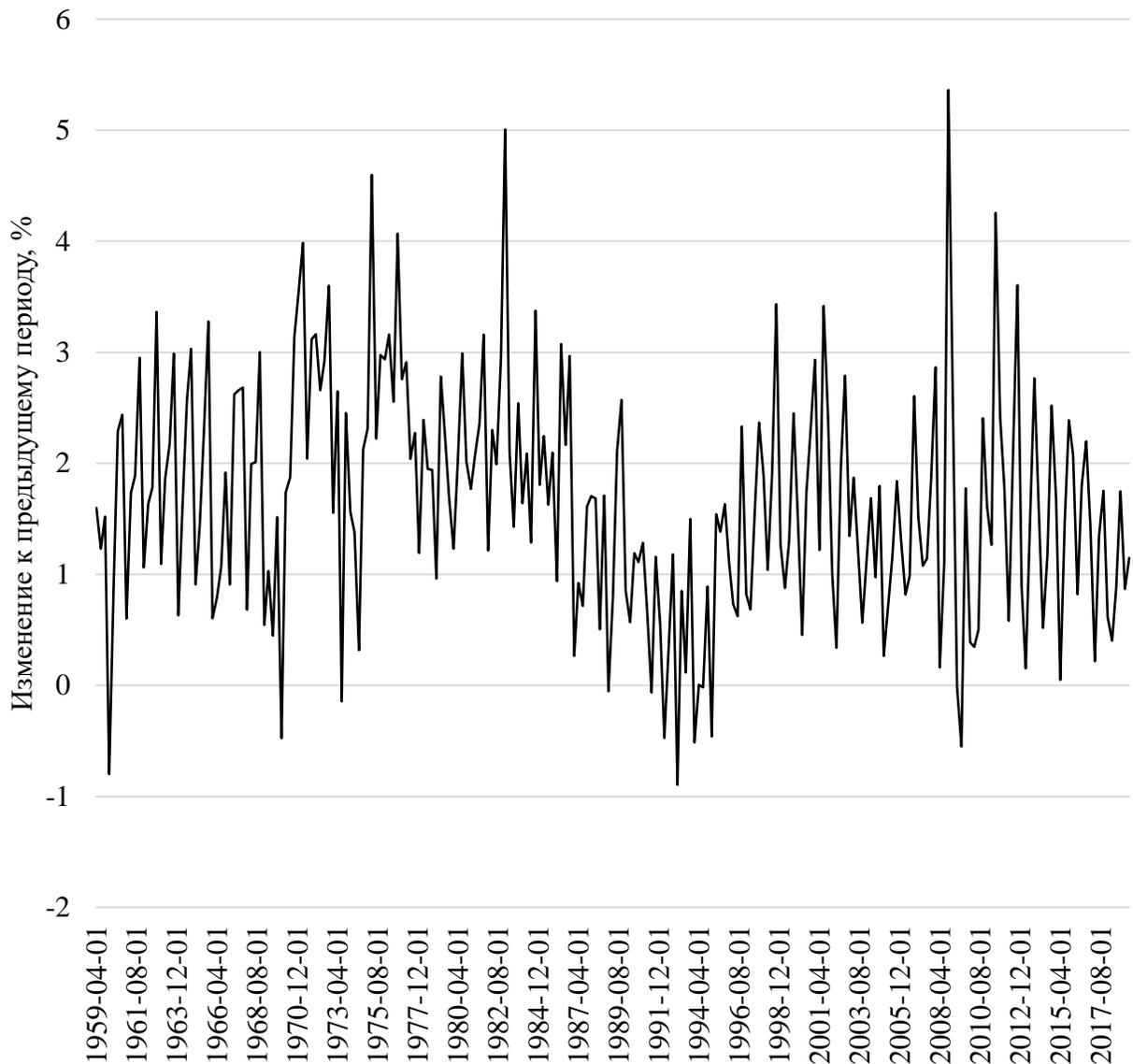


**Рисунок 1.5** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Если таким же образом подойти к анализу тенденций инфляционных процессов Японии и Великобритании (см. Приложение А), то можно убедиться в схожих трансформациях автокорреляционной структуры этих рядов. Данный факт наглядно демонстрирует, что вследствие определенного хода развития мировой экономики инфляционные процессы абсолютно несхожих стран синхронно приобрели сезонную составляющую, что говорит о высокой степени взаимозависимости протекающих макроэкономических процессов на межстрановом уровне [48, 244, 224, 188, 184]

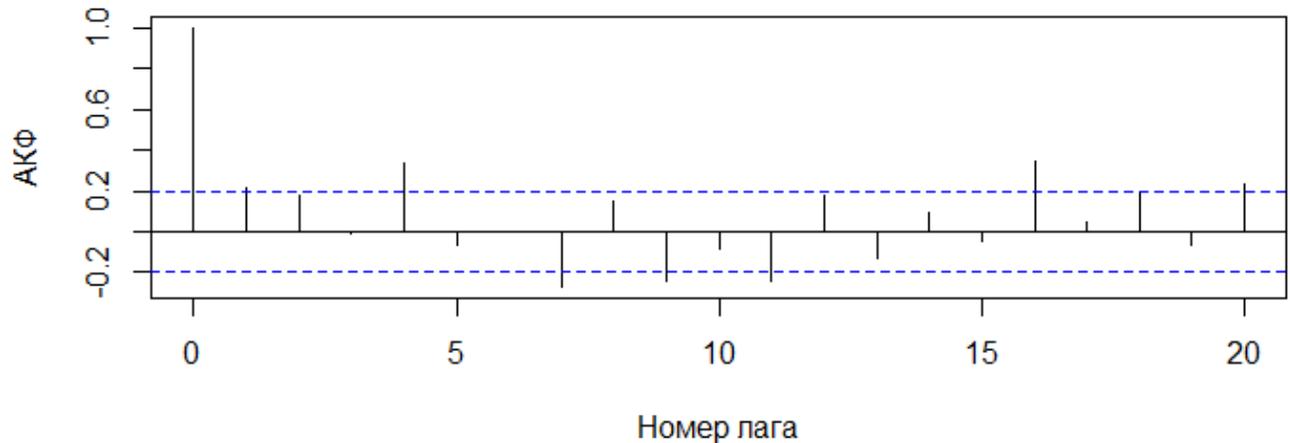
Далее рассмотрим динамику темпа прироста денежного агрегата М2 в США, см. рисунок 1.6. Данный индикатор отражает величину совокупного предложения денежной массы в экономике и является ключевым ориентиром при проведении преобразований монетарной политики государства [189, 215, 240, 129, 205]. Относительно рассмотренного выше индекса потребительских цен, динамика прироста денежной массы визуальнее представляется более стабильным с точки зрения автокорреляционной структуры процессом с присутствием сезонности. На рассматриваемом временном отрезке периоды повышенной скорости роста денежной массы в США совпадают с периодами рецессий 1980-1982 гг. и 2007-2009 гг., а период медленного роста рассматриваемого индикатора соответствует времени стабильно низкой инфляции и устойчивому экономическому росту 90-х годов. Особо следует отметить разницу во влиянии скорости роста денежной массы на скорость роста цен во время кризисных периодов. Так, во время мирового кризиса 1980-1982 гг. рост денежной массы сопровождался повышенной инфляцией, а во время кризиса 2007-2009 гг. наоборот – дефляцией. Данные феномены объясняются природой происхождения кризисных явлений, поскольку в первом случае рецессия была вызвана в большей степени инфляцией издержек, произошедшей вследствие стремительного роста цен на энергоносители в 1979 г., а во втором случае – перекредитованностью финансовой системы, вызванной активным наращиванием объемов субстандартной ипотеки.



**Рисунок 1.6** – Временной ряд кварталных темпов прироста денежного агрегата M2 в США

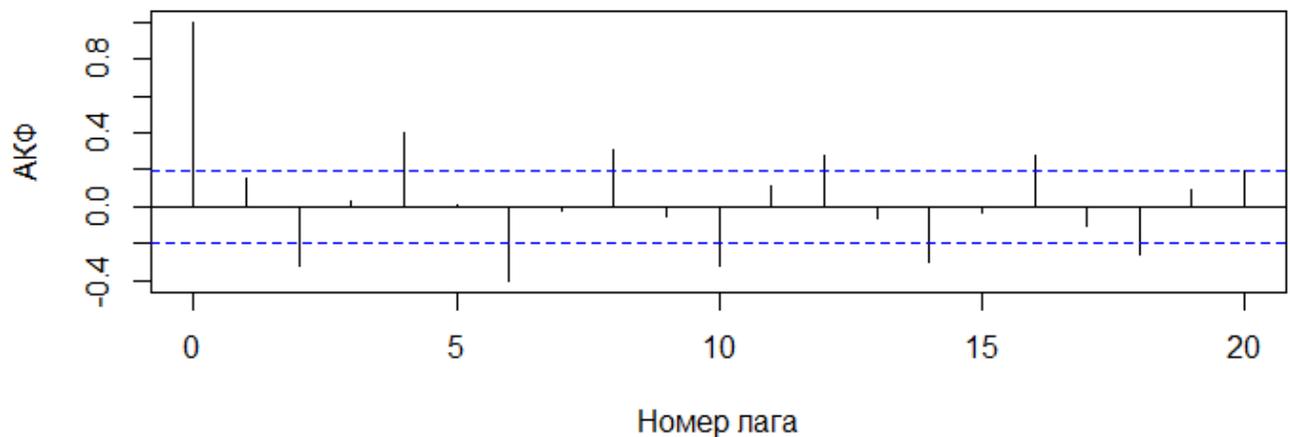
Источник: составлено автором на основе данных ФРС США

Анализируя графики 1.7-1.10, где представлены АКФ и ЧАКФ для данного временного ряда, можно говорить о постоянном присутствии сезонной компоненты, однако на последних 100 значениях ряда сезонность намного более ярко выражена, чем на первых 100. Если на первой части анализируемого ряда 1-й лаг имел заметное положительное влияние, то на последней части его влияние снизилось.



**Рисунок 1.7** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в США

Источник: составлено автором на основе данных ФРС США

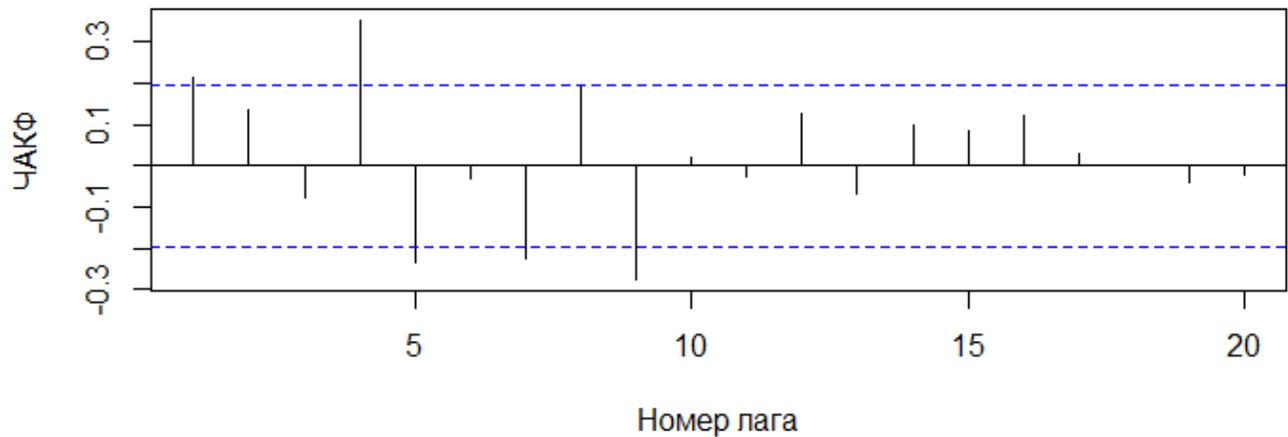


**Рисунок 1.8** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в США

Источник: составлено автором на основе данных ФРС США

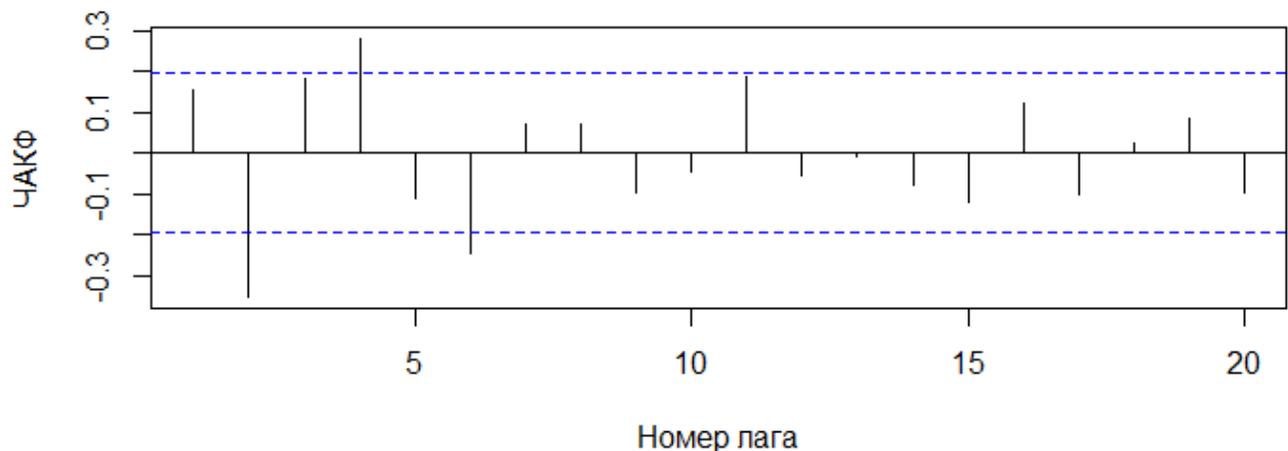
Таким образом, исходя из графического анализа характеристик рассматриваемого временного ряда, можно также говорить о существенных трансформациях, неизменно происходящих в структуре его внутренних взаимосвязей. Из рисунков 1.9-1.10 можно отчетливо видеть изменения силы и, главное, направления влияния лаговых переменных на целевую. Например, если обратить

внимание на 2-й лаг, то при очистке данных от влияния предыдущих лаговых переменных на первой части ряда он оказывает незначительное положительное влияние на выходную переменную, а на последних 100 значениях уже значительное отрицательное. Следовательно, при проведении процедуры спецификации по данным выборкам весьма вероятно получение двух разных по составу моделей.



**Рисунок 1.9** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в США

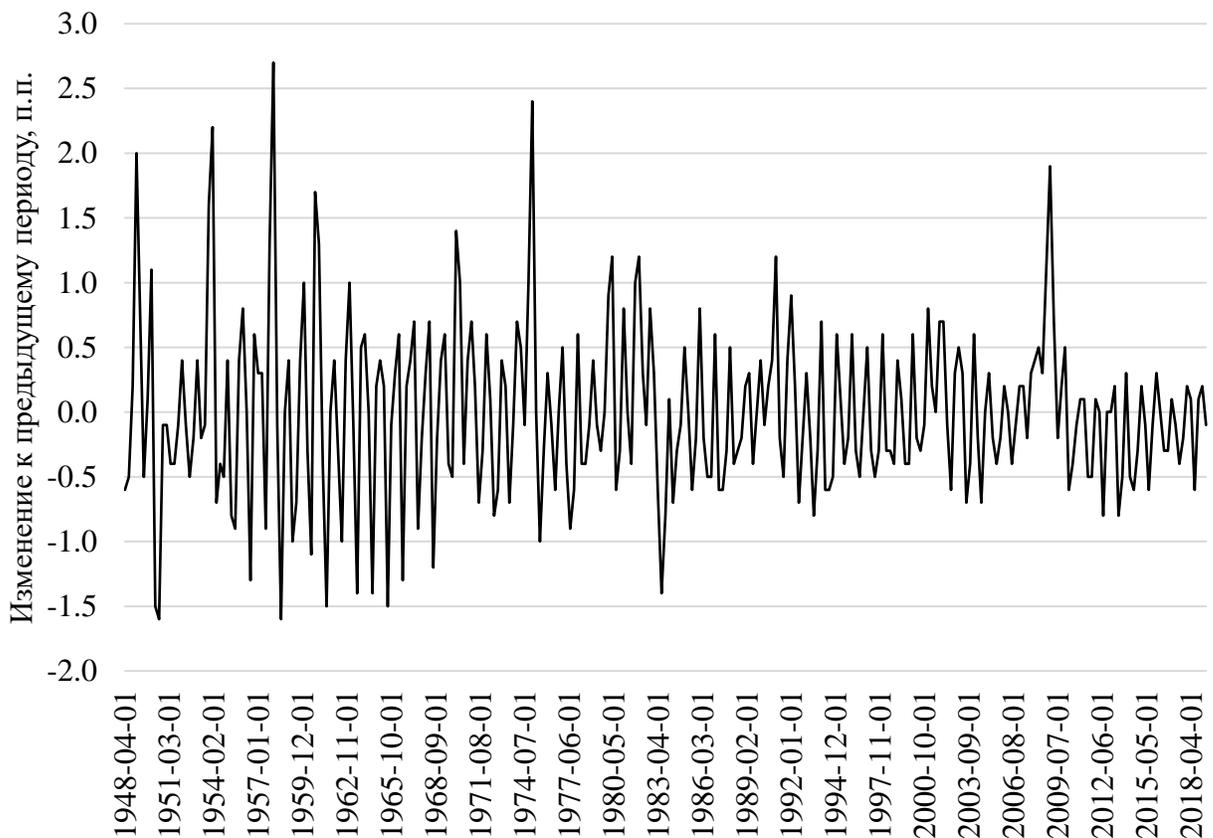
Источник: составлено автором на основе данных ФРС США



**Рисунок 1.10** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в США

Источник: составлено автором на основе данных ФРС США

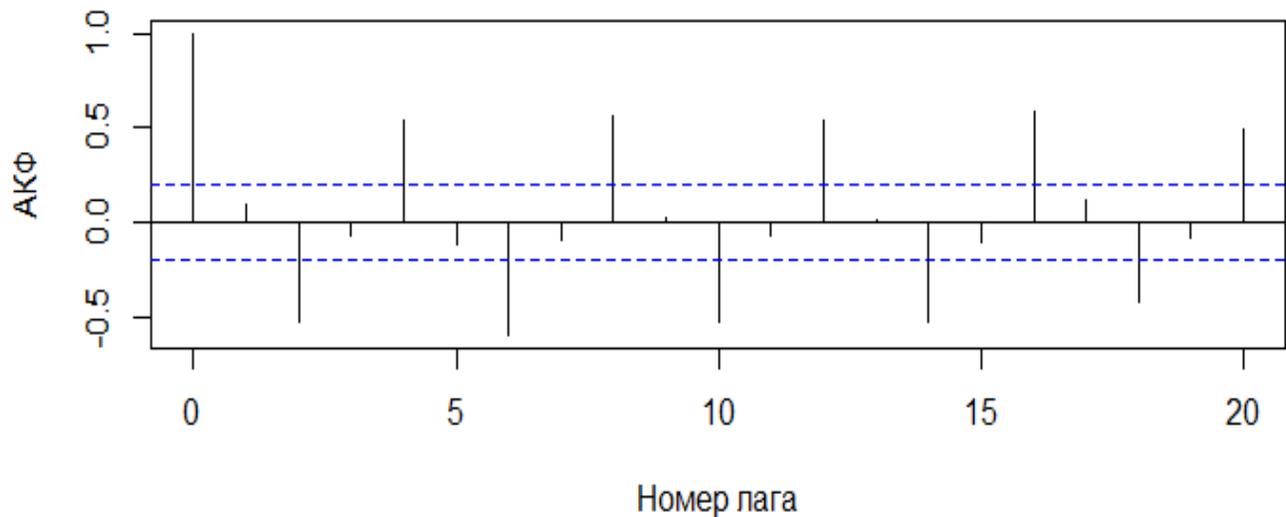
Далее обратимся к анализу показателя безработицы в США, первые разности которого представлены на рисунке 1.11. Исходя из визуального анализа данный процесс является еще более стабильным с точки зрения корреляционной структуры по сравнению с денежной массой и индексом потребительских цен. Присутствует ярко выраженная сезонная составляющая. Волатильность данного временного ряда не является постоянной и показывает значительно больший разброс в период с 1948 г. по 1975 г. нежели в период 1975-2019 гг. Локальные пики прироста безработицы соответствуют кризисным периодам экономики США 1957 г., 1980 г. и 2008-2009 гг.



**Рисунок 1.11** – Временной ряд кварталных изменений в уровне безработицы в США

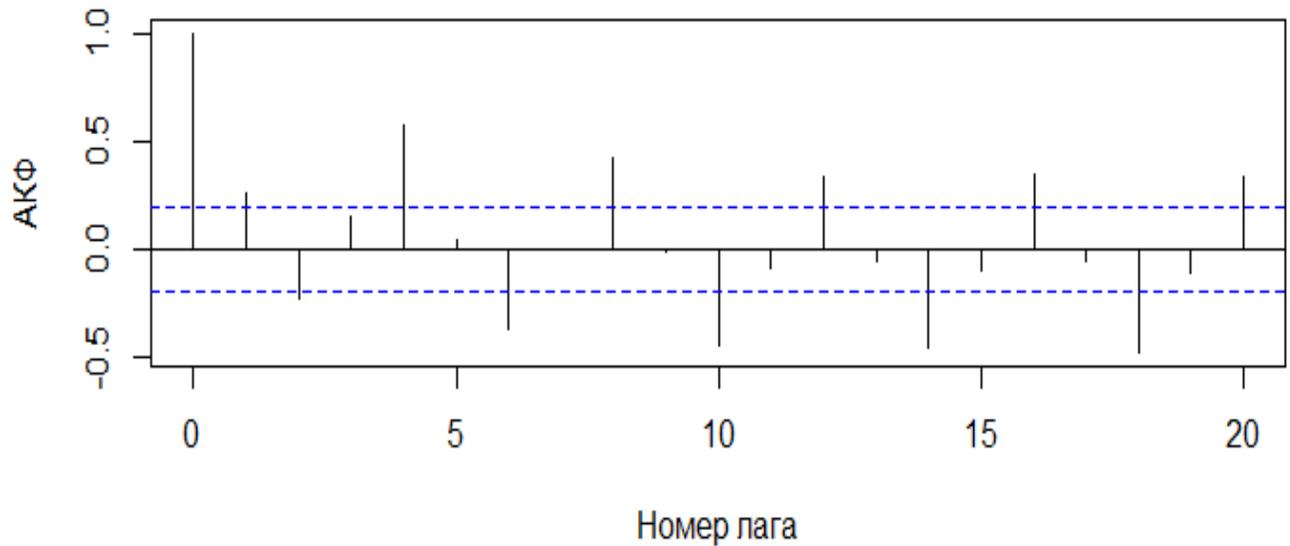
Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Что касается автокорреляционных и частных автокорреляционных функций безработицы в США, см. рисунки 1.12-1.15, то здесь на протяжении всего рассматриваемого периода сохраняется устойчивая сезонность, 4-й лаг является значимым в обоих выборках. Однако 1-й и 3-й лаги существенно нарастили свое положительное влияние на целевую переменную в выборке из последних 100, что также дает основания предполагать наличие изменений в структуре авторегрессионной модели данного временного ряда. Судя по структуре частных автокорреляционных функций, в период с 1948 г. по 1973 г. данный процесс хорошо моделируется с помощью модели вида SARIMA(0,0,0)(2,0,0)<sub>2</sub>, а за последние 25 лет наилучшим выбором была бы модель ARIMA(4,0,0). Таким образом, можно заключить, что даже самый стабильный из рассматриваемых временных рядов также подвержен изменению автокорреляционной структуры с течением времени, что требует принципиально иного подхода к его моделированию.



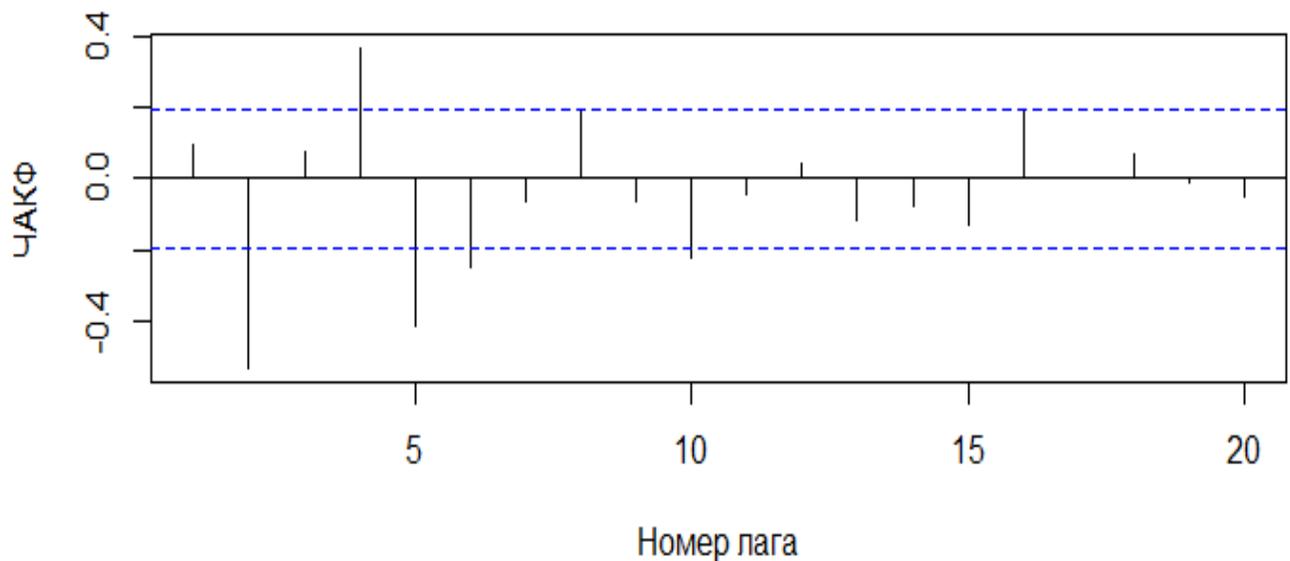
**Рисунок 1.12** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)



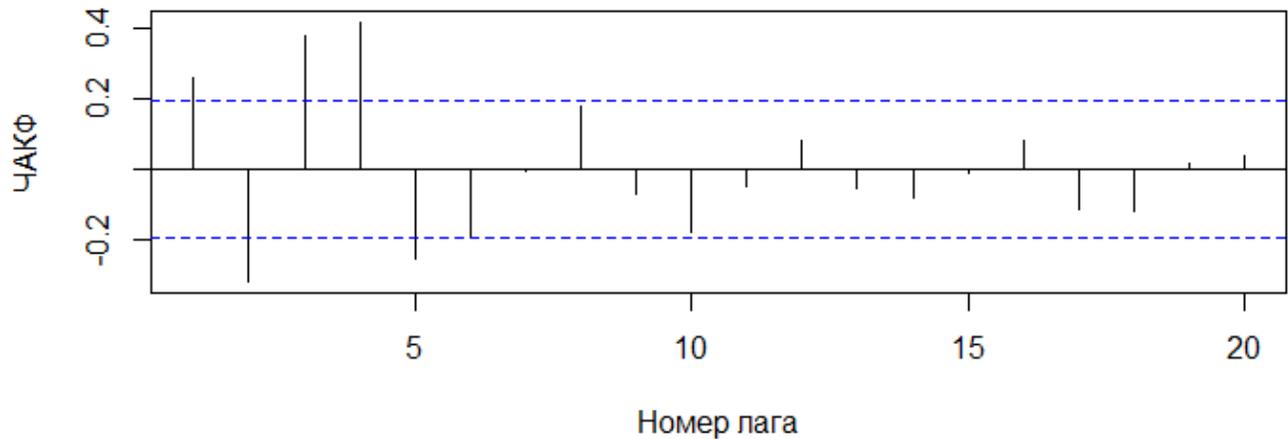
**Рисунок 1.13** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)



**Рисунок 1.14** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)



**Рисунок 1.15** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Если проанализировать схожим образом показатель квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии (см. Приложение А), то можно говорить о появлении сезонной компоненты, причем в отличие от предыдущих рассматриваемых случаев здесь сезонность проявляется с лагом 2, а не с лагом 4. Для выборки, состоящей из первых 100 значений рассматриваемого временного ряда, характерна модель  $AR(1)$ , а для последних 100 – модель  $SARIMA(0,0,0)(1,0,0)_2$ .

Что касается показателя безработицы в Великобритании (см. Приложение А), то при анализе данного временного ряда можно заключить, что несмотря на общее сохранение внутренней структуры взаимосвязей, некоторые различия все-таки присутствуют. По частным автокорреляционным функциям видно, что в первой выборке значимое положительное влияние на целевую переменную имеет 1-й лаг и значимое отрицательное – 3-й лаг, при этом во второй выборке 3-й лаг не является значимым, а 2-й приобрел значимое положительное влияние.

Если говорить о макроэкономических процессах в России (см. Приложение А), то даже за такую по глобальным меркам короткую новейшую историю развития

государства глобальные структурные изменения происходили несколько раз. Более того, причины их возникновения имели несхожую природу. В начале 90-х годов экономика России испытала на себе мощнейшую инфляционную волну (только за январь 1992 г. цены выросли более, чем на 245%), что существенно пошатнуло устойчивость финансовой системы (повсеместное распространение бартера, расширение «теневое» сектора и т.д.). Причиной этому явлению послужили процесс распада СССР и отмена государственного ценового регулирования. Дело в том, что к концу 80-х годов население аккумулировало на своих счетах огромную денежную массу, которая не была обеспечена соответствующим объемом предложения товаров и услуг. Цены оставались стабильными только за счет государственного регулирования, что означало скрытую инфляцию, выражавшуюся в товарном дефиците. В момент перехода к рыночной экономике скрытая инфляция просто приняла открытую форму, а вызванная ей паника населения спровоцировала экономический хаос.

Примерно к 1997 году российская экономика стабилизировалась, однако уже в 1998 году мы наблюдаем новый кризис, который был вызван объявленным Правительством дефолтом по облигациям федерального займа (ОФЗ). В связи с затяжным снижением мировых цен на энергоносители нефтегазовые доходы бюджета также снижались. С целью покрытия бюджетного дефицита Правительство РФ существенно нарастило выпуск ОФЗ, которые в какой-то момент уже не смогло финансировать. Объявленный дефолт существенно подорвал доверие иностранных и отечественных инвесторов и спровоцировал значительный отток иностранного капитала. Как следствие, курс национальной валюты снизился практически в 5 раз, что в свою очередь спровоцировало новую инфляционную волну и падение физического объема ВВП.

Первая половина 2000-х годов ознаменовалась для России благоприятными внешнеэкономическими условиями. Стремительный рост цен на энергоносители

способствовал стабилизации курса национальной валюты, пополнению золотовалютных резервов, профициту бюджета и росту российской экономики. За период с 2000 по 2008 гг. годовые темпы прироста физического объема ВВП практически все время находились выше 5%, что, несомненно, улучшало инвестиционный климат государства. Однако, рассмотренный выше мировой финансовый кризис, начавшийся в 2007 году в США, с некоторым запозданием сказался и на экономике России. Падение мировых цен на энергоносители и стремительный рост доллара против абсолютного большинства валют привели к инфляции издержек и рецессии российской экономики. Несмотря на такие отрицательные явления, период восстановления мировой, а в частности, и российской экономики прошел относительно быстрыми темпами: уже в 2010 году темпы роста ВВП были близки к докризисным.

С 2010 по 2014 гг. российская экономика развивалась достаточно устойчивыми темпами пока снова не произошло падение мировых цен на энергоносители. В связи с разработкой нового способа добычи нефти США существенно нарастили объемы добычи («Сланцевая революция»), что нарушило устоявшийся на тот момент баланс спроса и предложения. Данное явление совпало с обострившейся вокруг России геополитической обстановкой, которое связано с обвинением России в дестабилизации политической ситуации в Украине, присоединением Крыма, проводимой военной политикой в Сирии и т.д. Наложённые Евросоюзом с США санкции и ответные санкции РФ осложнили развитие внешней торговли, спровоцировали отток иностранного капитала и ухудшение инвестиционного климата. В отличие от быстрого восстановления после кризиса 2008 г. в данном случае Россия вошла в период затяжного практически нулевого экономического роста, постепенно теряя свои позиции на мировой арене.

Из приведенного выше описания мы видим, что даже за такой короткий для масштаба страны временной отрезок могут происходить масштабные трансформации

развития экономической системы. В качестве подтверждения представленного качественного анализа рассмотрим исторические месячные данные по инфляции потребительских цен в России за период с 01.1991 г. по 07.2019 г. Если проанализировать частные автокорреляционные функции для первых 100 и последних 100 значений ряда (см. Приложение А), то можно видеть существенные различия. В 90-е годы инфляционные процессы характеризовались ярко выраженной сезонной составляющей, причем порядок сезонности (лаг 9) не совпадал с годовым циклом (лаг 12). Присутствовала также менее выраженная инерционная составляющая, причем особо стоит отметить, что абсолютное большинство частных коэффициентов автокорреляции находится в положительной зоне. В целом анализируемую динамику было бы корректно моделировать согласно модели SARIMA(0,0,1)(1,0,0)<sub>9</sub>.

Что касается 2010-х гг., на которые так же, как и на 90-е выпал кризисный период, то частная автокорреляционная функция демонстрирует образовавшуюся полугодовую сезонность, возникшую в результате введения политики повышения тарифов ЖКХ 1 июля каждого года при сохранении традиционного январского повышения цен основной массы коммерческих компаний. При этом существенное положительное влияние имеет первый лаг рассматриваемого инфляционного процесса, что демонстрирует присутствие инерционной составляющей. Второй лаг показывает значимое отрицательное влияние, и в целом данный ряд будет резонно моделировать с помощью модели SARIMA(2,0,0)(1,0,0)<sub>6</sub>.

Исходя из данного анализа исторического развития макроэкономических процессов в Российской Федерации, можно говорить о высокой степени изменчивости их авторегрессионной структуры, что необходимо учитывать при построении моделей с целью предсказания будущей динамики макроиндикаторов.

Таким образом, по результатам проведения такого несложного эмпирического эксперимента можно предположить наличие структурных изменений во временных рядах большинства макроэкономических процессов вне зависимости от страновой

принадлежности. При построении эконометрических моделей на выборках разного размера высока вероятность получения разных по составу уравнений. Теоретически при выборе более длинного окна точность оценки параметров должна возрастать [166], однако такие модели учитывают и структуру данных прошлых периодов, которая естественно меняется с течением времени, что снижает точность прогноза. При выборе более короткого окна модель учитывает наиболее актуальные тенденции и внутренние взаимосвязи, но при этом из-за недостатка статистических данных дисперсии оценок коэффициентов модели возрастают. Вследствие этого возникает дилемма относительно выбора оптимальной длины окна, которая до сих пор не решена полностью.

Если бы существовала возможность получения некоторого набора статистических показателей по одному и тому же объекту за один и тот же промежуток времени, то тогда можно было бы при выборке достаточного объема произвести оценку истинных коэффициентов модели с приемлемой точностью, полагая, что изменение моделируемого индикатора обуславливается некоторой уникальной моделью за каждый отдельно взятый временной период. Однако специфика временных рядов предполагает наличие только одного значения за каждый период времени, что существенно усложняет процедуру моделирования таких процессов [249, 73]. Таким образом, следует отметить, что метод снижения неопределенности относительно размера выборки для построения моделей временных рядов может существенно повысить надежность получаемых оценок коэффициентов, что позволяет отнести данную задачу к первому классу сформулированных выше проблем.

Исходя из того, что внутренние взаимосвязи макроэкономических индикаторов подвержены изменению по мере развития экономической системы, представляется рациональным проводить процедуру динамической спецификации регрессионного уравнения. В результате данной процедуры по мере добавления новых статистических

данных пересматриваются не только значения коэффициентов моделей, но также и состав объясняющих переменных. Таким образом, достигается более высокая точность получаемых прогнозов. Однако при таком подходе возникает проблема расчета достоверного интервального прогноза. Дело в том, что традиционные процедуры регрессионного анализа дают состоятельную оценку ожидаемой дисперсии ошибок прогноза только при неизменном составе факторов модели в то время, как в случае его постоянного пересмотра, получаемые оценки являются систематически заниженными, что существенно снижает надежность интервального прогноза. Следовательно, метод проведения поправок данного смещения поможет повысить надежность получаемых доверительных интервалов и относится ко второму классу проблем, заявленных в начале данного раздела.

Наряду с вышеупомянутыми проблемами применения регрессионного инструментария к моделированию временных рядов макроэкономических процессов присутствует также проблема рассогласованности прогнозов при одновременном прогнозировании комплекса макроэкономических индикаторов. Основным подходом к решению данной проблемы являются системы одновременных уравнений, которые объединяют набор прогнозируемых макроэкономических процессов в функциональные уравнения (структурная форма). Однако предлагаемые методы решения подобных систем, особенно при условии сверхидентифицируемости, страдают от проблемы arbitrariness выбора приведенной формы системы. В данном случае речь идет о таких методах, как двухшаговый метод наименьших квадратов и трехшаговый метод наименьших квадратов. В подавляющем большинстве случаев при попытке привести моделируемые переменные в соответствие со связывающей их функциональной зависимостью (оценка структурной формы системы) после оценки приведенной формы неизбежны потери информации от опущения некоторых экзогенных факторов при формировании структурной формы. Отсюда следует, что разработка метода учета функциональных взаимосвязей между моделируемыми

процессами без потери информации от экзогенных переменных сможет существенно повысить точность оценки параметров модели и, как следствие, совокупную точность разрабатываемых уравнений. Таким образом, данную задачу можно с уверенностью отнести к первому классу вышеупомянутых проблем.

Подводя итоги данного раздела, можно сказать, что были сформулированы основные классы проблем регрессионного анализа временных рядов макроэкономических процессов, связанных с повышением точности прогнозирования и достоверности доверительных интервалов, а также соответствующие подпроблемы, которые будут решаться в рамках данного диссертационного исследования.

## 1.2 Проблемы спецификации и оценки параметров регрессионных моделей<sup>1</sup>

В настоящее время самым широко распространенным методом вычисления коэффициентов регрессионной модели является метод наименьших квадратов (МНК, англ. Ordinary Least Squares) и его многочисленные вариации. В связи с этим постараемся в данном разделе глубже разобраться в его специфике, достоинствах, недостатках и способах их устранения. Для начала дадим небольшую справку по данному методу.

МНК является математическим методом поиска оптимальных параметров регрессионной модели, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений подстраиваемой функции от истинных значений целевой переменной [2, 3]. Пусть  $\{Y, X\}$  – рассматриваемая выборка статистических данных, где  $Y$  – вектор-столбец наблюдений значений целевой переменной размерностью  $n \times 1$ , а  $X$  – конечная матрица наблюдений по объясняющим переменным размерностью  $n \times (m + 1)$ .

---

<sup>1</sup> Раздел составлен по материалам работы автора [23]

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда линейная регрессионная модель может быть представлена в следующем виде:

$$y_t = b_0 + b_1 x_{t1} + b_2 x_{t2} + \cdots + b_m x_{tm} + e_t, \quad (1.1)$$

либо в матричной форме:

$$Y = XB + e, \quad (1.2)$$

где  $e$  – вектор-столбец ошибок модели, состоящий из элементов  $e_t$ .

Для нахождения вектора коэффициентов  $B$  проводится процедура нахождения минимума целевой функции, представляющей собой сумму квадратов отклонений модельных значений от истинных значений целевой переменной [41, 16]. В результате данной оптимизации вектор  $B$  выражается аналитически следующим образом:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (1.3)$$

Здесь необходимо отметить, что МНК заслужил свою популярность, поскольку полученные на его основе оценки истинных коэффициентов регрессии  $\beta$  являются лучшими несмещенными оценками из класса линейных оценок (англ. BLUE, Best Linear Unbiased Estimator) при выполнении указанных ниже предпосылок.

**Предпосылка 1:** Строгая экзогенность ошибок, т.е.  $E(\varepsilon_t|X) = 0$ . Это значит, что ошибки модели не зависят от объясняющих переменных;

**Предпосылка 2:** Гомоскедастичность ошибок, т.е.  $E(\varepsilon_t^2|X) = \sigma^2$ . Дисперсия случайных отклонений является константой и не зависит от величины значений объясняющих переменных. Отметим, что невыполнение этой предпосылки называется гетероскедастичностью;

**Предпосылка 3:** Нормальность ошибок, т.е.  $\varepsilon_t \sim N(0; \sigma)$ . Случайные отклонения истинных значений зависимой переменной от модельных подчиняются нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией;

**Предпосылка 4:** Отсутствие полной мультиколлинеарности, т.е.  $X^T X$  является положительно определенной матрицей. Здесь имеется в виду, что среди объясняющих переменных нет функциональной линейной связи, что означает, что ни один из рассматриваемых предикторов не выражается функционально через другие;

**Предпосылка 5:** Отсутствие автокорреляции остатков, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_i; \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$ . Случайные отклонения являются полностью независимыми друг от друга, что означает отсутствие систематической взаимосвязи между любыми отдельно взятыми ошибками модели.

На практике при построении модели зачастую приходится прибегать к процедуре отбора объясняющих переменных, иначе называемой спецификацией модели [12]. При проведении спецификации мы стремимся отобрать для расчета коэффициентов линии регрессии наиболее значимые предикторы и исключить незначимые, т.е. те, которые не оказывают влияния на целевую переменную. Следует отметить, что качество проведенной спецификации оказывает существенное влияние на эффективность и адекватность получаемой модели [19]. Именно поэтому в данном разделе мы сконцентрируемся на тестировании и сравнительном анализе различных способов отбора и интегрирования набора объясняющих переменных. Первым делом

дадим краткую информационную справку по наиболее популярным методам спецификации уравнения регрессии.

**Отбор по всем возможным комбинациям.** В данном случае рассматриваются и сравниваются между собой все возможные модели, которые можно составить из данного набора потенциальных объясняющих переменных. Преимущество этого способа заключается в том, что отсутствует риск упустить лучшую по выбранному критерию модель. Однако указанное преимущество сопряжено с существенным недостатком, которым является вычислительная трудоемкость такого отбора, особенно, если число потенциальных объясняющих переменных достаточно велико. Поскольку количество моделей, которые можно построить по набору из  $m$  независимых переменных вычисляется по формуле  $N = 2^m$ , то уже при 30-40 независимых переменных спецификация регрессионного уравнения посредством отбора по всем возможным комбинациям становится абсолютно нецелесообразной процедурой, особенно для персональных компьютеров.

Следует также отметить, что независимо от метода отбора переменных в модель исследователю необходимо определиться с критерием, отражающим качество уравнения регрессии, и согласно которому будет оцениваться та или иная спецификация модели [20, 44]. Несомненно, конечная цель, которую желает достигнуть любой исследователь – это построение модели с минимальной ошибкой прогноза. Однако проблема заключается в том, что нам неизвестно заранее какую ошибку даст рассматриваемая модель. Но существует множество способов получить некоторую оценку будущей эффективности анализируемого уравнения. Приведем несколько самых часто используемых из них.

- **F-статистика.** Отражает отношение суммы квадратов отклонений линии регрессии от среднего значения целевой переменной, деленной на число включенных в уравнение независимых переменных, и несмещенной оценки дисперсии остатков модели. При выполнении гипотезы о том, что истинная линия регрессии не объясняет

никаких отклонений целевой переменной от своей средней, F-статистика подчиняется распределению Фишера, а именно

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - y)^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} \sim F_{m, n-m-1}. \quad (1.4)$$

Таким образом, согласно данному критерию следует выбрать ту спецификацию, которая дает наибольшее значение F-статистики.

- **Несмещенная оценка дисперсии ошибок прогноза** (англ. Mean Squared Forecast Error, MSFE). Является показателем ожидаемой точности прогноза выбранной модели, которая учитывает как дисперсию ошибок модели, так и дисперсию линии регрессии. Рассчитывается по формуле:

$$MSFE_{t+i} = s^2 \left( 1 + X_{t+i}^T (X^T X)^{-1} X_{t+i} \right), \quad (1.5)$$

где  $X_{t+i}$  – вектор-столбец значений объясняющих переменных, участвующих в построении прогноза на период  $t + i$ ,  $s^2$  – несмещенная оценка дисперсии ошибок, рассчитываемая следующим образом:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y} - y)^2}{n - m - 1}. \quad (1.6)$$

Отметим, что формула (1.5) используется в случае, если известен вектор-столбец  $X_{t+i}$ . В противном случае качество модели оценивается по формуле (1.6). Разумеется,

выбирается та модель, у которой значение несмещенной оценки дисперсии ошибок наименьшее.

- **Байесовский информационный критерий** (англ. Bayesian Information Criterion, BIC). Строится на предположении, что среди рассматриваемого набора моделей имеется одна истинная, которую можно определить с некоторой долей вероятности. Критерий штрафует модели за неоправданно большое количество параметров, тем самым, предотвращая переобучение модели. Вычисляется как:

$$BIC = n \cdot \ln(s^2) + m \cdot \ln(n). \quad (1.7)$$

Предпочтение отдается той модели, у которой значение байесовского информационного критерия является наименьшим.

- **Информационный критерий Акаике** (англ. Akaike Information Criterion, AIC). Является очень близким по смыслу с байесовским информационным критерием, так как также накладывает на модель штраф за каждую включаемую объясняющую переменную. Рассчитывается следующим образом:

$$AIC = n \cdot \ln(s^2) + 2m. \quad (1.8)$$

Выбирается точно так же, как и в предыдущем случае та модель, у которой значение информационного критерия является наименьшим.

- **Бутстрап** (англ. Bootstrap). В основе бутстраповского подхода лежит идея, что истинное распределение данных можно с достаточной точностью приблизить эмпирическим, то есть теми данными, которые оказались в выборке. В данном случае нам необходимо оценить качество рассматриваемой модели, а именно ее ожидаемую ошибку прогноза. Для этого можно прибегнуть к одной из бутстраповских техник “one in – one out”. Допустим, имеется окно наблюдений размера  $n$ , и по этой выборке

оценивается дисперсия ошибок линейной регрессионной модели. Начинается данная процедура с того, что из выборки удаляется первая строка, характеризующая значения переменных по одному наблюдению, и без нее рассчитываются параметры уравнения регрессии. Затем с помощью полученных параметров делается прогноз для удаленного ранее значения целевой переменной и записывается полученная ошибка. Далее удаленная строка возвращается в выборку, удаляется вторая строка и процедура повторяется. По проведении  $n$  итераций рассчитывается оценка дисперсии ошибок модели по формуле:

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i - y_i)^2}{n}. \quad (1.9)$$

В данном случае волна над символами обозначает, что данные значения мы получили по результатам бутстрапированной выборки.

**Прямой отбор** (англ. Forward Selection). Данный алгоритм предполагает выполнение следующих пошаговых операций. На первой стадии из всех имеющихся объясняющих переменных выбирается та, которая имеет наибольший показатель корреляции с целевой переменной. Далее по полученной однофакторной модели рассчитывается один из показателей ее эффективности, рассмотренных выше. Затем к модели по очереди добавляются оставшиеся независимые переменные и пересчитывается выбранный ранее показатель эффективности уже для двухфакторной модели. После чего в модель вводится переменная, вызвавшая наибольшее улучшение качества модели согласно выбранному критерию эффективности. Процедура повторяется до тех пор, пока ни одна из переменных более не улучшает показатель эффективности регрессионного уравнения.

**Обратное исключение** (англ. Backward Elimination). Данный способ спецификации регрессионного уравнения схож с предыдущим с той лишь разницей, что изначально в уравнение включаются все возможные переменные (в случае, если их число не превышает число наблюдений) и затем происходит постепенное отсеивание незначимых факторов. На каждом шаге мы попеременно исключаем из уравнения все имеющиеся переменные и сравниваем получившиеся модели плюс модель без исключения переменной по приведенным выше показателям эффективности. В результате проведенных сравнений принимается решение о целесообразности исключения объясняющей переменной из уравнения. Процедура завершается в случае, если исключение любого фактора ведет к потере качества модели.

**Пошаговый отбор** (англ. Stepwise selection). Представляет собой всего лишь модификацию метода прямого отбора. Различие в данном случае заключается в том, что на каждом шаге после включения в уравнение нового фактора производится проверка на значимость всех уже имеющихся переменных модели. Обычно значимость предикторов модели характеризуется  $p$ -значением, которое в классической литературе предлагается рассчитывать согласно следующей формуле:

$$p_i = 2 \cdot \left\{ 1 - T_{n-m-1} \left( \frac{|b_i|}{\sqrt{\text{Var}(b_i)}} \right) \right\}. \quad (1.10)$$

В данном случае  $T_{n-m-1}(x)$  – интегральная функция распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $n - m - 1$ , а несмещенная оценка дисперсии коэффициентов вычисляется как:

$$\text{Var}(b_{i-1}) = s^2 (X^T X)^{-1}_{ii}. \quad (1.11)$$

Если в процессе такой проверки обнаружится, что какие-то из ранее включенных в уравнение переменных стали незначимыми, то они исключаются из модели, после чего начинается очередная итерация по поиску новой объясняющей переменной, способной улучшить качество регрессионного уравнения. Процедура повторяется до тех пор, пока ни одна из переменных более не улучшает эффективность разрабатываемой модели.

**Лучшие подмножества** (англ. Best Subsets). Данный способ спецификации регрессионного уравнения является частным случаем отбора по всем возможным комбинациям. Здесь исследователь заранее определяет максимальное количество предикторов в уравнении. После чего перебираются все возможные комбинации объясняющих переменных, удовлетворяющих установленному ограничению на количество. Полученные модели сравниваются между собой по одному из показателей эффективности, рассмотренных выше, и выбирается лучшая из них.

**Отбор по остаточной корреляции.** Идея метода заключается в следующем. На первом этапе определяется объясняющая переменная, имеющая наибольший коэффициент парной корреляции с целевой. Затем в модель добавляется следующая переменная, которая показывает наиболее тесную связь с остатками модели, построенной только по первой включенной переменной. Для нахождения этой объясняющей переменной будем использовать частный коэффициент корреляции, который отражает взаимосвязь между двумя переменными, «очищенными» от влияния других переменных. Частный коэффициент корреляции между переменными  $i$  и  $j$ , «очищенными» от влияния остальных факторов набора из  $k$  переменных, в общем виде вычисляется как показано ниже:

$$r_{ij.12...(i-1)(i+1)...(j-1)(j+1)...k} = \frac{-R_{ij}^{-1}}{\sqrt{R_{ii}^{-1} \cdot R_{jj}^{-1}}}, \quad (1.12)$$

где  $R_{ij}^{-1}$  -  $i$ -ый  $j$ -ый элемент обратной корреляционной матрицы, включающей весь набор из  $k$  переменных.

Таким образом, для того, чтобы включить в модель вторую переменную, необходимо рассчитать частные корреляции всех оставшихся факторов с зависимой переменной, «очищенные» от влияния первой переменной. Для включения третьей переменной в модель повторяется та же самая процедура, только частные корреляции рассчитываются уже с учетом двух включенных ранее предикторов. На каждом шаге полученные модели проверяются согласно выбранному показателю эффективности. Процедура повторяется до тех пор, пока включение новых переменных перестает повышать качество модели.

Рассмотренные выше способы за исключением самого первого призваны снизить вычислительную сложность процедуры спецификации регрессионного уравнения и при этом минимизировать риски упущения из рассмотрения наилучшей модели, которую можно построить по данному набору независимых переменных. В данном разделе мы постараемся проанализировать эффективность применения этих способов в зависимости от свойств и структуры набора потенциальных объясняющих переменных и дать рекомендации относительно их применимости в тех или иных ситуациях.

Предположим, имеется целевая переменная  $y_t$  и набор потенциальных объясняющих переменных  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}$ . Для проведения сравнительного анализа вышеописанных способов спецификации поставим несколько имитационных экспериментов. В данных экспериментах будем полагать, что объясняющие переменные подчиняются нормальному закону распределения с нулевой средней и единичной дисперсией, а именно  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm} \sim N[E(x_{ti}) = 0, D(x_{ti}) = 1]$ . Также на данном этапе установим, что объясняющие переменные не мультиколлинеарны, то есть являются линейно независимыми друг от друга. Определим, что целевая переменная зависит только от первых четырех предикторов из сгенерированного

набора данных, а остальные факторы не имеют никакой взаимосвязи с  $y_t$ . Таким образом,  $y_t$  будет вычисляться как:

$$y_t = 2 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i} x_{ti} + \varepsilon_t, \quad (1.13)$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  – «белый» шум, 2 – произвольно выбранная константа модели,  $\beta_i = 1/i$  – истинные коэффициенты модели, убывающие пропорционально порядковому номеру объясняющей переменной.

В результате проведенного имитационного эксперимента были протестированы все шесть представленных выше способов отбора переменных, а именно отбор по всем возможным комбинациям, лучшие подмножества с числом включаемых переменных  $l \leq 4$ , прямой отбор, пошаговый отбор с уровнем значимости  $sig < 0.05$ , отбор по остаточной корреляции и обратное исключение. Данные способы были реализованы с использованием следующих критериев качества модели: несмещенная оценка дисперсии ошибок прогноза (MSE), F-статистика, Байесовский информационный критерий (BIC), среднеквадратические бутстрапированные ошибки модели. Для сравнения эффективности и особенностей применения каждого из методов отбора переменных и критериев качества использовались: среднеквадратическая ошибка прогноза за пределами выборки (MSE) и эмпирическая вероятность включения  $i$ -ого предиктора в модель ( $w_i$ ).

Эксперимент включал в себя несколько планов, при которых проверялись вышеупомянутые способы спецификации уравнения и критерии качества модели при трех различных окнах данных ( $n = 20, n = 40, n = 80$ ), а также при разном количестве потенциальных объясняющих переменных ( $m = 4, m = 6, m = 9$ ). Для получения расчетных значений по каждому из способов спецификации использовалось 10 000 итераций.

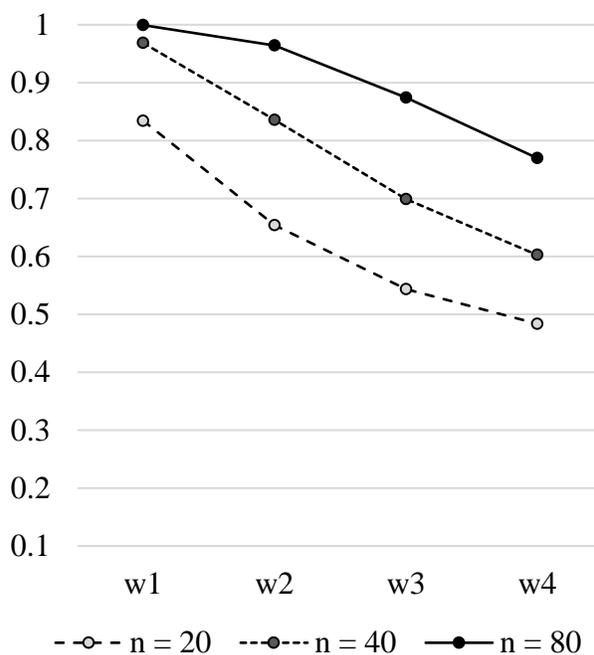
В таблице А.1 Приложения А представлена сводка по эффективности способов отбора переменных при критерии качества MSE и количестве потенциальных объясняющих переменных равном четырем. Таким образом, согласно (1.13) в исходном наборе предикторов содержатся только переменные, которые действительно оказывают влияние на результирующую переменную. Данная ситуация возникает, когда исследователь корректно идентифицировал теоретические взаимосвязи изучаемых экономических процессов и отобрал в пул переменных значимые факторы.

Анализируя показатель среднеквадратической реализованной ошибки прогноза по разным способам спецификации, становится ясно, что в случае, если набор потенциальных предикторов совпадает с истинным, метод пошагового отбора с контролем уровня значимости не является предпочтительным. В данном случае при проведении процедуры спецификации регрессионного уравнения желательным является включение как можно большего числа факторов, поскольку все они влияют на целевую переменную. Пошаговый отбор с этой точки зрения является достаточно «строгим» методом спецификации, так как включает в уравнение только те предикторы, которые с высокой степенью уверенности влияют на зависимую переменную, таким образом, теряя в точности прогнозирования.

Для иллюстрации вышесказанного на рисунках 1.16 и 1.17 приведены вероятности включения потенциальных факторов в уравнение при способе отбора по всем возможным комбинациям и пошаговом отборе. Как видно, из этих рисунков при пошаговом отборе гораздо меньшее количество переменных в среднем включается в уравнение, что в данном случае ведет к потере точности прогноза, так как на самом деле все потенциальные предикторы являются значимыми.

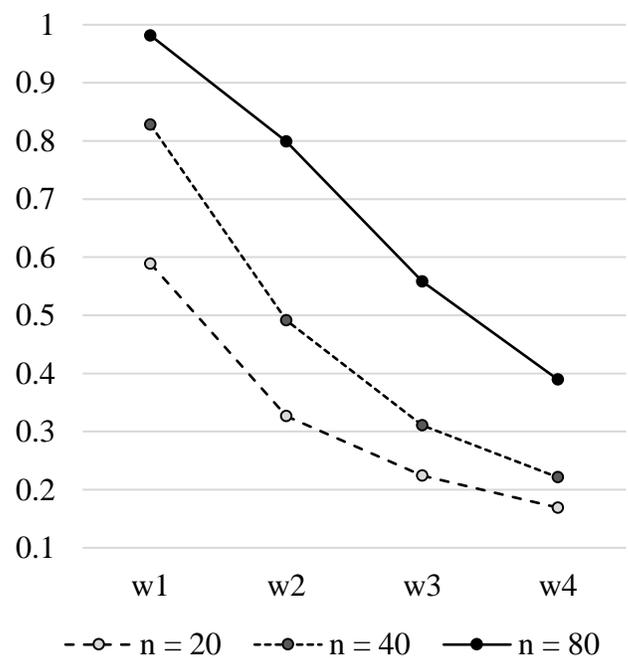
Как видно из таблицы А.2 Приложения А пошаговый отбор уже не является явным аутсайдером по точности прогноза в случае, если в рассматриваемом наборе предикторов появилось два, никак не связанных с целевой переменной.

На рисунках 1.18 и 1.19 видно, что переменные №5 и №6, не влияющие на целевую переменную гораздо реже включаются в уравнение регрессии, особенно при большом количестве наблюдений. Однако, в случае отбора по всем возможным комбинациям незначимые предикторы включаются чаще, чем при пошаговом отборе (35-40% против 5-10%). Но при этом в случае пошагового отбора менее вероятно и включение значимых факторов, что, в общем и целом, приводит примерно к равной точности прогнозирования.



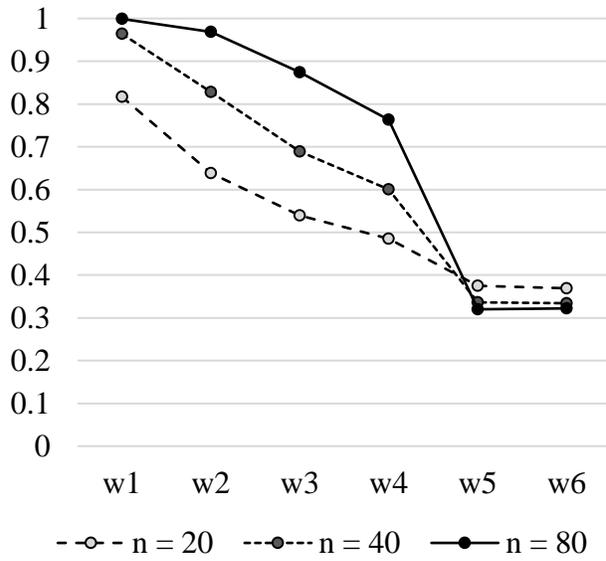
**Рисунок 1.16** – Частота включения факторов в модель (отбор по всем комбинациям, критерий MSE,  $m = 4$ )

Источник: составлено автором



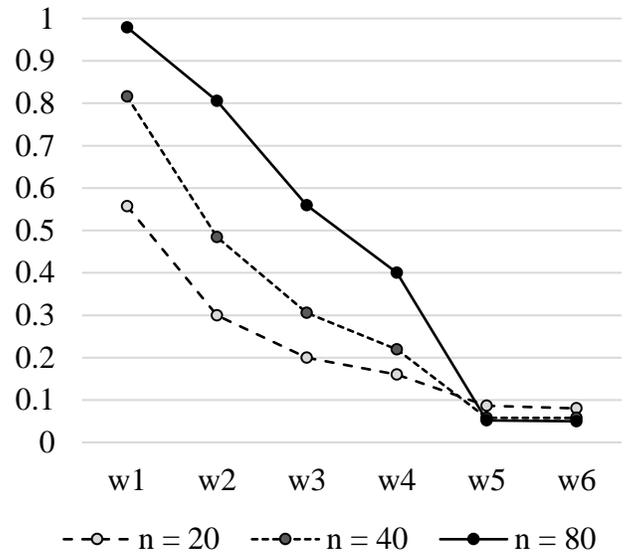
**Рисунок 1.17** – Частота включения факторов в модель (пошаговый отбор, критерий MSE,  $m = 4$ )

На рисунках 1.20 и 1.21 представлена схожая картина, как и на предыдущих двух, с той лишь разницей, что в данном случае количество незначимых предикторов в изначальном наборе факторов увеличилось до пяти.

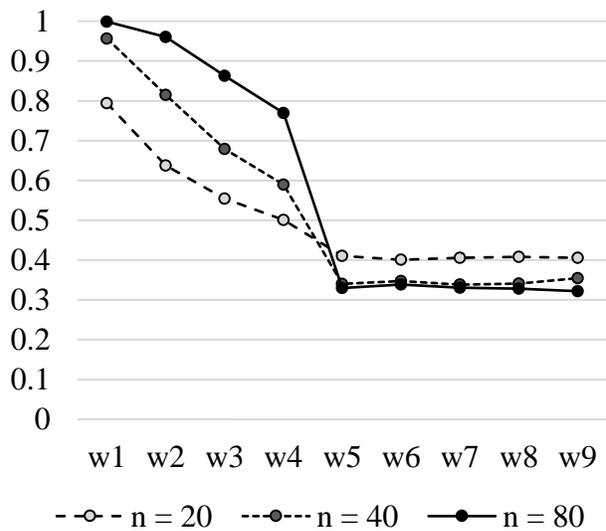


**Рисунок 1.18** – Частота включения факторов в модель (отбор по всем комбинациям, критерий MSE,  $t = 6$ )

Источник: составлено автором

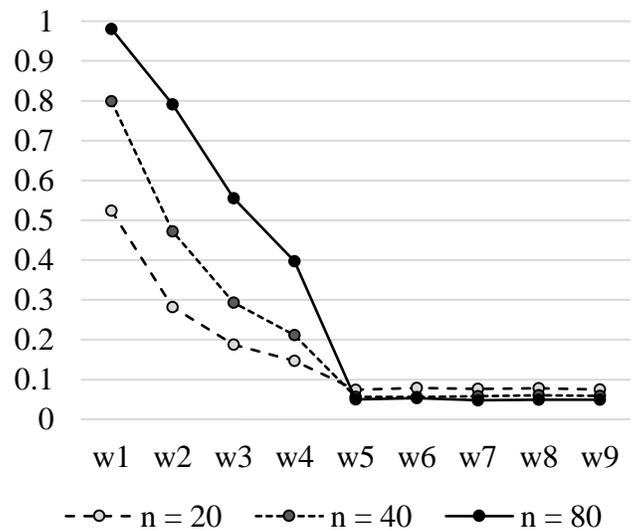


**Рисунок 1.19** – Частота включения факторов в модель (пошаговый отбор, критерий MSE,  $t = 6$ )



**Рисунок 1.20** – Частота включения факторов в модель (отбор по всем комбинациям, критерий MSE,  $t = 9$ )

Источник: составлено автором



**Рисунок 1.21** – Частота включения факторов в модель (пошаговый отбор, критерий MSE,  $t = 9$ )

Как видно из таблицы А.3 Приложения А в случае малого количества наблюдений и при значительном числе незначимых предикторов контроль уровня значимости в некоторой мере оправдывает себя.

В таблицах А.4-А.6 Приложения А представлены сводки по эффективности способов отбора переменных по байесовскому информационному критерию. Рассматриваются аналогичные случаи как в таблицах А.1-А.3 Приложения А, а именно три различных окна данных ( $n = 20$ ,  $n = 40$ ,  $n = 80$ ), а также количество потенциальных объясняющих переменных ( $m = 4$ ,  $m = 6$ ,  $m = 9$ ).

Отметим, что в случае применения байесовского информационного критерия, рассматриваемые способы отбора переменных показывают более близкие результаты, чем при критерии MSE. Сравнивая таблицы А.1-А.3 и А.4-А.6 Приложения А можно сделать вывод, что применение ВИС дает лучшие результаты в случае короткого окна данных, однако при достаточном числе наблюдений предпочтительным остается выбор в пользу критерия наименьшей ожидаемой ошибки прогноза.

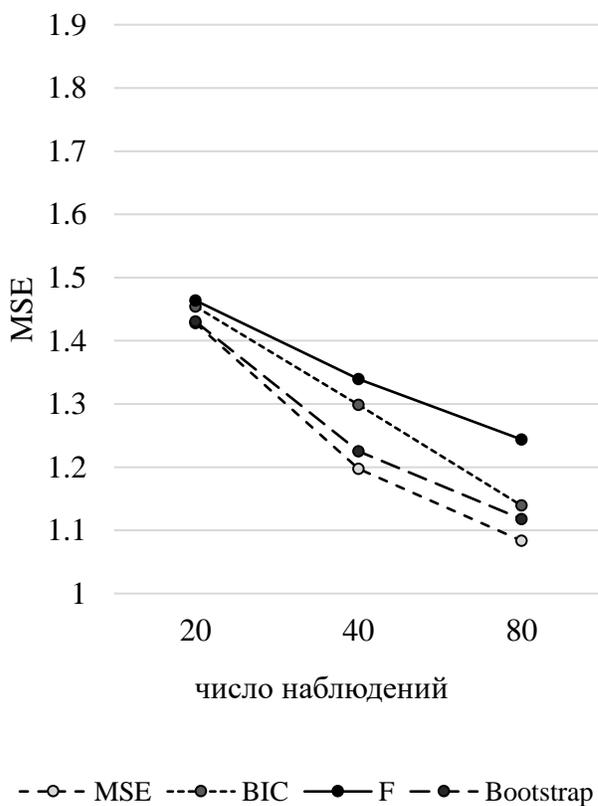
В таблицах А.7-А.9 Приложения А представлены сводки по эффективности способов отбора переменных по критерию F-статистика. Тестирование проводилось по параметрам, аналогичным тем, которые использовались для расчета таблиц А.1-А.6 Приложения А.

Анализируя результаты эффективности способов спецификации регрессионного уравнения из таблиц А.7-А.9, можно заключить, что F-статистика так же, как и ВИС является менее предпочтительным критерием оценки качества модели, чем MSE в случае длинного окна наблюдений, однако демонстрирует схожую с ВИС эффективность при коротком окне данных. В рамках данного критерия эффективности регрессионного уравнения при коротком окне данных предпочтительным способом спецификации является пошаговый отбор.

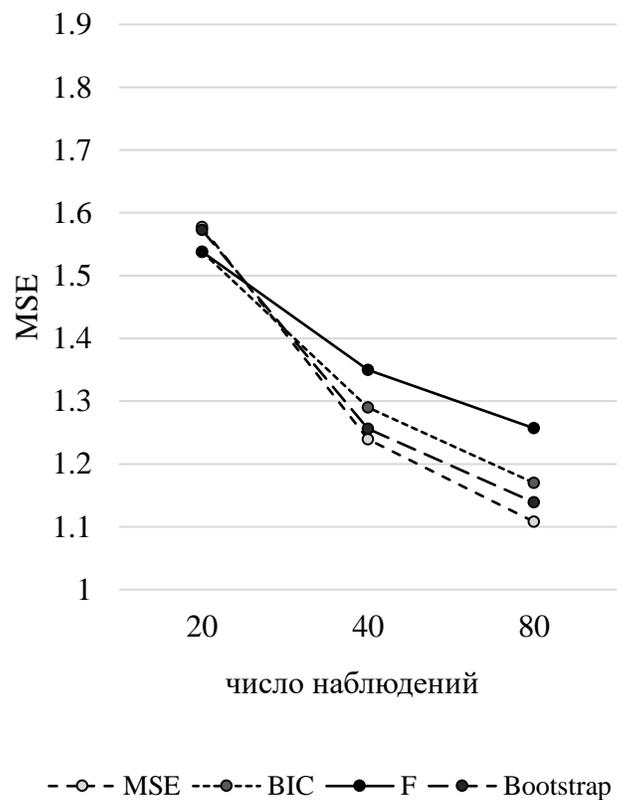
В таблицах А.10-А.12 Приложения А приведены результаты имитационного эксперимента по проверке эффективности способов отбора переменных согласно

величине бутстрапированных среднеквадратических ошибок модели. Модели, полученные на основе критерия бутстрап практически являются аналогом уравнениям, рассчитанным по критерию MSE, демонстрируя слегка большую ошибку при значительном превосходстве числа наблюдений над числом потенциальных предикторов и наоборот – немного более высокую точность при коротком окне данных и значительном числе потенциальных факторов.

На рисунках 1.22-1.24 приведены сравнения средних эффективностей способов спецификации регрессии в зависимости от различного числа потенциальных объясняющих переменных.

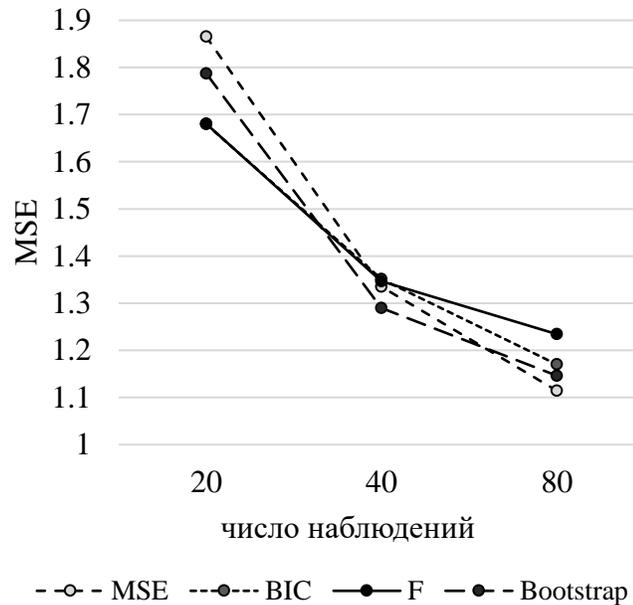


**Рисунок 1.22** – Сравнение эффективности моделей ( $m = 4$ )



**Рисунок 1.23** – Сравнение эффективности моделей ( $m = 6$ )

Источник: составлено автором



**Рисунок 1.24** – Сравнение эффективности моделей ( $m = 9$ )

Источник: составлено автором

Сразу отметим, что ни один из способов спецификации и критериев эффективности не является наиболее предпочтительным при любых исходных условиях. Так, из представленных выше рисунков можно сделать две основные рекомендации: в среднем при значительном превосходстве числа наблюдений над числом рассматриваемых предикторов целесообразней использовать критерий MSE в качестве показателя качества модели, а в случае короткого окна данных и наличия неопределенности относительно значимости отобранных факторов предпочтительнее использовать F-статистику или BIC/AIC. Однако, легко заметить, что, если принимать решение о выборе способа спецификации модели и критерии оценки ее качества в условиях неопределенности относительно степени значимости предварительно отобранных предикторов, то присутствует высокая вероятность выбрать далеко не лучшую модель. Если при достаточно длинном окне данных различия в эффективности способов отбора переменных не такие критичные, то при

относительно небольшом числе наблюдений эти различия достигают значений в 20-30% и в этом случае у исследователя появляются реальные риски потери точности из-за неверного выбора способа спецификации и критерия эффективности. Для снижения этих рисков применяются методы взвешивания регрессионных уравнений, которые детально рассмотрены в Главе 2 диссертационной работы.

### 1.3 Отрицательное влияние мультиколлинеарности факторов на точность прогноза и способы ее устранения<sup>2</sup>

Как было указано в предыдущем разделе, предпосылка 4 метода наименьших квадратов состоит в том, что отсутствует полная линейная зависимость между объясняющими переменными. Если данное условие не выполняется, то представляется невозможным оценить коэффициенты модели с помощью МНК [47].

Для пояснения вышесказанного предположим, что имеется теоретическая модель регрессии

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t. \quad (1.14)$$

Если  $x_{t1} = x_{t2} + x_{t3}$ , то  $\text{rang}(X) = 3$ , а не 4, откуда получаем, что  $\text{rang}(X^T X) = 3 \Rightarrow \det(X^T X) = 0$ , а это означает, что матрица  $(X^T X)^{-1}$  не будет определена. Поэтому вектор оценок истинных коэффициентов  $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$  не может быть вычислен. Данная проблема возникает из-за того, что представляется невозможным отделить влияние  $x_{t1}$  от влияния  $x_{t2}$  и  $x_{t3}$ .

---

<sup>2</sup> Раздел составлен по материалам работ автора [33, 39]

Полная мультиколлинеарность возникает не так часто и, как правило, легко устраняется путем исключения одной из линейно зависимых переменных из уравнения регрессии. Поэтому зачастую под мультиколлинеарностью подразумевают не функциональную линейную зависимость между объясняющими переменными, а ситуацию, при которой предикторы хоть и не функционально зависимы, но все равно меняются похожим образом [147, 136]. К примеру, для уравнения (1.14) это может выглядеть как  $x_{t1} = x_{t2} + x_{t3} + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  – это некоторая ошибка, принимающая малые значения по сравнению с величинами объясняющих переменных. В данной ситуации МНК оценки коэффициентов регрессии вычисляются и, более того, по-прежнему являются эффективными несмещенными оценками из класса линейных оценок (BLUE) [13, 18]. Однако, если присутствует высокая степень мультиколлинеарности, то  $\det(X^T X) \rightarrow 0$ , соответственно элементы матрицы  $(X^T X)^{-1}$  будут стремиться к бесконечности, что прямым образом сказывается на элементах дисперсионно-ковариационной матрицы оценок коэффициентов регрессии  $cov(B) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$ . Большие значения дисперсии оценок коэффициентов означают то, что точность этих оценок будет низкой, и, как следствие, они будут незначимы. Это происходит потому что, если предикторы тесно связаны между собой – достаточно трудно отдельно оценить влияние каждого из них на целевую переменную. Таким образом, наличие сильной мультиколлинеарности напрямую оказывает влияние на экспликативные возможности получаемой модели и должно сопровождаться применением специально разработанных методов.

Прежде, чем перейти к анализу методов борьбы с мультиколлинеарностью, рассмотрим основные способы ее диагностики.

- 1) Незначимые коэффициенты при регрессорах, но при этом большой коэффициент детерминации и F-статистика.
- 2) Чувствительность оценок коэффициентов и их дисперсий к добавлению и исключению наблюдений из выборки.

3) Высокие показатели парной корреляции между отдельными предикторами.

4) Высокие коэффициенты расширения дисперсии (англ. Variance Inflation Factor, VIF).

5) Высокий индекс обусловленности.

Рассмотрим детально последние два численных измерителя мультиколлинеарности.

**VIF.** Как уже было подчеркнуто ранее, проблема увеличения дисперсии оценок коэффициентов регрессии возникает из-за того, что объясняющие переменные сильно взаимосвязаны. В этой связи наиболее информативным показателем считается коэффициент детерминации в регрессии, которая представляет собой зависимость одной из объясняющих переменных от всех остальных. Обозначим как  $R_j^2$  коэффициент детерминации регрессии  $x_j$  на все оставшиеся предикторы. Тогда, дисперсию оценки коэффициента регрессии при  $j$ -ом предикторе можно представить в виде:

$$\text{var}(b_j) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \cdot \frac{1}{1 - R_j^2}. \quad (1.15)$$

Для доказательства см. [256]. Формула (1.15) показывает, что дисперсия коэффициента в множественной регрессии разлагается на две компоненты. Во-первых, это дисперсия оценки коэффициента, которая имела бы место быть в случае, если регрессия была бы однофакторной, то есть в качестве предиктора использовалась бы только переменная  $x_j$ . Вторая компонента – это  $1/(1 - R_j^2)$ , которая изменяется от единицы до бесконечности. Именно из-за этого дисперсия оценки коэффициента будет как бы расширяться, так как в регрессии есть еще другие объясняющие переменные, взаимосвязанные с переменной  $x_j$ . Поэтому вторая компонента получила название коэффициент расширения дисперсии (VIF).

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}. \quad (1.16)$$

Если остальные объясняющие переменные линейно не взаимосвязаны с  $x_j$ , то  $R_j^2 = 0$  и соответственно  $VIF_j = 1$ . В противном случае, если  $x_j$  практически полностью можно линейно выразить через остальные предикторы, то  $R_j^2 \rightarrow 0$ , а  $VIF_j \rightarrow \infty$ , что соответствует бесконечной дисперсии оценок коэффициентов. Таким образом, VIF является явным численным показателем степени мультиколлинеарности среди независимых переменных.

**Индекс обусловленности** (англ. Conditional Index, CI). Выше было показано, что при высокой степени взаимозависимости объясняющих переменных  $\det(X^T X) \rightarrow 0$ . Поскольку определитель матрицы равен произведению собственных чисел, то важную информацию о них может дать показатель обусловленности, который вычисляется следующим образом:

$$CI = \sqrt{\frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)}}, \quad (1.17)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $X^T X$ .

Если все предикторы ортогональны по отношению друг к другу, то  $CI = 1$ , так как все собственные числа равны между собой, а если определитель матрицы  $X^T X$  близок к нулю, то индекс обусловленности стремится к бесконечности. Таким образом, если  $VIF_j$  измеряет мультиколлинеарность ассоциированную непосредственно с  $j$ -ым предиктором, то индекс обусловленности является обобщенным численным измерителем мультиколлинеарности, который в некотором роде агрегирует информацию по всем  $VIF_j$  в один интегральный показатель.

Перейдем к краткому описанию наиболее популярных способов борьбы с мультиколлинеарностью. Здесь не будем акцентировать внимание на таких тривиальных способах, как исключение переменных из уравнения или преобразования мультиколлинеарных предикторов.

**Ридж-регрессия** (англ. Ridge regression). Поскольку при применении обычного МНК получаемые оценки коэффициентов не имеют каких-либо ограничений, то в случае высокой мультиколлинеарности они могут расходиться в плюс или минус бесконечность, что, естественно, негативно сказывается на адекватности и точности модели. Для устранения данного «взрывного» характера поведения оценок коэффициентов ридж-регрессия накладывает определенные ограничения на величины этих оценок. Таким образом, задача нахождения коэффициентов модели сводится к минимизации суммы квадратов ошибок уравнения при наличии ограничений на параметры, а именно

$$(Y - XB)^T(Y - XB) \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m b_i^2 \leq t. \quad (1.18)$$

При условии центрирования  $Y$  и стандартизации  $X$  оптимизационную задачу (1.18) можно также представить в виде минимизации суммы квадратов отклонений модели без константы с наложением штрафа на величины коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} \circ & * \\ Y - X & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \circ & * \\ Y - X & B \end{pmatrix} + \lambda \sum_{i=1}^m b_i^2 \rightarrow \min, \quad (1.19)$$

где параметр  $\lambda$  отвечает за степень сжатия оценок коэффициентов модели. Если  $\lambda = 0$ , то параметры ридж-регрессии будут равны простым МНК-оценкам. В случае когда  $\lambda \rightarrow +\infty$  – ридж-регрессия дает нулевые коэффициенты при предикторах,

оставляя в изначальной модели только свободный член. Таким образом, ридж-регрессия может рассматриваться в качестве альтернативного метода спецификации регрессионного уравнения.

Поскольку функция (1.19) является выпуклой, то она имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде:

$$B_{\lambda}^{ridge} = \begin{pmatrix} *^T & * \\ X & X + \lambda I_m \end{pmatrix}^{-1} X^*^T \circ Y, \quad (1.20)$$

где  $I_m$  – единичная матрица размерности  $m \times m$ .

Включение параметра  $\lambda$  делает матрицу невырожденной, даже если  $X^T X$  не является обратимой. Именно это свойство было первоначальной мотивацией для разработки методики ридж-регрессии, см. [150]. Отметим, что для выбора оптимального значения параметра  $\lambda$  зачастую используют кросс-валидацию. При проведении данной процедуры анализируемые данные разбиваются на две выборки: обучающую и проверочную. По первой выборке проводится расчет коэффициентов модели при заданном значении  $\lambda$ , которые впоследствии используются на проверочной выборке для построения модельных значений целевой переменной и расчета критерия эффективности анализируемой модели. Такая последовательность действий повторяется рекурсивно до достижения оптимального значения  $\lambda$ , при котором критерий эффективности модели является наилучшим.

**Регрессия LASSO** (англ. Least Absolute Shrinkage and Selection Operator). Данный метод был предложен в работе [238] и является в некотором роде аналогом ридж-регрессии. Главное отличие заключается в том, что в случае LASSO в качестве ограничений в (1.18) берутся не квадраты коэффициентов, а их значения по модулю, а именно:

$$(Y - XB)^T (Y - XB) \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m |b_i| \leq t, \quad (1.21)$$

или в альтернативном представлении:

$$\begin{pmatrix} \circ & * \\ Y - X & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \circ & * \\ Y - X & B \end{pmatrix} + \lambda \sum_{i=1}^m |b_i| \rightarrow \min. \quad (1.22)$$

Параметр  $\lambda$  в данном случае выполняет точно такую же функцию как и в ридж-регрессии, расширяя или сжимая значения оценок коэффициентов регрессии. Еще одним отличием является то, что решение регрессии LASSO не имеет аналитического представления и решается с помощью различных подходов квадратичного программирования.

**Метод главных компонент** (англ. Principal Component Analysis, PCA). Изначально был предложен Карлом Пирсоном в 1901 году [209] как один из способов уменьшить размерность данных, потеряв при этом наименьшее количество информации. Идея метода состоит в следующем.

Положим, что имеется матрица центрированных объясняющих переменных  $\dot{X}_{n \times m}$  с некоторой дисперсионно-ковариационной матрицей  $\Sigma_{m \times m}$ . Рассмотрим линейные комбинации имеющихся предикторов:

$$\begin{aligned} y_{1i} &= b_{11}x_{1i} + b_{12}x_{2i} + \dots + b_{1m}x_{mi} \\ y_{2i} &= b_{21}x_{1i} + b_{22}x_{2i} + \dots + b_{2m}x_{mi} \\ &\vdots \\ y_{mi} &= b_{m1}x_{1i} + b_{m2}x_{2i} + \dots + b_{mm}x_{mi} \end{aligned}$$

каждая из которых может быть интерпретирована как линейная регрессия  $y$  по  $\dot{X}$ .

Поскольку каждая величина  $y_i$  является функцией случайных величин, то она также является случайной величиной, а следовательно, имеет следующее выражение для дисперсии и ковариаций:

$$\text{var}(y_i) = b_i^T \Sigma b_i, \quad \text{cov}(y_i, y_j) = b_i^T \Sigma b_j,$$

где  $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im})^T$ .

Тогда первой главной компонентой матрицы  $X$  называется линейная комбинация  $y_1$ , которая имеет максимальную дисперсию при наличии ограничения на евклидову норму коэффициентов данной комбинации, а именно:

$$\text{var}(y_1) \rightarrow \max, \quad b_1^T b_1 = 1.$$

Второй главной компонентой является линейная комбинация  $y_2$ , которая также имеет максимальную дисперсию, но уже при наличии дополнительного ограничения на нулевую ковариацию с первой компонентой.

$$\text{var}(y_2) \rightarrow \max, \quad b_2^T b_2 = 1, \quad b_1^T \Sigma b_2 = 0.$$

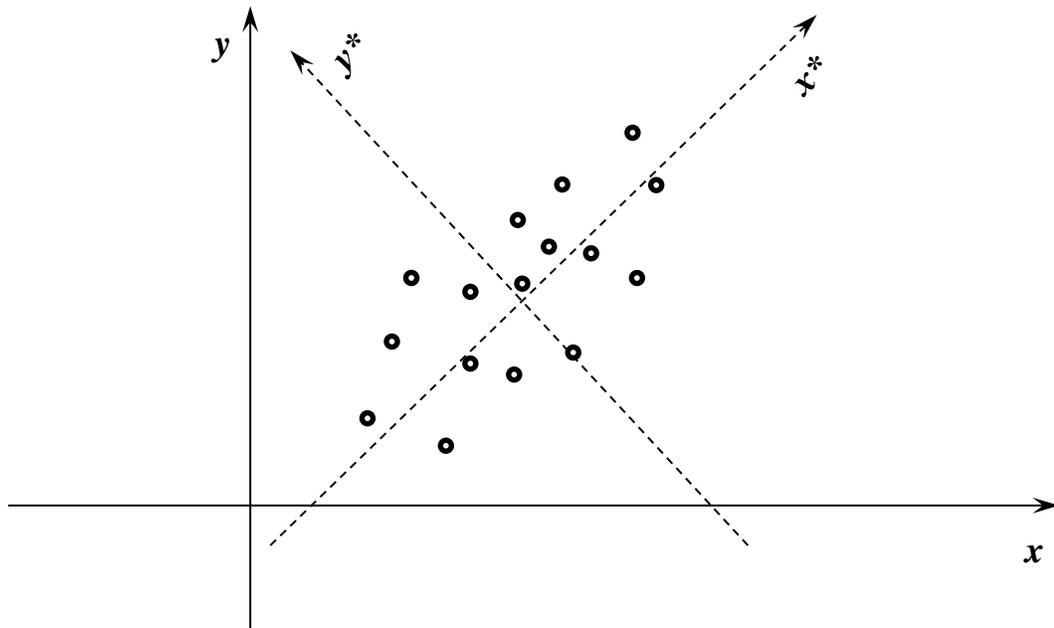
Таким образом,  $i$ -ой компонентой является такая линейная комбинация, которая обладает максимальной дисперсией при наличии ограничений на евклидову норму коэффициентов и имеет нулевые ковариации с предыдущими главными компонентами.

Для получения главных компонент вычисляются собственные значения и соответствующие им собственные вектора дисперсионно-ковариационной матрицы предикторов. Если отсортировать собственные значения по убыванию, то можно

показать, что при  $b_i^T b_i = 1$  дисперсия  $i$ -ой главной компоненты равна  $i$ -ому собственному значению, а именно

$$\text{var}(y_i) = \text{var}(b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{im}x_m) = \lambda_i.$$

Более того элементы соответствующего нормированного собственного вектора будут являться коэффициентами линейного преобразования. Проще говоря, преобразовывая исходные данные в главные компоненты, система координат как бы перемещается таким образом, что преобразованные данные становятся некоррелированными друг с другом. На рисунке 1.25 приведен схематичный пример такого преобразования в случае с двумя компонентами.



**Рисунок 1.25** – Преобразование системы координат для двух компонент

Источник: составлено автором

**Метод частных наименьших квадратов** (англ. Partial Least Squares, PLS). Данный метод был предложен шведским статистиком Германом Вольдом [255] и по

сути является модификацией метода главных компонент. Суть метода также заключается в поиске матрицы параметров для линейных преобразований матрицы исходных предикторов, в результате проведения которых получались бы ортогональные переменные. Однако существенным отличием от метода главных компонент является то, что параметры подбираются по принципу максимизации ковариации полученной линейной комбинации с зависимой переменной, а именно

$$\text{cov}(y_i, y) \rightarrow \max, \quad b_i^T b_i = 1.$$

Таким образом, метод частных наименьших квадратов стремится построить такие линейные преобразования, которые бы максимально объясняли вариацию зависимой переменной, удовлетворяли бы ограничениям на евклидову норму величин параметров и при этом были бы взаимно независимы.

Для того, чтобы понять, как работают различные методы борьбы с мультиколлинеарностью и какой эффект они дают, проведем серию имитационных экспериментов. Предположим, имеется целевая переменная  $y_t$  и набор потенциальных объясняющих переменных  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}$ . В данных экспериментах будем полагать, что объясняющие переменные подчиняются нормальному распределению с нулевой средней и единичной дисперсией, а именно  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm} \sim N[E(x_{ti}) = 0, D(x_{ti}) = 1]$ . Обозначим  $\Sigma$  как корреляционную матрицу рассматриваемых предикторов, имеющую вид:

$$\Sigma_{m \times m} = \begin{vmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

где  $\rho$  – парный коэффициент корреляции.

Определим, что целевая переменная зависит либо только от одного предиктора, либо от всех из имеющегося сгенерированного набора. Таким образом,  $y_t$  будет соответственно вычисляться как:

$$1) y_t = 2 + 0.5x_{t1} + \varepsilon_t \quad 2) y_t = 2 + \sum_{i=1}^m 0.5x_{ti} + \varepsilon_t, \quad (1.23)$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  – «белый» шум, 2 – произвольно выбранная константа модели.

В результате проведенного имитационного эксперимента были протестированы три представленных выше способа устранения мультиколлинеарности, а именно ридж-регрессия, метод главных компонент (использовались все компоненты) и метод частных наименьших квадратов (использовалась только первая компонента). Тестирование проводилось при различном числе наблюдений ( $n = 20, n = 40, n = 80$ ), различном количестве потенциальных предикторов ( $m = 2, m = 5, m = 10$ ), различной степени мультиколлинеарности ( $\rho = 0, \rho = 0.3, \rho = 0.5, \rho = 0.8, \rho = 0.99$ ). Полученные по разным методам результаты, а именно вневыборочная среднеквадратическая ошибка прогноза, сравнивались с результатами работы простого МНК. В таблице 1.2 представлены результаты проведенного эксперимента в случае, если значимым является только первый предиктор и полностью отсутствует мультиколлинеарность среди рассматриваемых объясняющих переменных.

**Таблица 1.2** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0$ , значимый только первый предиктор.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.190587	1.617969	1.190587	1.173859

Продолжение таблицы 1.2

	40	1.078508	1.2367	1.078508	1.079851
	80	1.032534	1.078918	1.032534	1.033905
	20	1.449003	1.792529	1.449003	1.26805
5	40	1.189067	1.32829	1.189067	1.158302
	80	1.078753	1.120117	1.078753	1.077712
	20	2.363852	2.130958	2.363852	1.366522
10	40	1.383703	1.458867	1.383703	1.2192
	80	1.160273	1.188571	1.160273	1.132356

Источник: составлено автором

Как видно из таблицы 1.2, в случае отсутствия мультиколлинеарности ридж-регрессия показывает более низкую эффективность, нежели простой МНК. Также сразу отметим, что метод главных компонент является полным аналогом МНК по показателю точности получаемых прогнозов при использовании всех компонент в регрессионном уравнении, что можно видеть по результатам из таблиц 1.2-1.11. Что касается МЧНК, то в случае, когда значимым является всего один предиктор, этот метод работает лучше простого МНК, выполняя своего рода процедуру спецификации регрессионного уравнения.

**Таблица 1.3** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0$ , все предикторы значимые.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
	20	1.176336	1.648365	1.176336	1.173351
2	40	1.079606	1.249898	1.079606	1.087008
	80	1.041188	1.092182	1.041188	1.045752
	20	1.455133	1.976992	1.455133	1.452421
5	40	1.179853	1.375488	1.179853	1.249625
	80	1.08086	1.140245	1.08086	1.132207
	20	2.338183	2.617537	2.338183	2.124461
10	40	1.390198	1.643335	1.390198	1.687784
	80	1.16011	1.230757	1.16011	1.370957

Источник: составлено автором

Из таблицы 1.3 можно заключить, что в случае значимости всех предикторов и отсутствия мультиколлинеарности простой МНК работает более эффективно, чем другие рассматриваемые методы. Однако, уже при небольшой мультиколлинеарности (см. таблицы 1.4-1.5) МЧНК демонстрирует более высокую эффективность в сравнении с МНК, методом главных компонент и ридж-регрессией.

**Таблица 1.4** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.3$ , значимый только первый предиктор.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.174231	1.608902	1.174231	1.154868
	40	1.083917	1.241667	1.083917	1.086946
	80	1.035842	1.081708	1.035842	1.04419
5	20	1.455612	1.768391	1.455612	1.253993
	40	1.180933	1.315414	1.180933	1.143311
	80	1.083571	1.121994	1.083571	1.093972
10	20	2.376513	2.044657	2.376513	1.318401
	40	1.389381	1.435529	1.389381	1.186497
	80	1.155126	1.174713	1.155126	1.127956

Источник: составлено автором

**Таблица 1.5** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.3$ , все предикторы значимые.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.177821	1.638778	1.177821	1.133358
	40	1.074459	1.241587	1.074459	1.058286
	80	1.042148	1.08889	1.042148	1.034198
5	20	1.447948	1.8849	1.447948	1.205139
	40	1.182291	1.338889	1.182291	1.095137
	80	1.0856	1.131159	1.0856	1.050146
10	20	2.343569	2.283455	2.343569	1.368448
	40	1.381569	1.486458	1.381569	1.149717
	80	1.160149	1.19196	1.160149	1.070294

Источник: составлено автором

Далее с ростом степени мультиколлинеарности эффективность МЧНК только возрастает, (см. таблицы 1.6-1.8), в то время как ошибки, полученные по МНК, не претерпевают особых изменений при различной степени мультиколлинеарности. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие мультиколлинеарности не снижает эффективность МНК, но повышает эффективность альтернативных методов.

**Таблица 1.6** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.5$ , значимый только первый предиктор.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.187816	1.600026	1.187816	1.161285
	40	1.084512	1.241948	1.084512	1.084883
	80	1.041225	1.086966	1.041225	1.055269
5	20	1.458153	1.74502	1.458153	1.221637
	40	1.183335	1.301531	1.183335	1.132479
	80	1.064235	1.099437	1.064235	1.075598
10	20	2.344319	1.930883	2.344319	1.256738
	40	1.388371	1.396668	1.388371	1.151466
	80	1.16761	1.173479	1.16761	1.120711

Источник: составлено автором

**Таблица 1.7** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.5$ , все предикторы значимые.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.188034	1.638406	1.188034	1.124773
	40	1.077132	1.23475	1.077132	1.054002
	80	1.040402	1.084853	1.040402	1.028857
5	20	1.444023	1.814229	1.444023	1.143548
	40	1.176564	1.310112	1.176564	1.062809
	80	1.084129	1.121244	1.084129	1.035428
10	20	2.374117	2.110736	2.374117	1.209904
	40	1.395254	1.435688	1.395254	1.094806
	80	1.157837	1.16993	1.157837	1.040594

Источник: составлено автором

При достаточно сильной мультиколлинеарности (см. таблицы 1.8-1.11) ридж-регрессия с параметром  $\lambda = 10$  также показывает более высокую эффективность, нежели простой МНК, но тем не менее уступает методу частных наименьших квадратов.

**Таблица 1.8** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.8$ , значимый только первый предиктор.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.17276	1.5729	1.17276	1.126231
	40	1.086234	1.229169	1.086234	1.078164
	80	1.03752	1.083178	1.03752	1.044674
5	20	1.446764	1.634423	1.446764	1.145528
	40	1.177707	1.260625	1.177707	1.086395
	80	1.08158	1.102734	1.08158	1.061216
10	20	2.36872	1.741778	2.36872	1.170546
	40	1.386079	1.307621	1.386079	1.088867
	80	1.163819	1.137605	1.163819	1.070386

Источник: составлено автором

Несомненно, качество ридж-регрессии напрямую зависит от выбора параметра  $\lambda$ , однако до сих пор в научной среде не существует консенсуса относительно выбора оптимального значения этого параметра. Поскольку в данном разделе диссертационной работы эффективность ридж-регрессии оценивается только при одном значении  $\lambda$ , то не представляется возможным сделать однозначный и окончательный вывод о том, что метод частных наименьших квадратов является более предпочтительным методом построения регрессионной модели в условиях сильной взаимозависимости объясняющих переменных несмотря на то, что в рамках данного исследования ридж-регрессия ни разу не показала меньшую ошибку прогноза, нежели метод частных наименьших квадратов.

**Таблица 1.9** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.8$ , все предикторы значимые.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.191949	1.621901	1.191949	1.117355
	40	1.083141	1.233586	1.083141	1.053254
	80	1.036009	1.079203	1.036009	1.02294
5	20	1.447844	1.721248	1.447844	1.114745
	40	1.181812	1.268645	1.181812	1.057601
	80	1.076499	1.098638	1.076499	1.022079
10	20	2.383575	1.829119	2.383575	1.130114
	40	1.388373	1.31698	1.388373	1.058612
	80	1.165328	1.135022	1.165328	1.027365

Источник: составлено автором

**Таблица 1.10** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.99$ , значимый только первый предиктор.

$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.186759	1.561968	1.186759	1.11416
	40	1.088689	1.22009	1.088689	1.059852
	80	1.037553	1.071924	1.037553	1.025238
5	20	1.456978	1.565853	1.456978	1.1134
	40	1.189985	1.223808	1.189985	1.062343
	80	1.08123	1.077189	1.08123	1.030597
10	20	2.372542	1.587888	2.372542	1.115827
	40	1.380219	1.213738	1.380219	1.048841
	80	1.166849	1.085896	1.166849	1.035569

Источник: составлено автором

**Таблица 1.11** – Сравнение методов устранения мультиколлинеарности,  $\rho = 0.99$ , все предикторы значимые.

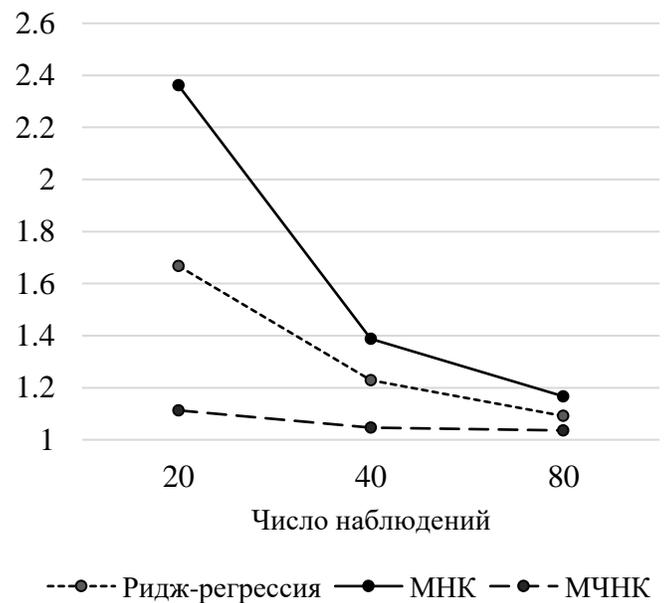
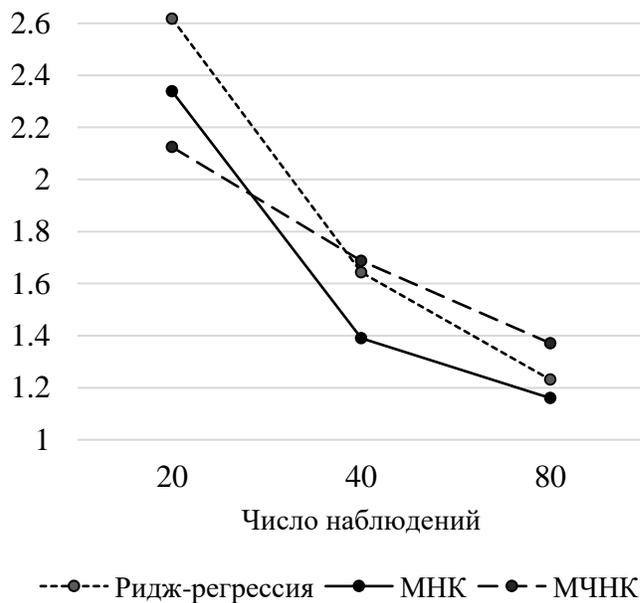
$m$	$n$	МНК	Ридж-регрессия ( $\lambda = 10$ )	Метод главных компонент	МЧНК
2	20	1.185735	1.598966	1.185735	1.115409
	40	1.084763	1.228005	1.084763	1.056891

Продолжение таблицы 1.11

	80	1.044883	1.084808	1.044883	1.03287
	20	1.452824	1.631208	1.452824	1.107386
5	40	1.174113	1.221593	1.174113	1.049556
	80	1.081465	1.080363	1.081465	1.027186
	20	2.36142	1.667659	2.36142	1.112898
10	40	1.388035	1.2294	1.388035	1.046946
	80	1.167075	1.091406	1.167075	1.035908

Источник: составлено автором

На рисунках 1.26 и 1.27 представлена динамика вневыборочной среднеквадратической ошибки, полученной по анализируемым методам, при отсутствии зависимости между предикторами и при высокой мультиколлинеарности.



**Рисунок 1.26** – Эффективность методов устранения мультиколлинеарности (все предикторы значимы,  $\rho = 0, m = 10$ )

**Рисунок 1.27** – Эффективность методов устранения мультиколлинеарности (все предикторы значимы,  $\rho = 0.99, m = 10$ )

Источник: составлено автором

Инфографика из представленных рисунков наглядно подтверждает высказанное выше утверждение о повышении эффективности способов борьбы с мультиколлинеарностью при высокой степени взаимозависимости предикторов. Основная идея ридж-регрессии, регрессии LASSO и МЧНК заключается в том, чтобы допустить некоторое смещение в оценках коэффициентов регрессии, но за это сократить дисперсию этих смещенных оценок. Как показывают эксперименты, в случае ортогональности предикторов такой обмен не является оптимальным, однако при сильной мультиколлинеарности дисперсия МНК-оценок радикально возрастает, что дает видимое преимущество смещенным оценкам, поскольку потеря в точности за счет смещения с лихвой компенсируется пониженной дисперсией параметров.

#### **1.4 Вычисление уровня значимости предикторов при проведении процедуры спецификации уравнения<sup>3</sup>**

Как было сказано в разделе 1.2, существует множество методов отбора переменных при построении множественной регрессии, начиная с традиционных подходов прямого отбора факторов и заканчивая разнообразными информационными критериями и методами взвешивания регрессионных уравнений, например [71, 62, 49, 225, 226, 227]. Применимость того или иного метода спецификации в определенных ситуациях является широко обсуждаемой темой в эконометрической литературе. Наиболее заметной общей чертой методов отбора переменных в регрессионное уравнение является попытка найти баланс между простотой модели и величиной наблюдаемых абсолютных отклонений [45, 42, 43]. Обобщая вышесказанное, можно заключить, что при отборе моделей мы накладываем определенный штраф на

---

<sup>3</sup> Раздел составлен по материалам работ автора [24, 195]

величину наблюдаемых среднеквадратических отклонений, главным образом, в зависимости от числа наблюдений и числа предикторов, включаемых в модель. Чем больше число наблюдений в сравнении с количеством включенных в модель параметров, тем меньший штраф мы накладываем на наблюдаемые среднеквадратические отклонения.

В настоящее время со стремительным развитием компьютерных технологий и систем сбора статистической информации высоким спросом пользуются системы автоматической спецификации регрессионных уравнений [63, 64]. Множество исследователей используют запрограммированные алгоритмы построения моделей в качестве инструмента “data-mining”, тестируя огромные массивы данных, содержащие фактически каждую переменную, которая имеет хотя бы призрачные шансы влиять на рассматриваемый процесс, см. например [181, 235]. Распознав возможность возникновения ошибок 1-ого рода в результате выполнения таких алгоритмов, в работе [171] было предложено делать выводы относительно включения той или иной переменной в модель исходя из общего числа рассматриваемых потенциальных объясняющих переменных, а не исходя из количества уже отобранных факторов. Согласно работе [94] такие широко используемые методы спецификации регрессионных уравнений, как прямой отбор, обратное исключение, лучшие подмножества и др. склонны к построению моделей с ложными взаимосвязями, включая в уравнение полностью случайные факторы, на самом деле не оказывающие никакого влияния на целевую переменную. Данный вывод был также подтвержден с использованием ряда имитационных экспериментов в разделе 1.2 настоящего диссертационного исследования. Таким образом, можно заключить, что обильный набор статистических данных неизбежно ведет к повышенному риску неверной спецификации модели в случае применения традиционных способов спецификации уравнения.

Как было явно показано в работах [154, 236, 206], использование методов отбора переменных ведет к получению случайного числа объясняющих переменных в конечной модели. Более того, если мы оцениваем уже заранее специфицированную модель, то мы делаем вывод, исходя из предположения, что отобранные факторы являются «сырыми» данными и изначально были заданы исследователем. В работах [186, 125] утверждается, что при таких условиях традиционные тесты могут с высокой долей вероятности давать неверный результат. В контексте пошагового отбора переменных для регрессионного уравнения в работе [94, с. 269] говорится дословно следующее: “when many tests of significance are computed in a given experiment, the probability of making at least one Type I error in the set of tests, that is, the maximum familywise Type I error rate (MFWER), is far in excess of the probability associated with any one of the tests”, что означает, что в случае проведения множественных тестов на уровень значимости, вероятность совершить хотя бы одну ошибку 1-ого рода превышает аналогичную вероятность по каждому из проводимых тестов по отдельности.

Говоря о значимости каждого конкретного предиктора в линейных регрессионных моделях, сравнительно малый объем литературы посвящен проведению корректировок  $p$ -значения в зависимости от числа и ковариационной структуры вероятных объясняющих переменных. В большинстве статистических пакетов  $p$ -значение вычисляется согласно простой процедуре с использованием  $t$ -распределения независимо от размера и характеристик заданного набора данных. Учитывая сказанное выше, такой способ определения значимости предикторов является существенным опущением значимой информации, поскольку вычисление неверного уровня значимости ведет к повышенной вероятности совершения ошибки 1-ого рода при спецификации регрессионного уравнения. Как следствие, неверно построенная модель может привести исследователя к неправильным выводам при интерпретации ее параметров и, таким образом, оказаться убыточной для

применяющих ее субъектов. Несмотря на то, что некоторые исследователи прибегают к поправкам Бонферрони или разнообразным численным методам, см. например [223], эти подходы дают смещенные корректировки, что может быть критично для построения адекватной модели. Для решения данной проблемы этот раздел диссертационной работы посвящен разработке нового численного метода для корректировки  $p$ -значения, который будет выдавать несмещенные поправки и, следовательно, поможет исследователям избежать совершения излишних ошибок 1-ого и 2-ого рода при построении регрессионной модели.

В данном разделе рассматриваются наиболее широко распространенные методы вычисления  $p$ -значения, разрабатывается авторский численный метод для вычисления истинного  $p$ -значения для каждого предиктора модели с учетом характеристик заданного набора статистических данных и проводится имитационное тестирование разработанного метода и сравнение его результатов с существующими подходами.

**Обзор методов вычисления  $p$ -значения.** Положим, что  $\{y_t, X_t: t = 1, \dots, n\}$  является рассматриваемой выборкой действительных чисел, где  $y_t$  – целевая переменная, а  $X_t = (1, x_{1t}, x_{2t}, \dots)$  – конечный вектор потенциальных объясняющих переменных. Также предположим, что можно специфицировать простую линейную регрессионную модель, выбрав подмножество объясняющих переменных  $\tilde{X}_t$  из изначально заданного набора факторов  $X_t$ :

$$Y = \tilde{X}B + e, \quad (1.24)$$

где

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_n \\ \tilde{X}_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{X}_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

и вектор параметров может быть вычислен в явном виде по аналогии с (1.3):

$$B = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T Y. \quad (1.25)$$

Здесь, естественно, будем предполагать, что выполняются предпосылки 1-5, рассмотренные детально в разделе 1.2 диссертационной работы. В случае, если указанные предпосылки МНК выполняются, то общепринятой практикой является вычисление двухсторонней значимости с использованием квантилей  $t$ -распределения применительно к отношению величины соответствующего коэффициента к его среднеквадратическому отклонению, см формулу (1.10). Напомним, что в (1.10) в качестве дисперсии коэффициента  $b_i$  используется ее несмещенная оценка, которая вычисляется по формуле (1.11).

Однако, главным вопросом в данном контексте является то, что именно олицетворяет собой  $p$ -значение.  $A$  обозначает оно то, что если данный предиктор будет непрерывно генерироваться и подставляться в регрессионную модель, то мы будем наблюдать уровень надежности 95% или выше с вероятностью 5%. Таким образом, получая значимый коэффициент, обычно утверждается, что либо случилась маловероятная ситуация, что ложный предиктор был квалифицирован как истинный, либо истинный предиктор был действительно обнаружен верно. Однако, данные умозаключения верны только тогда, когда модель не подвергалась предварительной процедуре спецификации и оценивается по «сырым» изначальным данным. В случае проведения процедуры отбора подмножества исходных данных для построения наилучшей модели необходимо корректировать  $p$ -значения коэффициентов модели исходя из числа наблюдений, числа потенциальных предикторов и их дисперсионно-ковариационной матрицы, что позволит контролировать долю ложных отклонений нулевой гипотезы.

Именно эта идея была представлена в работе [223], в которой авторами был предложен численный метод для определения значимости всего уравнения регрессии по наилучшему подмножеству исходного массива данных. Отметим, что предложенный метод может быть также применен к рассматриваемой задаче проведения корректировок  $p$ -значения. Дадим краткий обзор сути предложенной методики.

Рассмотрим набор потенциальных предикторов разрабатываемой модели  $X_t = (1, x_{1t}, x_{2t}, \dots)$  и обозначим  $p_i$  как  $p$ -значение для  $i$ -ого предиктора из отобранного подмножества объясняющих переменных  $\tilde{X}$ . Далее обозначим массив данных  $\tilde{Y}$ , который остался после проведения процедуры отбора наилучшего подмножества для модели с добавлением к нему  $i$ -ого предиктора из  $\tilde{X}$ . Таким образом,  $\tilde{Y}$  будет включать все переменные из  $X$ , которые не были включены в  $\tilde{X}$  плюс  $i$ -ый предиктор, находящийся под рассмотрением. После этого рассмотрим ситуацию, когда порядок наблюдений потенциальных независимых переменных из  $\tilde{X}$  случайным образом перемешан с фиксированием целевой переменной на своей изначальной позиции  $y_t, \tilde{x}_{1t}, \tilde{x}_{2t}, \dots \rightarrow y_t, \tilde{x}_{1k}, \tilde{x}_{2k}, \dots$ . Данное случайное преобразование наблюдений по предикторам обеспечивает точное сохранение выборочной корреляционной структуры между предикторами в перемешанном наборе данных. Также рассматриваемое преобразование обеспечивает стохастическую независимость целевой переменной  $y_t$  и перемешанного набора потенциальных независимых переменных, которые демонстрируют корреляцию только посредством случайно полученного порядка наблюдений по предикторам. Тогда процедура отбора рассматриваемого предиктора может быть осуществлена на новом перемешанном массиве данных. Обозначим  $q_i$  как  $p$ -значение  $i$ -ого предиктора из перемешанного набора данных. Если  $q_i < p_i$ , тогда решение, найденное по перемешанному набору, демонстрирует лучшую подгонку к данным, нежели изначально заданные переменные. Для любого заданного набора данных можно произвести достаточно

большое число перемешиваний из чего следует, что пропорция случаев, когда  $q_i < p_i$  оценивается путем проведения имитаций. Полученная оценка будет являться исправленным  $p$ -значением для определения статистической значимости  $i$ -ого предиктора. Для заданного набора данных увеличение числа случайных перемешиваний будет отражаться в увеличении точности оцениваемого значения.

Описанная выше процедура может быть сведена к следующему алгоритму:

1. Определить исследуемый предиктор и записать соответствующее  $p$ - значение  $p_i$ .
2. Установить счетчик COUNT = 0
3. DO n = 1 TO N
  - а). Случайным образом перемешать  $\check{x}_{1t}, \check{x}_{2t}, \dots$  независимо от  $y_t$  т.е.  $y_t, \check{x}_{1t}, \check{x}_{2t}, \dots \rightarrow y_t, \check{x}_{1k}, \check{x}_{2k}, \dots$
  - б). Для перемешанного набора данных определить значение  $K = 1$ , если существует хотя бы один предиктор, чье  $p$ -значение меньше  $p$ -значения исследуемого предиктора, а именно  $q_i < p_i$ . Иначе, определить  $K = 0$
  - в). COUNT = COUNT+K
4. ENDDO
5. Скорректированное  $p$ -значение = COUNT/N

В результате процесса перемешивания все возможные комбинации являются равновероятными. Следовательно, если исследуемый предиктор генерируется согласно системе, где он на самом деле не связан с целевой переменной, тогда наблюдаемое  $p$ -значение  $p_i$  с одинаковой долей вероятности будет таким же по величине, как и любое  $p$ -значение  $q_i$ , полученное путем случайного перемешивания.

Еще один метод, который может рассматриваться для проведения корректировок изначального  $p$ -значения называется поправкой Бонферрони, которая была названа в честь итальянского математика Карло Эмилио Бонферрони. Тестирование статистических гипотез основано на отвержении нулевой гипотезы в

случае, если вероятность получения наблюдаемых статистических данных при истинности нулевой гипотезы сравнительно мала. Однако, если проводятся множественные сравнения или тестируются множественные гипотезы, то шанс появления редкого события возрастает и поэтому вероятность неверно отвергнуть нулевую гипотезу (т.е. совершить ошибку 1-ого рода) возрастает. В основе поправки Бонферрони лежит идея того, что если исследователь тестирует  $m$  гипотез, тогда для фиксирования вероятности совершить ошибку 1-ого рода каждая отдельная гипотеза тестируется на уровне значимости  $1/m$  помноженное на требуемый совокупный уровень значимости.

Применим данную идею к корректированию  $p$ -значения. Если желаемый уровень значимости предиктора равен  $p_i$ , тогда после наложения поправки Бонферрони исследуемый предиктор будет тестироваться на уровень значимости  $p_i/m$ . Например, если имеется  $m = 10$  потенциальных кандидатов на место исследуемого предиктора и желаемый уровень значимости  $p_i = 0.05$ , тогда после проведения поправки Бонферрони необходимо тестировать потенциальные предикторы на уровень значимости  $p_i = 0.05/10 = 0.005$ .

**Метод получения несмещенных корректировок  $p$ -значения.** Для начала рассмотрим простейший случай, когда дисперсионно-ковариационная матрица  $\check{X}$  является диагональной матрицей, что подразумевает отсутствие корреляции между потенциальными предикторами. Тогда скорректированное  $p$ -значение для рассматриваемого предиктора может быть аналитически вычислено, как показано ниже:

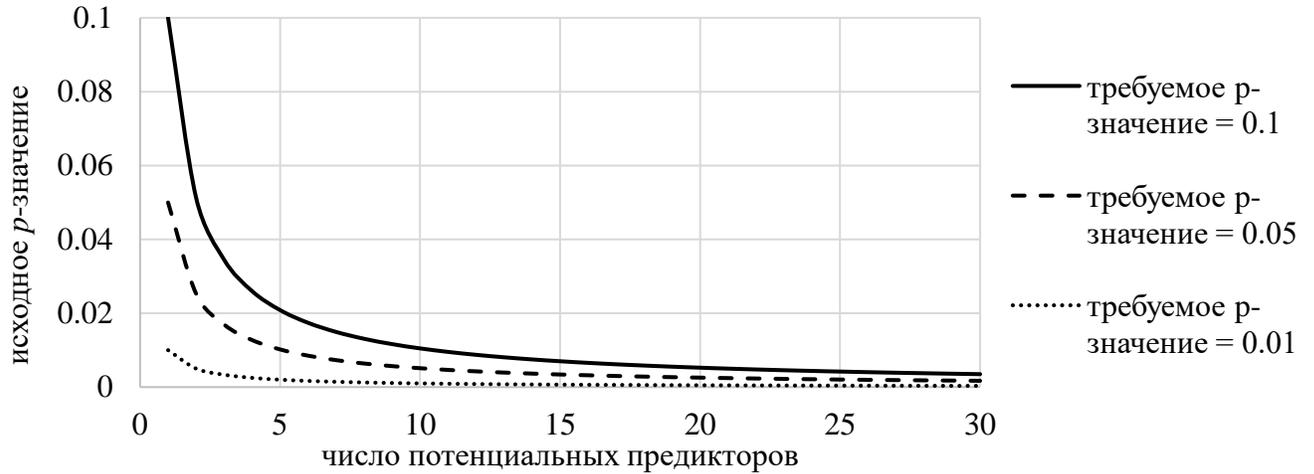
$$p_{adj} = 1 - (1 - p_i)^m, \quad (1.26)$$

где  $m$  – число предикторов в матрице  $\check{X}$ .

Формула (1.26) выводится от обратной вероятности и была предложена в работе [228]. Поскольку любой предиктор из матрицы  $\check{X}$  потенциально мог бы занять место рассматриваемого предиктора, для корректировки исходного  $p$ -значения необходимо вычислить вероятность того, что хотя бы одно исходное  $p$ -значение анализируемых предикторов попадет в рассматриваемый квантиль, так как при проведении процедуры спецификации регрессионного уравнения выбирается естественно наилучший из предикторов. Чем больше потенциальных предикторов имеется в матрице  $\check{X}$ , тем выше шанс найти среди них тот, который хорошо описывает целевую переменную, даже если все данные были случайным образом сгенерированы и не имеют никакой зависимости с выходной переменной  $y_t$ . Именно поэтому скорректированное  $p$ -значение весьма сильно отличается от исходного в случае, если число потенциальных объясняющих переменных достаточно большое. Рисунок 1.28 в явном виде иллюстрирует на каком уровне исходного  $p$ -значения необходимо тестировать рассматриваемый предиктор, чтобы получить определенную значимость при наличии заданного количества потенциальных предикторов. Требуемый уровень такого исходного  $p$ -значения вычисляется с помощью выражения  $p_i$  из (1.26).

$$p_i = 1 - \sqrt[m]{1 - p_{adj}} . \quad (1.27)$$

Из рисунка 1.28 можно видеть, к примеру, что для обеспечения истинного уровня значимости  $p_{adj} = 0.1$ , необходимо тестировать рассматриваемый предиктор на исходном уровне значимости  $p_i = 0.007$  при числе потенциальных предикторов равному пятнадцати. В случае, если  $p_{adj} = 0.05$ , то при том же количестве предикторов требуемый уровень исходного  $p$ -значения должен равняться 0.0034. Таким образом, можно заключить, что в случае не проведения корректировок, вероятность совершения ошибки 1-ого рода стремительно возрастает с ростом количества потенциальных предикторов в  $\check{X}$ .



**Рисунок 1.28** – Уровень исходного  $p$ -значения в зависимости от числа предикторов соответствующий заданной истинной значимости

Источник: составлено автором

Здесь также отметим, что в случае, если требуемый уровень значимости относительно низок ( $p_{adj} < 0.1$ ), тогда поправка Бонферрони способна с приемлемой точностью заменить простую корректировку  $p$ -значения, представленную в (1.26), поскольку из (1.27) имеем  $p_i \approx p_{adj}/m$ . Однако, в случае, если  $p_{adj} > 0.5$ , ошибка поправки Бонферрони становится значительной и должна быть учтена соответствующим образом. Помимо достаточно тривиальной поправки Бонферрони исследователи также прибегают к процедуре Хоммеля, методу Шидака-Холма [228], методу Бенджамини-Иекутиели [64] и методу Бенджамини-Хохберга [63, 112], которые хорошо себя зарекомендовали при проверке множественных гипотез.

Далее рассмотрим ситуацию, когда дисперсионно-ковариационная матрица  $\tilde{X}$  не является диагональной, т.е. данные имеют корреляционные взаимосвязи.

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \text{COV}_{12} & \cdots & \text{COV}_{1m} \\ \text{COV}_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \text{COV}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{COV}_{m1} & \text{COV}_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{vmatrix}$$

В данном случае упомянутые выше методы поправок  $p$ -значения дают смещенные результаты, см. работы [106, 97, 174, 185, 237]. Вследствие этого многие исследователи предпринимают попытки учесть взаимозависимость факторов, потенциально влияющих на результирующую переменную. Однако упомянутые поправки в основном разрабатывались для возможности контроля доли ложных отклонений гипотез (англ. False Discovery Rate, FDR) при одновременном тестировании множества гипотез, в то время как разрабатываемый в данном разделе метод направлен на поправку  $p$ -значения для одной гипотезы: значимость определенного предиктора в уравнении при предварительном проведении процедуры спецификации регрессионного уравнения. Таким образом, большинство существующих методов поправок  $p$ -значения не могут быть напрямую сравнимы с предлагаемым в данном разделе. Для разработки численного метода исправленных  $p$ -значений предлагается прибегнуть к численной процедуре, которая базируется на машинной генерации матрицы  $\check{X}$  согласно выборочной дисперсионно-ковариационной матрицы. Здесь, дополнительно к предпосылкам 1-5, детально рассмотренным в разделе 1.2, будем полагать следующее:

**Предпосылка 6.** Нормальность потенциальных предикторов, т.е.  $x_{it} \sim N(m_i, \sigma_i)$ .

Ключевым упущением методов, предложенных в работах [223, 106, 61, 98], является тот факт, что данные методы не учитывают неопределенность, связанную с получением всего лишь несмещенной оценки истинной дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Sigma$  по анализируемой выборке, что ведет к смещенности скорректированных  $p$ -значений. Поскольку мы имеем возможность рассчитать только выборочную дисперсионно-ковариационную матрицу, надежность предлагаемого метода зависит от пропорции числа наблюдений и числа потенциальных объясняющих переменных в матрице  $\check{X}$ . Поэтому в данном диссертационном исследовании предлагается численный метод, дающий несмещенные  $p$ -значения

путем случайной генерации не только набора данных матрицы  $\check{X}$ , но также его дисперсионно-ковариационной матрицы. Для этого, при условии выполнения предпосылки 6 можно использовать обратное распределение Уишарта в качестве априорного, см. [254].

$$\Sigma = W_m^{-1}(n - 1, \check{\Sigma}^{-1}) \cdot (n - 1), \quad (1.28)$$

где  $n$  – число наблюдений,  $m \leq n$  – число потенциальных объясняющих переменных в  $\check{X}$ ,  $\check{\Sigma}$  – выборочная дисперсионно-ковариационная матрица для набора данных  $\check{X}$ .

Таким образом, имеется возможность случайным образом сгенерировать некоторую реализацию истинной дисперсионно-ковариационной матрицы для рассматриваемого набора статистических данных при условии наличия выборочной. После проведения данной процедуры также можно сгенерировать набор потенциальных объясняющих переменных  $\check{X}$  согласно некоторой полученной реализации дисперсионно-ковариационной матрицы. Для этого прибегнем к следующей процедуре. Во-первых, определим вектор-столбец независимых, идентично распределенных случайных величин  $Z$ , которые подчиняются нормальному закону распределения с нулевой средней и единичной дисперсией, что подразумевает, что

$$E(ZZ^T) = I_m.$$

После чего случайная реализация набора данных  $\check{X}_t$  может быть осуществлена с помощью разложения Холецкого сгенерированной дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Sigma$  как показано ниже:

$$\tilde{X}_t^T = SZ + \mu, \quad (1.29)$$

где  $\Sigma = SS^T$  и  $\mu$  – вектор-столбец математических ожиданий соответствующих потенциальных предикторов.

Ниже приведем доказательство для формулы (1.29):

$$E\left\{\left(\tilde{X}_t^T - \mu\right)\left(\tilde{X}_t^T - \mu\right)^T\right\} = E\left(SZZ^T S^T\right) = SE\left(ZZ^T\right)S^T = SS^T = \Sigma.$$

На самом деле, для проведения имитаций не обязательно знать истинные математические ожидания  $\mu$ , поскольку для расчета вектора параметров (за исключением константы модели) используются центрированные данные. Так как выборочная средняя содержит смещение и истинную среднюю, представляется рациональным генерировать  $\tilde{X}$ , предполагая  $\mu = 0$  без потери точности последующих вычислений, поскольку математические ожидания влияют только на константу модели.

$$\tilde{X}_t^T = SZ. \quad (1.30)$$

Сгенерировав новый набор случайных данных  $\tilde{X}$ , подставим потенциальные предикторы один за другим на место рассматриваемой независимой переменной и присвоим единицу данному опыту в случае, если хотя бы один предиктор показал  $p$ -значение, меньшее, чем изначально полученное. По окончании одного опыта происходит повторная генерация дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Sigma$  и последовательно нового набора данных  $\tilde{X}$ . После чего повторяется процедура введения предикторов в уравнение и опыту присваивается значение либо ноль, либо единица. Исправленное  $p$ -значение представляет собой отношение

просуммированных присвоенных значений к общему числу проведенных имитаций. Таким образом, предлагаемая процедура при условии выполнения предпосылок 1-6 дает несмещенные исправленные  $p$ -значения.

Описанная выше процедура может быть алгоритмизирована следующим образом:

1. Определить исследуемый предиктор и записать соответствующее  $p$ - значение  $p_i$ .
2. Установить счетчик  $COUNT = 0$
3. DO  $n = 1$  TO  $N$ 
  - а). Сгенерировать  $\Sigma$  для  $\check{X}$  согласно формуле (1.28)
  - б). Применяя формулу (1.30) генерируем  $\check{X}$  согласно вновь полученной дисперсионно-ковариационной матрице  $\Sigma$
  - в). Для созданных фиктивных данных определим значение  $K = 1$ , если существует хотя бы один предиктор, чье  $p$ -значение меньше  $p$ -значения исследуемого предиктора, а именно  $q_i < p_i$ . Иначе, определить  $K = 0$
  - г).  $COUNT = COUNT + K$
4. ENDDO
5. Скорректированное  $p$ -значение =  $COUNT / N$

Таким образом, получается, что предлагаемый метод корректировок  $p$ - значения показывает FDR для верной нулевой гипотезы при проведении такой процедуры спецификации регрессионного уравнения, при которой на определенное место в модели выбирается наилучший из множества потенциальных предикторов.

**Доказательство истинности получаемых корректировок  $p$ - значения.** Поскольку  $p$ - значение показывает долю ложных отклонений нулевой гипотезы, оно может быть рассчитано как

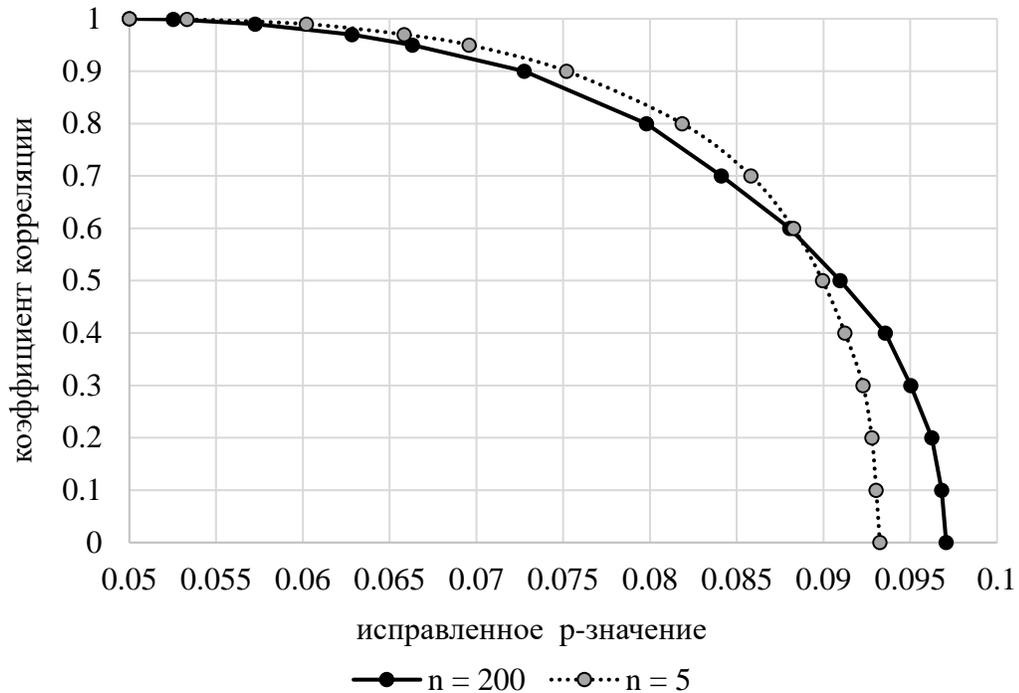
$$p = \frac{FP}{TN + FP}, \quad (1.31)$$

где  $FP$  – количество раз, когда неверно принималась альтернативная гипотеза,  $TN$  – количество раз, когда верно принималась нулевая гипотеза. При выполнении предпосылки 6 выборочная дисперсионно-ковариационная матрица потенциальных предикторов  $\check{\Sigma}$  подчиняется распределению Уишарта с  $n - 1$  степенями свободы и набором параметров  $\Sigma$ , см. [254]. Поскольку истинная дисперсионно-ковариационная матрица нам неизвестна при работе с реальными статистическими данными, необходимо использовать условное вероятностное распределение  $P(\Sigma|\check{\Sigma})$  которое представляется в виде обратного распределения Уишарта  $W_m^{-1}(n - 1, \check{\Sigma}^{-1})$ . Таким образом, получаем, что при заданной выборочной дисперсионно-ковариационной матрице  $\check{\Sigma}$  исправленное  $p$ - значение определяет пропорцию случаев, когда «наилучший» предиктор имел бы  $t_{\text{набл}}$ , превосходящее  $t_{\text{кр}}$ , которое определяется исходя из  $p$ - значения тестируемого предиктора, полученного традиционным способом. Предложенный в данном разделе численный метод как раз и находит данную пропорцию при выполнении предпосылки 6 и заданном значении  $\check{\Sigma}$ .

**Имитационный эксперимент.** Проведем анализ поведения  $p$ -значений предикторов при различных формах дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Sigma$ , разном числе наблюдений и числе потенциальных предикторов.

Для начала исследуем случай, когда  $\check{X}$  включает в себя всего лишь две потенциальных объясняющих переменных ( $m = 2$ ), которые имеют определенный выборочный коэффициент корреляции. На рисунке 1.29 представлено сравнение двух кривых исправленных  $p$ -значений, рассчитанных по наборам данных разной длины ( $n = 200, n = 5$ ). В обоих случаях была произведена корректировка исходного  $p$ - значения, равного 0.05. Для получения каждой точки графика было проведено по 10 000 000 имитаций согласно предложенному алгоритму. В случае выполнения предпосылок 1-6, чем больше наблюдений имеется в рассматриваемом окне, тем более точно будет оценена истинная дисперсионно-ковариационная матрица  $\Sigma$ , что

означает, что когда  $n = 200$ , мы получаем достаточно точную оценку  $\Sigma$  и наоборот, имеем высокий уровень неопределенности относительно  $\Sigma$  когда  $n = 5$ .



**Рисунок 1.29** – Корректировка  $p$ -значения, равного 0.05, в случае двух потенциальных предикторов

Источник: составлено автором

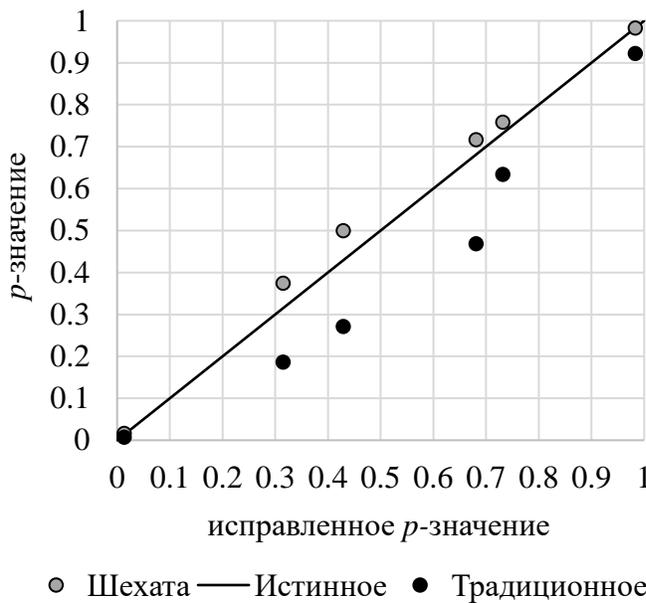
Поэтому можно видеть из представленного графика, что вторая кривая показывает более низкое исправленное  $p$ -значение, чем первая, когда коэффициент корреляции невысок и наоборот, когда присутствует значительная степень корреляции между этими двумя потенциальными предикторами. Это происходит вследствие того, что ситуация, когда при  $n = 5$  выборочный коэффициент корреляции равен нулю, отнюдь не означает, что истинный коэффициент корреляции равен нулю. Имеется высокая вероятность того, что корреляция на самом деле окажется равной 0.1, 0.2 или даже 0.4 в абсолютном выражении. С другой стороны, когда  $n = 200$  выборочный коэффициент корреляции является намного более точной

оценкой истинного. Те же самые рассуждения можно применить к области графика, где выборочный коэффициент корреляции близок к единице. При наличии короткого окна данных не представляется возможным вычислить истинный коэффициент корреляции с достаточной точностью, и его функция плотности вероятности получается асимметричной. Поэтому в этой области графика вторая кривая демонстрирует более высокие исправленные  $p$ -значения, чем первая.

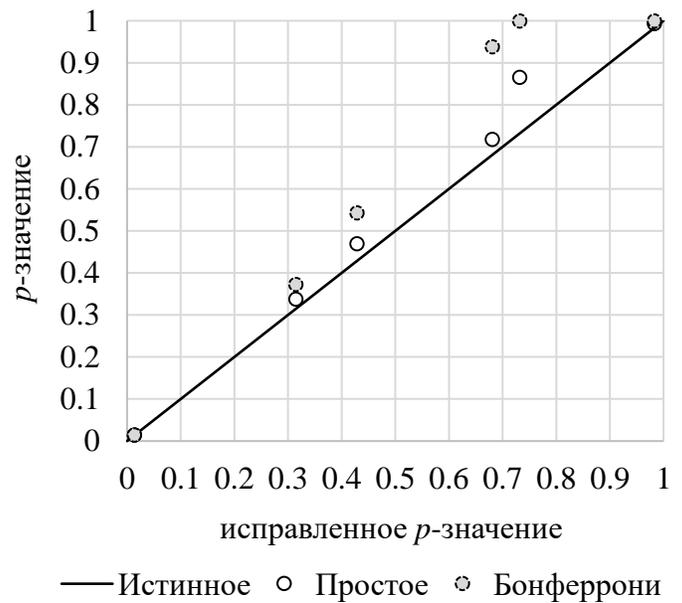
Подводя итоги сказанного выше, можем заключить следующее. Первая кривая стремится к значению 0.0975 с приближением выборочного коэффициента корреляции к нулю, что является простой поправкой, представленной в формуле (1.26). Когда коэффициент корреляции стремится к единице, исправленные  $p$ -значения в обоих случаях стремятся к исходному, равному 0.05. Эти кривые пересекаются в точке, где выборочный коэффициент корреляции приблизительно равен 0.6, а его функция плотности вероятности в случае  $n = 5$  меняет асимметрию с положительной на отрицательную.

Для проведения сравнительного анализа различных подходов к вычислению исправленного  $p$ -значения изобразим несмещенные  $p$ -значения, вычисленные согласно предложенному методу (ось абсцисс) против исправленных  $p$ -значений, вычисленных согласно другим существующим методикам (ось ординат). В частности будем сравнивать традиционный расчет  $p$ -значения, поправку Бонферрони, поправку Шехата и Уайта, простую корректировку Шидака и предложенную численную поправку  $p$ -значения. Например, на рисунках 1.30 и 1.31 представлено сравнение рассматриваемых поправок в случае, когда  $n = 5$ ,  $m = 2$  и выборочный коэффициент корреляции принимает значения, сконцентрированные вокруг нуля. Главным выводом, который можно сделать, анализируя вышеупомянутые графики, является тот факт, что традиционный расчет  $p$ -значения недооценивает истинный его уровень, что выражается в повышенном риске совершения ошибки 1-ого рода, тогда как простая поправка, поправка Шехата и Уайта и поправка Бонферрони в среднем

переоценивают истинные  $p$ -значения и, таким образом, вносят вклад в повышение риска возникновения ошибок 2-ого рода, т.е. исключения значимого предиктора из уравнения. Сравнивая поправку Шехата и Уайта с предложенным методом, можно заключить, что их оценки достаточно близки при  $n \gg t$ , однако, если данное требование не выполнено – поправка Шехата и Уайта дает значительно смещенные оценки  $p$ -значения, см. рисунки 1.30, 1.31 и 1.32, 1.33.



**Рисунок 1.30** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения ( $n = 5, t = 2$ ).

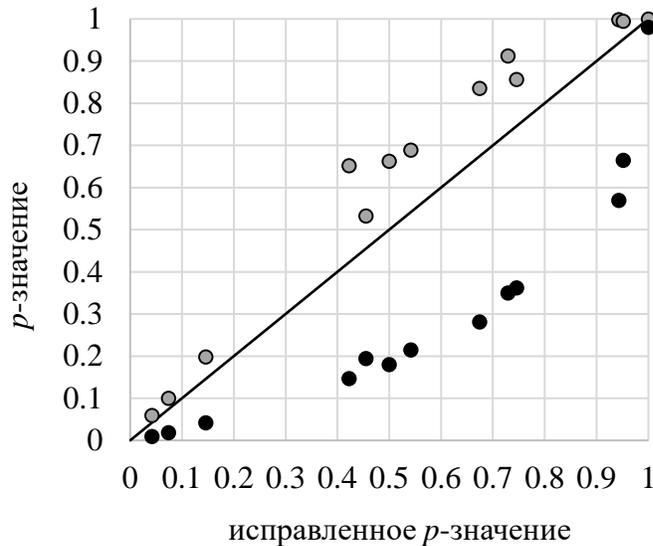


**Рисунок 1.31** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения ( $n = 5, t = 2$ ).

Источник: составлено автором

На рисунках 1.32 и 1.33 наглядно демонстрируется тот факт, что в случае, если количество наблюдений  $n$  достаточно мало и число потенциальных объясняющих переменных  $t$  примерно равно  $n$ , тогда существующие методы возвращают более смещенные оценки истинного  $p$ -значения, чем в первом рассмотренном примере. Следует отметить, что оценки  $p$ -значений, полученные по методу Шехата и Уайта, дают смещение вверх при относительно слабой выборочной корреляции и смещение

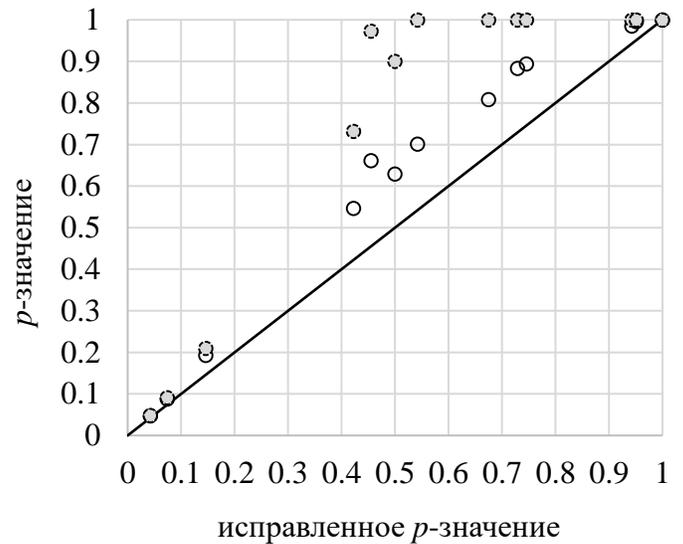
вниз при сильной. Такой эффект проявляется вследствие того, что метод, разработанный Шехата и Уайтом не учитывает вариативность истинного коэффициента корреляции относительно выборочного при заданном числе наблюдений, а полагает, что выборочный коэффициент корреляции, полученный по набору имеющихся данных, равняется истинному.



○ Шехата — Истинное ● Традиционное

**Рисунок 1.32** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения

$(n = 6, m = 5)$ .



— Истинное ○ Простое ⊙ Бонферрони

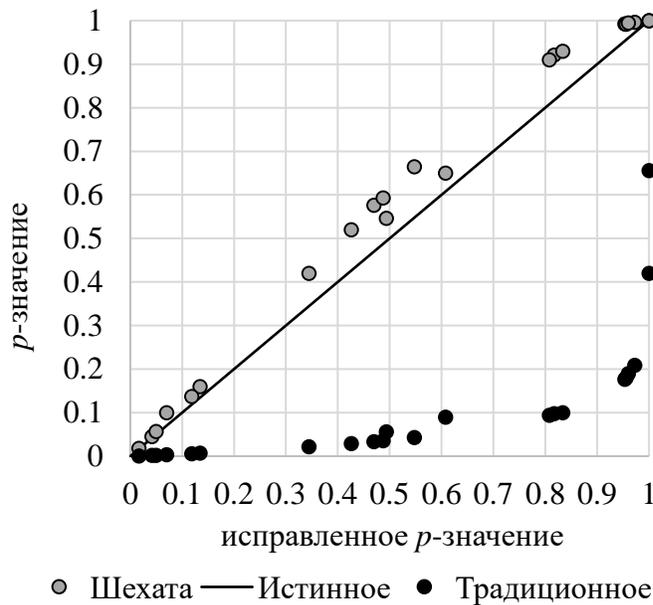
**Рисунок 1.33** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения

$(n = 6, m = 5)$ .

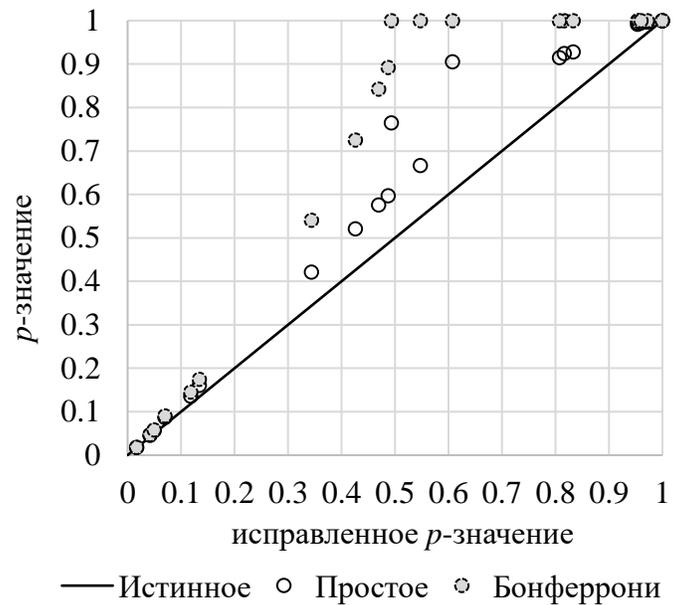
Источник: составлено автором

Однако, ситуация, представленная на рисунках 1.32 и 1.33, не является типичной для проводимых в экономике исследований. Поэтому рассмотрим более правдоподобный пример, когда в распоряжении исследователя имеются данные по  $m = 25$  потенциальных предикторов, имеющих по  $n = 30$  наблюдений. Результаты полученных расчетов по рассматриваемым методам корректировки  $p$ -значений в данном случае представлены на рисунках 1.34 и 1.35.

Как можно видеть, традиционный расчет  $p$ -значения показывает наихудшую точность, что не удивительно, поскольку число потенциальных предикторов достаточно высоко. Однако, альтернативные методы также демонстрируют существенное смещение, что увеличивает вероятность совершения ошибок 2-ого рода в процессе спецификации регрессионного уравнения.



**Рисунок 1.34** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения ( $n = 30, m = 25$ ).



**Рисунок 1.35** – Сравнение методов корректировок  $p$ -значения ( $n = 30, m = 25$ ).

Источник: составлено автором

Здесь стоит особо отметить случай, когда  $m > n$ . В данной ситуации, если попытаться сгенерировать всю матрицу  $\tilde{X}$  согласно предложенному методу, то дисперсионно-ковариационная матрица  $\Sigma$  будет необратима поскольку предикторы с индексами выше  $m$ -ого будут линейно выражаться через оставшиеся объясняющие переменные, что не является истиной для реальных экономических данных. Теоретически есть возможность сгенерировать матрицу  $\tilde{X}$ , но при этом полученные

поправки не будут отражать адекватные зависимости между рассматриваемыми переменными и, таким образом, не могут считаться надежными. Простая корректировка тем не менее может применяться в случае, если есть веские основания считать, что  $\Sigma$  является диагональной матрицей, что практически недостижимо для экономических данных. Поправка Бонферрони и корректировка Шехата и Уайта также теоретически могут применяться, но будут возвращать поправки не лучше, чем предлагаемый метод. Исходя из вышесказанного, крайне рекомендуется рассматривать набор объясняющих переменных  $X$  где  $n \geq t$  для построения регрессионной модели, поскольку только выполнение данного условия обеспечивает получение несмещенных корректировок исходных  $p$ -значений.

Таким образом, представленный в данном разделе численный метод возвращает несмещенные поправки исходных  $p$ -значений для объясняющих переменных, который напрямую относится к выводам относительно степени влияния этих переменных на целевую. Проведя сравнительный анализ предложенного метода и уже существующих, таких как традиционный расчет  $p$ -значения, поправка Бонферрони и поправка Шехата и Уайта, можно сделать следующие основные выводы.

1. В случае, когда дисперсионно-ковариационная матрица набора потенциальных предикторов является диагональной, т.е. данные независимы, простая поправка Шидака является лучшим и самым легким в реализации методом для получения несмещенных корректировок традиционных  $p$ -значений. Однако, в случае присутствия сильно коррелированных данных простая поправка переоценивает истинные  $p$ -значения, что может приводить к ошибкам 2-ого рода.

2. Исправленные  $p$ -значения зависят от числа наблюдений, числа потенциальных объясняющих переменных и выборочной дисперсионно-ковариационной матрицы. Например, если имеется только две потенциальных объясняющих переменных, конкурирующие за одну позицию в регрессионной модели, тогда, если они слабо коррелированы, исправленное  $p$ -значение будет ниже,

чем в случае, когда число наблюдений меньше и наоборот; если данные сильно коррелированы, случай с большим числом наблюдений будет показывать более низкое исправленное  $p$ -значение. С увеличением корреляции все поправки независимо от числа наблюдений стремятся к исходному  $p$ -значению. Данный феномен легко объяснить: с приближением коэффициента корреляции к единице две переменных практически линейно зависят друг от друга и в случае, если одна из них является значимой, то и другая почти наверняка будет демонстрировать такую же значимость. С другой стороны, если выборочная дисперсионно-ковариационная матрица стремится к диагональной и число наблюдений стремится к бесконечности, то предложенный численный метод будет возвращать поправки, близкие к простой поправке.

3. В случае, когда число наблюдений много больше числа потенциальных предикторов, тогда поправка Шехата и Уайта дают примерно одинаковые поправки с предложенным численным методом. Однако, в намного более распространенных случаях, когда число наблюдений сравнимо с числом потенциальных предикторов, существующие методы демонстрируют достаточно значительные неточности.

4. Когда число потенциальных предикторов больше доступного числа наблюдений, представляется невозможным рассчитать истинные  $p$ -значения. Вследствие этого рекомендуется не рассматривать такие наборы данных при построении регрессионных моделей, поскольку только выполнение вышеупомянутого условия обеспечивает расчет несмещенных корректировок  $p$ -значения.

Расчет истинных  $p$ -значений может оказать помощь в ограничении числа ошибок 1-ого рода в научных исследованиях, значительно снижая количество публикаций, декларирующих ложные зависимости в качестве истинных. Предложенный метод легко алгоритмируется и может быть интегрирован в абсолютное большинство существующих статистических пакетов.

## ГЛАВА 2 ВЗВЕШИВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЕ ДИСПЕРСИЮ ОЖИДАЕМОЙ ОШИБКИ ПРОГНОЗА<sup>4</sup>

### 2.1 Основные сведения о взвешивании регрессионных моделей и анализ существующих подходов

Комбинирование прогнозов, полученных по нескольким регрессионным моделям, не является новаторской идеей в эконометрике. Пионерской в этой области можно считать работу [62] и дальнейшее развитие высказанных идей в работе [132]. С тех пор синергетический эффект взвешивания в плане сокращения ошибки прогноза был подтвержден значительным числом эконометристов, и эффективность данного подхода не вызывает сомнений, см. например [133, 87, 148, 239, 233]. Однако, несмотря на это, научное сообщество до сих пор не пришло к консенсусу относительно способа вычисления оптимального вектора весовых коэффициентов, применяемых к рассматриваемому набору прогнозов. Анализируя существующую отечественную и зарубежную литературу, можно сказать, что исследователи выделяют три основных метода расчета весовых коэффициентов: простая средняя, байесовское взвешивание (англ. Bayesian model averaging, BMA) и взвешивание по критерию Маллоуса (англ. Mallows model averaging, MMA). Данная глава диссертационной работы посвящена разработке нового метода оптимизации весовых коэффициентов, применимого как для вложенных, так и для невложенных линейных моделей, оцениваемых с помощью МНК. Предлагаемый метод основан на вычислении таких весовых коэффициентов, которые минимизируют несмещенную оценку ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза (англ. mean-squared

---

<sup>4</sup> Глава составлена по материалам работ автора [25, 26, 27, 28, 30, 51, 194, 285]

forecast error, MSFE) комбинированной модели. Таким образом, можно ожидать, что разрабатываемый метод в результате его применения будет способствовать получению точечных прогнозов со сравнительно низкой ожидаемой ошибкой. Поскольку также не существует консенсуса относительно получения интервального прогноза по комбинированной модели, в данном разделе будет предложено состоятельное решение этой проблемы.

Как уже было упомянуто выше, тремя наиболее распространенными методами комбинирования прогнозов являются простая средняя, байесовское взвешивание и взвешивание по критерию Маллоуса, см. [180, 245, 273]. Все они зарекомендовали себя как эффективные в применении к реальным и модельным данным, однако ни один из них не может считаться полностью удовлетворительным. Например, при использовании данных методов нет возможности получить несмещенную оценку среднеквадратической ошибки прогноза MSFE, таким образом, в процессе прогнозирования у исследователя отсутствуют более менее надежные доверительные интервалы для прогнозируемых значений, что может быть критичным для многих практических нужд. Несмотря на то, что как показано в [144], веса, рассчитанные согласно методу ММА асимптотически оптимальны, данный метод был разработан только для вложенных моделей, что значительно сокращает сферу его применения. Простая средняя рассматриваемого набора прогнозов работает хорошо только в случае тщательного предварительного отбора моделей. В случае, когда очень плохая модель включается в набор взвешиваемых, простая средняя не сможет этого учесть. Поэтому при простом взвешивании оптимальным является выбор подмоделей, достаточно близких по своим характеристикам, что накладывает существенные ограничения на процесс отбора подмоделей. В противном случае простое взвешивание не может рассматриваться в качестве полноценного метода.

Байесовский информационный критерий был предложен в работе [222] в качестве метода отбора моделей. Впоследствии значительное количество работ было

посвящено его применению в эконометрике, см. например [211, 151, 69, 111, 122, 221]. Идея использовать байесовский информационный критерий для взвешивания моделей была впервые высказана в работе [187], и с тех пор его эффективность была в явном виде продемонстрирована в [232, 233, 234, 257]. Тем не менее слабым местом ВМА является факт использования априорного распределения, что вносит в процесс расчета прогноза арбитрарность, которая заключается в выборе функциональной формы этого распределения. Более того ВМА был разработан исходя из предпосылок, что в рассматриваемом наборе моделей существует только одна истинная и целью взвешивания является поиск этой самой модели. Но, что если в рассматриваемом наборе нет истинной модели и она является более сложной, нежели любая из имеющихся? Тогда было бы резонно полагать, что, взвешивая по набору моделей, мы ищем некоторую аппроксимацию истинной. Корректной целью в данном случае будет получение минимальной среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза, подстраивая весовые коэффициенты, что осуществлено в предлагаемом методе.

Взвешивание по критерию Маллоуса также использует схожий подход. Единственным отличием является то, что в случае ММА минимизируется обобщенный критерий Маллоуса, который представляет собой внутривыборочную среднеквадратическую ошибку прогноза с наложенным штрафом. Информационный критерий Маллоуса был впервые представлен в работе [182] и походит на информационные критерии Акаике и Байеса, см. работы [50, 226], чья асимптотическая оптимальность была исследована в работах [225, 226, 227, 172, 159, 155, 156, 157, 158]. Использование экспоненциального информационного критерия Акаике для расчета вектора весовых коэффициентов было разработано в работе [49] и далее развито в [71]. Помимо экспоненциального информационного критерия Акаике также широко применяется экспоненциальный байесовский информационный критерий, вычисления согласно которому эквивалентны байесовскому взвешиванию с неинформативным априорным распределением. ММА был глубоко исследован в

работах [143, 144, 145, 146], где авторы представили убедительные эмпирические доказательства его эффективности в сравнении с альтернативными методами взвешивания регрессионных уравнений. Особо следует отметить, что в данных работах авторы подчеркивали потребность в разработке метода, имеющего возможность оперировать с невложенными моделями, что и было сделано в данном диссертационном исследовании.

**Основные принципы взвешивания набора регрессионных моделей.** Пусть  $\{y_t, X_t: t = 1, \dots, n\}$  является рассматриваемым набором действительных данных, где  $y_t$  – целевая переменная, а  $X_t = (1, x_{1t}, x_{2t}, \dots)$  – конечный набор потенциальных объясняющих переменных. Также предположим, что имеется возможность рассчитать  $M$  регрессионных моделей, где  $i$ -ая модель включает в себя  $k_i$  параметров и может быть представлена следующим образом:

$$y_t = X_{it} B_i + e_{it} \quad \text{или} \quad (2.1)$$

$$\hat{y}_{it} = X_{it} B_i, \quad (2.2)$$

где  $X_{it}$  обозначает отобранные объясняющие переменные для  $i$ -ой модели,  $e_{it}$  – наблюдаемая ошибка модели за период  $t$ ,  $B_i$  – вектор-столбец параметров модели, который рассчитывается по аналогии с формулой (1.3):

$$B_i = (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T Y, \quad (2.3)$$

где

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{in} \\ X_{i(n-1)} \\ \vdots \\ X_{i1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Каждая модель имеет некоторую ненаблюдаемую истинную ошибку  $\varepsilon_{it}$ , обладающую следующими свойствами:

$$E(\varepsilon_{it} | X_{it}) = 0, \quad (2.4)$$

$$E(\varepsilon_{it}^2 | X_{it}) = \sigma^2(i). \quad (2.5)$$

Целью взвешивания набора таких моделей является построение комбинированного уравнения, рассчитываемого согласно взвешенной средней как показано ниже:

$$\bar{y}_t = \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i. \quad (2.6)$$

Причем легко показать, что из формулы (2.6) следует точно такая же зависимость ошибок комбинированной модели от ошибок по каждой из входящих в нее подмоделей.

$$y_t = \bar{y}_t + \bar{e}_t \Rightarrow y_t = \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i + \bar{e}_t \Rightarrow \bar{e}_t = y_t - \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i = \sum_{i=1}^M (y_t - \hat{y}_{it}) w_i = \sum_{i=1}^M e_{it} w_i.$$

Здесь стоит отметить, что если выполняются предпосылки (2.4) и (2.5), то справедливо следующее:

$$E(\bar{e}_t | X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{lt}, w_1, w_2, \dots, w_l) = 0, \quad (2.7)$$

$$E\left(\bar{\varepsilon}_t^2 \mid X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{lt}\right) = \bar{\sigma}^2, \quad (2.8)$$

где  $w_i$  является элементом вектора весовых коэффициентов, элементы которого неотрицательны и в сумме дают единицу:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M w_i = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Для того чтобы дать некоторое интуитивное понимание причины возникновения синергетического эффекта от взвешивания моделей, дадим математическое обоснование повышенной точности комбинированной модели по сравнению с любым отдельно взятым входящим в нее уравнением. Предположим, имеется  $M$  подмоделей, причем истинные ошибки каждой из них  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$  имеют одинаковую дисперсию и являются независимыми по отношению друг к другу. Поскольку все дисперсии ошибок равны, будет резонно выбрать равные веса для создания комбинированной модели, т.е.  $w_i = 1/M$ . Тогда дисперсия комбинированной модели будет в  $M$  раз меньше, чем дисперсия каждой модели в отдельности.

$$\bar{\sigma}^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon_i}{M}\right) = \frac{1}{M^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_i\right) = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(\varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{M}. \quad (2.10)$$

Таким образом, имеем, что если  $M \rightarrow \infty$ , тогда  $\bar{\sigma}^2 \rightarrow 0$ . Как явно продемонстрировано в (2.10) было бы крайне желательно выбирать модели с независимыми остатками. Еще более благоприятным случаем являлась бы ситуация, если бы у взвешиваемых моделей были отрицательно коррелированные остатки, так

как это еще больше увеличило точность прогнозов по комбинированной модели. Однако, к сожалению, при анализе реальных экономических данных ситуация с отрицательно коррелированными остатками и даже хотя бы независимыми является фантастической, см. [274, 82, 83]. Обычно парный коэффициент корреляции остатков по рассматриваемым моделям при практическом применении варьируется от 0.4 до 0.99. Разумеется, при почти линейной взаимозависимости остатков говорить о синергетическом эффекте комбинированной модели не имеет смысла, что можно наглядно показать на примере с двумя моделями у которых ошибки равны:

$$\bar{\sigma}^2 = \text{Var}\left(\varepsilon_1 \frac{1}{2} + \varepsilon_2 \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + 2\frac{1}{4}r\sigma^2 = \sigma^2.$$

Однако комбинирование моделей с умеренно высокой степенью взаимозависимостей остатков (0.7-0.8) может дать значительные улучшения в точности получаемых прогнозов.

**Обзор существующих методов взвешивания набора моделей.** Рассмотрим наиболее широко распространенные методы оптимизации весовых коэффициентов при комбинировании набора регрессионных моделей. Классический подход был предложен в работе [62] и рассчитывает веса обратно пропорционально оцененной среднеквадратической ошибке прогноза (MSFE):

$$w_i = \frac{\tilde{\sigma}^2(i)^{-1}}{\sum_{j=1}^l \tilde{\sigma}^2(j)^{-1}}. \quad (2.11)$$

При этом оцененный показатель MSFE предлагается вычислять рекурсивно. Для этого заданное количество раз реализуется следующий цикл: изначальная

выборка уменьшается на одно наблюдение, по усеченной выборке рассчитывается модель, а затем и вневыборочный прогноз, после чего он сравнивается с истинным значением целевой переменной, и процедура повторяется заново. Математически данный цикл можно записать как показано ниже:

$$\tilde{e}_t = y_t - \bar{\hat{y}}_t = y_t - \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i = y_t - \sum_{i=1}^M X_{it} \widehat{B}_{i(t-1)} w_i,$$

где вектор-столбец параметров модели рассчитывается следующим образом:

$$\widehat{B}_{i(t-1)} = \left( \widehat{X}_{i(t-1)}^T \widehat{X}_{i(t-1)} \right)^{-1} \widehat{X}_{i(t-1)}^T \widehat{Y}_{(t-1)},$$

где

$$\widehat{X}_{i(t-1)} = \begin{pmatrix} X_{i(t-1)} \\ X_{i(t-2)} \\ \vdots \\ X_{i1} \end{pmatrix}, \quad \widehat{Y}_{(t-1)} = \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда рекурсивная оценка MSFE вычисляется как:

$$\tilde{\sigma}^2(i) = \frac{\sum_{t=n-P}^n \tilde{e}_t^2}{P+1},$$

для некоторого натурального числа  $P$ , такого что значения  $\tilde{e}_{n-P}^2(i)$  должным образом определены.

Данный метод может рассматриваться в качестве своего рода модификации метода предиктивных наименьших квадратов, как описано в работе [214], который

просто осуществляет выбор модели, основываясь на наименьшей дисперсии ошибок получаемых прогнозов  $\tilde{\sigma}^2(i)$ .

Еще одним решением проблемы оптимизации вектора весовых коэффициентов при взвешивании подмоделей, которое также основано на рекурсивной оценке MSFE, было предложено в работе [132]. В данном случае веса рассчитываются путем минимизации суммы квадратов реализованных ошибок комбинированного прогноза, а именно

$$Q(w) = \sum_{t=n-P}^n \left( y_t - \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i \right)^2 \rightarrow \min. \quad (2.12)$$

Здесь можно использовать как минимизацию (2.12) без ограничений, так и с ограничениями, где веса удовлетворяют системе (2.9). Однако при использовании данных методов выбор значения числа  $P$  остается на усмотрение исследователя, и поскольку данный выбор является произвольным, то рассмотренные методы могут давать неустойчивые результаты и не могут быть рассматриваться в качестве полноценных.

Что касается байесовского взвешивания, то данному методу и различным его вариациям посвящено огромное количество научной литературы. В связи с этим приведем краткое описание данной методики. Предположим, что имеется некоторое пространство моделей  $M = \{M_1, M_2 \dots M_q\}$ , одна из которых является истинной. Процедура начинается с наложения априорных вероятностных распределений на параметры рассматриваемых моделей  $\beta_\omega$  и дисперсию ошибок  $\sigma^2$ . Вероятность, что модель  $M_i$  является истинной также подчиняется некоторому априорному распределению  $M_i \sim \pi(M_i)$ . Вектор параметров модели генерируется согласно следующим условным вероятностным распределениям:  $\sigma^2 | M_i \sim \pi(\sigma^2 | M_i)$  и  $\beta_\omega | \sigma^2, M_i \sim \pi(\beta_\omega | \sigma^2, M_i)$ , где  $\Omega = \omega_1, \omega_2 \dots \omega_p$  – вектор нулей и единиц,

обозначающий включение или исключение переменных в модель  $M_i$ . Используемые обозначения позволяют параметризовать генерацию целевой переменной посредством следующей условной модели:  $Y|\beta_\omega, \sigma^2, M_i \sim N(X_\omega \beta_\omega, \sigma^2 I)$ . Тогда маргинальное распределение данных целевой переменной при выборе модели  $M_i$  может быть записано как показано ниже:

$$p(Y|M_i) = \iint p(Y|\beta_\omega, \sigma^2, M_i) \pi(\beta_\omega|\sigma^2, M_i) \pi(\sigma^2|M_i) d\beta_\omega d\sigma^2.$$

Таким образом, апостериорная вероятность модели  $M_i$  равна:

$$p(M_i|Y) = \frac{p(Y|M_i) \pi(M_i)}{\sum p(Y|M_i) \pi(M_i)}.$$

Данное уравнение является логичным способом учета степени неопределенности относительно выбора каждой конкретной модели. Из него можно без труда вывести математические ожидания для коэффициентов моделей после взвешивания на пространстве рассматриваемых моделей.

$$E(\beta_i|Y) = \sum_{i=1}^q p(M_i|Y) E(\beta_i|M_i, Y),$$

где  $E(\beta_i|Y)$  представляет взвешенное математическое ожидание  $\beta_i$  по всем рассматриваемым конфигурациям.

Однако, как уже было упомянуто выше, результаты ВМА существенным образом зависят от выбора накладываемых априорных вероятностных распределений, особенно это касается изначальной вероятности модели  $M_i$  оказаться истинной. К

настоящему моменту было предложено немало априорных распределений, но несмотря на это научное сообщество не пришло к консенсусу относительно четких правил использования данных распределений в тех или иных ситуациях, см. [212, 201, 168, 152]. Поэтому в дальнейших разделах и главах при проведении сравнительного анализа предлагаемых и существующих подходов будем применять неинформативное априорное распределение. В случае с неинформативным априорным распределением веса, вычисляемые согласно байесовскому взвешиванию, могут приблизительно вычисляться согласно следующей формуле:

$$w_i = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}BIC(i)\right)}{\sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{1}{2}BIC(j)\right)}, \quad (2.13)$$

где  $BIC_i$  – байесовский информационный критерий для  $i$ -ой модели, вычисляемый по формуле (1.7).

Схожий подход к взвешиванию набора подмоделей был также предложен в работе [71], который основывается на использовании информационном критерии Акаике (AIC) вместо BIC.

$$w_i = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}AIC(i)\right)}{\sum_{j=1}^M \exp\left(-\frac{1}{2}AIC(j)\right)}, \quad (2.14)$$

где  $AIC_i$  –информационный критерий Акаике для  $i$ -ой модели, вычисляемый по формуле (1.8).

Взвешивание Маллоуса (ММА) является еще одним популярным методом комбинирования моделей и был разработан в работе [147] в качестве расширения классического критерия Маллоуса для выбора из множества моделей. В дальнейшем данный подход получил развитие в таких научных работах, как [144, 145, 146]. Для нахождения оптимального вектора весовых коэффициентов согласно рассматриваемому методу проводится процедура минимизации внутривыборочной дисперсии наблюдаемой ошибки по комбинированной модели с наложением штрафа на каждую подмодель в зависимости от числа включаемых в нее предикторов и полученной оценки дисперсии ошибок по полной модели.

$$C(w) = \sum_{t=1}^n \left( y_t - \sum_{i=1}^M \hat{y}_{it} w_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^M w_i k_i s^2, \quad (2.15)$$

где

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^n e_{Mt}^2}{n - k_M} \quad (2.16)$$

является несмещенной оценкой истинной дисперсии ошибок  $\sigma^2$  наибольшей откалиброванной на данных модели.

В общем и целом, ММА работает достаточно хорошо в случае взвешивания по вложенным моделям. Вложенными называются такие модели, что если рассматривается набор из  $M$  подмоделей, то каждая из  $\hat{y}_i$  включает все объясняющие переменные из  $\hat{y}_{i-1}$  плюс еще одну новую переменную. Таким образом,  $\hat{y}_1$  включает только один предиктор, а  $\hat{y}_M$  – все модели  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{M-1}$  плюс один дополнительный предиктор. Однако, как уже было упомянуто выше, весьма желательным является взвешивание по моделям с наименьшей взаимокорреляцией остатков, так как степень их независимости напрямую влияет на синергетический эффект, получаемый от

проведения данной процедуры. При использовании ММА достаточно сложно выполнить данное условие, поскольку ошибки по вложенным моделям достаточно часто сильно коррелированы, вследствие чего не стоит ожидать значительного улучшения точности прогноза от проведения процедуры взвешивания моделей.

Помимо рассмотренных выше методов взвешивания регрессионных моделей последняя литература также посвящена достаточно тривиальным методам взвешивания уравнений, таких как простая средняя и медиана. Несмотря на то, что данные методы являются достаточно наивными, их точность бывает сложно превзойти, особенно в условиях наложения должных ограничений на отбираемые подмодели, см. например [96, 121, 278, 277, 208].

Как было уже упомянуто выше, ключевым недостатком существующих методов является невозможность получения несмещенной ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза (MSFE), что значит, во-первых, что отсутствует ясное понятие об ожидаемом среднеквадратическом отклонении вычисляемого точечного прогноза и, во-вторых, нет возможности рассчитать доверительный интервал с каким-либо заданным уровнем значимости. Особо отметим, что в разрабатываем в следующем разделе методе устраняется данный недостаток, что позволяет рассматривать предлагаемый подход к взвешиванию регрессионных моделей в качестве предпочтительного среди существующих методов.

## **2.2 Метод взвешивания моделей путем минимизации дисперсии ожидаемой ошибки прогноза**

Предположим, что имеется  $M$  подмоделей, каждая из которых имеет некоторую ошибку  $\varepsilon_{it}$ , удовлетворяющую предпосылкам 1-5 метода наименьших квадратов,

детально рассмотренным в разделе 1.2 настоящего диссертационного исследования. Дополнительно к данным классическим предпосылкам добавим еще следующее предположение:

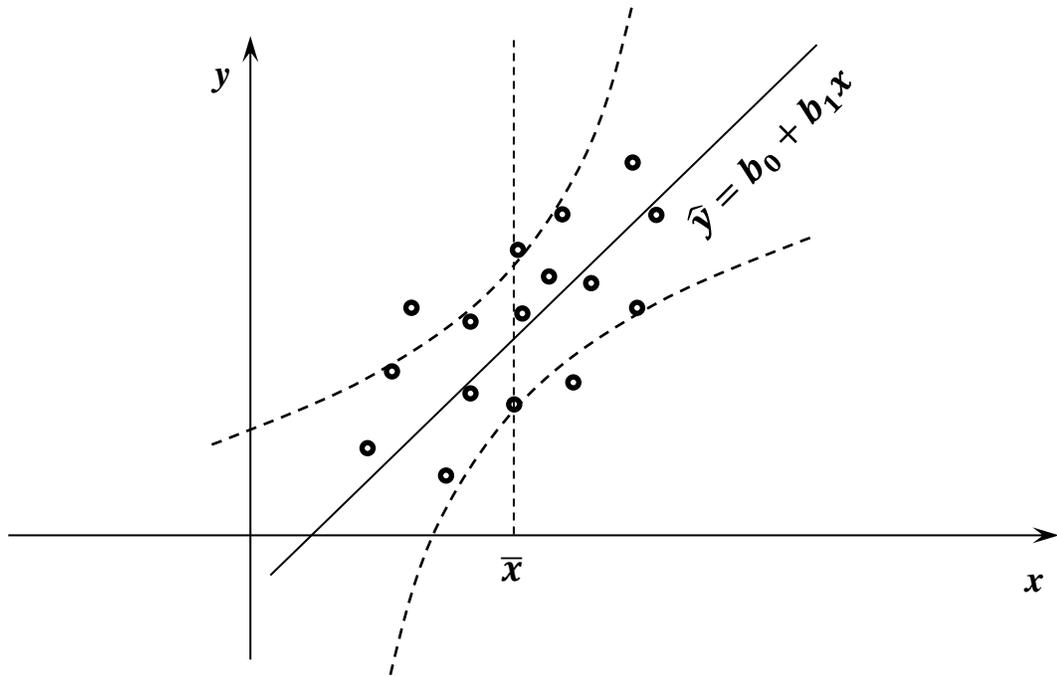
**Предпосылка 7:** Отсутствие автокорреляции ошибок среди подмоделей, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_{iq}; \varepsilon_{ju}) = 0, \forall q \neq u$ .

Отметим, что предпосылка 7 выполняется почти автоматически, если выполняется предпосылка 5. Как было уже высказано выше, целью разрабатываемого метода является оптимизация весовых коэффициентов, основанная на минимизации среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза (MSFE) при системе ограничений (2.9). Это означает, что для того, чтобы достичь поставленную цель, необходимо получить аналитическое выражение несмещенной и эффективной оценки MSFE.

Начнем вывод данного аналитического выражения с того факта, что показатель среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза линейной регрессионной модели состоит из двух компонент: дисперсия ошибок и дисперсия линии регрессии, см. работу [199]. Ниже приведем доказательство данного утверждения:

$$\begin{aligned} MSFE_{n+1} &= \text{Var}(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}) = \text{Var}(\hat{y}_{n+1} - E(\hat{y}_{n+1}) + E(\hat{y}_{n+1}) - y_{n+1}) \\ &= \text{Var}(\hat{y}_{n+1} - E(\hat{y}_{n+1})) + \text{Var}(E(\hat{y}_{n+1}) - y_{n+1}) \\ &= \text{Var}(\varepsilon) + \text{Var}\{\hat{y}_{n+1} - E(\hat{y}_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Иллюстрация данного факта для простейшего случая парной линейной регрессии приведена на рисунке 2.1. На нем видно, что чем дальше находится значение предиктора от своей выборочной средней, тем менее точными получаются прогнозируемые значения целевой переменной. Это происходит из-за того, что даже незначительная погрешность в определении коэффициента при предикторе выражается в значительной ошибке прогноза при удалении  $x_{n+1}$  от  $\bar{x}$ .



**Рисунок 2.1** – Схематичная иллюстрация доверительных интервалов для прогнозируемых значений целевой переменной

Источник: составлено автором по материалам [199, сс. 483-490]

Применим описанный факт к расчету комбинированной линейной модели:

$$\begin{aligned}
 MSFE_{n+1} &= Var(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}) = Var(\bar{\varepsilon}) + Var\{\bar{y}_{n+1} - E(\bar{y}_{n+1})\} \\
 &= Var\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_{it} w_i\right) + Var\left[\sum_{i=1}^M \{\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\} w_i\right]. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Для вывода аналитического выражения для MSFE разобьем правую часть уравнения (2.17) на две части. Начнем с компоненты дисперсии истинных ошибок, которая может быть представлена как сумма всех элементов взвешенной дисперсионно-ковариационной матрицы истинных ошибок рассматриваемых подмоделей.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_{it} w_i\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) w_i w_j. \quad (2.18)$$

Далее обратимся к дисперсии линии регрессии. По аналогии с тем, что было представлено в (2.18), можно записать следующее:

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^M \{\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\} w_i\right] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{cov}(\hat{y}_{i(n+1)}; \hat{y}_{j(n+1)}) w_i w_j. \quad (2.19)$$

Поскольку из данного выражения не ясно, как вычислять ковариацию для  $i$ -ой и  $j$ -ой линии регрессии, выведем аналитическое выражение для этого показателя. Вывод представлен ниже:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{y}_{i(n+1)}; \hat{y}_{j(n+1)}) &= E\left[\left\{\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\right\}\left\{\hat{y}_{j(n+1)} - E(\hat{y}_{j(n+1)})\right\}\right] \\ &= E\left\{X_{i(n+1)}(B_i - \beta_i)(B_j - \beta_j)^T X_{j(n+1)}^T\right\} \\ &= E\left\{X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \varepsilon_i \varepsilon_j^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T\right\} \\ &= X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \\ &= \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В данном выводе при переходе от третьей строчки к четвертой мы воспользовались тем фактом, что в данном случае истинные ошибки являются случайной переменной, а значения включаемых в модель факторов известны из наблюдений. В связи с этим можно вынести матрицы значений предикторов за знак математического ожидания, оставляя внутри него только квадратную матрицу произведений истинных остатков анализируемых подмоделей. Для перехода от четвертой строчки к пятой будем опираться на выполнимость предпосылки 7, которая

говорит об отсутствии автокорреляции истинных ошибок между подмоделями. Если предпосылка 7 выполняется, то математическим ожиданием квадратной матрицы произведений истинных ошибок рассматриваемых моделей является диагональная матрица, где все диагональные элементы равны ковариации истинных ошибок  $i$ -ой и  $j$ -ой моделей. Суммируя представление истинной дисперсии ошибок для комбинированной модели из (2.18) и аналитическое выражение ковариации линий регрессии, полученное в (2.20), можем записать (2.17) в следующем виде:

$$MSFE_{n+1} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) w_i w_j \left\{ \mathbf{1} + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \right\}. \quad (2.21)$$

Для завершения процедуры вывода аналитического выражения несмещенной оценки MSFE необходимо найти несмещенную оценку для  $\text{cov}(\varepsilon_i; \varepsilon_j)$ . Начнем опять с известного факта, что для  $i$ -ой подмодели вектор-столбец значений целевой переменной может быть представлен через выборочные коэффициенты регрессии и наблюдаемые отклонения либо через истинные коэффициенты и истинные ошибки модели, см. формулу (2.22).

$$Y = X_i B_i + e_i = X_i \beta_i + \varepsilon_i. \quad (2.22)$$

Тогда из (2.22) можно выразить вектор столбец наблюдаемых отклонений  $e_i$  для  $i$ -ой подмодели.

$$e_i = X_i (\beta_i - B_i) + \varepsilon_i = -X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \varepsilon_i + \varepsilon_i = \left\{ I_n - X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \right\} \varepsilon_i.$$

Далее запишем математическое ожидание суммы произведений наблюдаемых отклонений по  $i$ -ой и  $j$ -ой моделям, выраженное через их истинные ошибки и матрицы объясняющих переменных:

$$E(e_i^T e_j) = E\left[\varepsilon_i^T \left\{I_n - X_i(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T\right\} \left\{I_n - X_j(X_j^T X_j)^{-1} X_j^T\right\} \varepsilon_j\right]. \quad (2.23)$$

Здесь введем следующее обозначение для облегчения дальнейших вычислений:

$$A_i = I_n - X_i(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T. \quad (2.24)$$

Поскольку мы предполагаем выполнение предпосылки 7, а именно отсутствие корреляции истинных ошибок среди моделей по разным временным периодам, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_{iq}; \varepsilon_{ju}) = 0, \forall q \neq u$ , тогда с учетом введенного обозначения (2.24) формула (2.23) может быть преобразована следующим образом:

$$E(e_i^T e_j) = E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{jt}) \text{tr}(A_i A_j) \Rightarrow E\left(\frac{e_i^T e_j}{\text{tr}(A_i A_j)}\right) = \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}), \quad (2.25)$$

где  $\text{tr}(\cdot)$  обозначает след матрицы, т.е. сумму ее элементов, расположенных на главной диагонали.

Таким образом, из формулы (2.25) получаем, что искомая несмещенная оценка ковариаций истинных ошибок  $i$ -ой и  $j$ -ой моделей будет выглядеть как показано ниже:

$$\text{cov}(e_{it}; e_{jt}) = \frac{\sum_{t=1}^n e_{it} e_{jt}}{\text{tr}(A_i A_j)}. \quad (2.26)$$

Здесь легко показать, что  $tr(A_i A_i) = tr(A_i) = n - k_i$ . поскольку  $A_i$  при умножении на саму себя дает саму себя. Таким образом, применяя (2.26) к (2.21), можем записать окончательную формулу для несмещенной оценки среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза (MSFE):

$$MSFE_{n+1} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\sum_{t=1}^n e_{it} e_{jt}}{tr(A_i A_j)} w_i w_j \left\{ 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \right\}. \quad (2.27)$$

Исходя из этого, процедура подбора вектора весовых коэффициентов осуществляется путем решения следующей оптимизационной задачи квадратичного программирования с ограничениями:

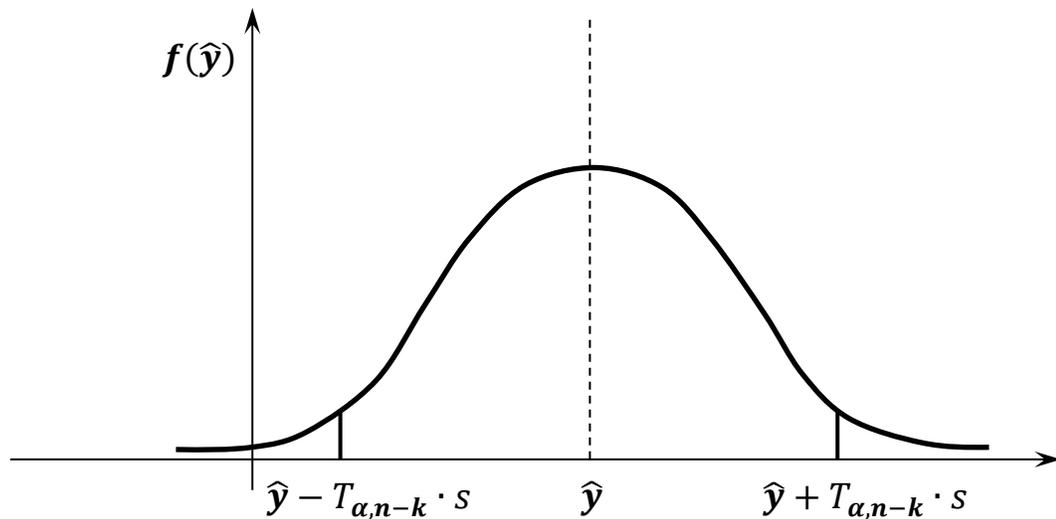
$$\begin{aligned} MSFE_{n+1} &\rightarrow \min \\ &\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M w_i = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1. \end{array} \right. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Вследствие налагаемых ограничений аналитического решения для оптимизационной задачи (2.28) не существует при  $M > 3$ . Поэтому решение находится с помощью численных методов. Здесь отметим, что с недавним развитием информационных технологий и вычислительных мощностей даже при достаточно большом количестве рассматриваемых подмоделей  $M$  возможно найти численное решение за разумное время, используя любой из существующих алгоритмов.

Далее перейдем от точечного прогноза к алгоритму получения интервального с использованием комбинированной модели. Для расчета доверительного интервала для прогноза, полученного с использованием линейной регрессии, используется  $t$ -распределение с числом степеней свободы  $n - k$ , где  $k$  – число параметров модели.

$$\hat{y} - T_{\alpha, n-k} \cdot s < y < \hat{y} + T_{\alpha, n-k} \cdot s ,$$

где  $s$  – квадратный корень несмещенной оценки истинной дисперсии ошибок модели,  $\alpha$  – уровень значимости.



**Рисунок 2.2** – Схематичная иллюстрация процедуры нахождения интервального прогноза

Источник: составлено автором на основе материалов работы [256, сс. 120-130]

В случае комбинированной модели для получения доверительных интервалов для точечного прогноза за период  $n + 1$  логично использовать точно такую же формулу.

$$\bar{\hat{y}} - T_{\alpha, r} \cdot \sqrt{MSFE_{n+1}} < y < \bar{\hat{y}} + T_{\alpha, r} \cdot \sqrt{MSFE_{n+1}} , \quad (2.29)$$

где  $r$  – число степеней свободы.

Здесь также отметим, что для вычисления несмещенной оценки среднеквадратического отклонения ошибок комбинированной модели необходимо

воспользоваться некоторой поправкой. Так как извлечение квадратного корня является нелинейным преобразованием, то образуется некоторое смещение при вычислении таким образом среднеквадратического отклонения из несмещенной оценки дисперсии. Предполагая, что ошибки комбинированной модели подчиняются нормальному распределению, несмещенная оценка их среднеквадратического отклонения вычисляется согласно следующей формуле:

$$MFE_{n+1} = \frac{\sqrt{MSFE_{n+1}}}{c(r)},$$

где  $c(r)$  является фактором поправки, корректирующий смещенную оценку среднеквадратического отклонения, после извлечения квадратного корня из несмещенной оценки дисперсии. Фактор поправки рассчитывается как показано ниже:

$$c(r) = \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)},$$

где  $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$  – гамма-функция.

Из формулы (2.29) следует, что задача нахождения доверительного интервала сводится к проблеме вычисления числа степеней свободы  $r$ . Как известно

$$\frac{\hat{y} - y}{s} = \frac{\frac{\hat{y} - y}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-k)s^2}{(n-k)\sigma^2}}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi_{n-k}^2}{(n-k)}}} \sim T_{n-k},$$

тогда можно заключить, что

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k}^2 \Rightarrow \frac{r \cdot MSFE_{n+1}}{\bar{\sigma}^2} \sim \chi_r^2.$$

Далее, используя тот факт, что дисперсия случайной величины, подчиняющейся распределению хи-квадрат, равна числу степеней свободы, умноженному на два, можем привести следующие выкладки:

$$\text{Var}\left(\frac{r \cdot MSFE_{n+1}}{\bar{\sigma}^2}\right) = 2r \Rightarrow \frac{r^2}{\bar{\sigma}^4} \text{Var}(MSFE_{n+1}) = 2r \Rightarrow r = \frac{2\bar{\sigma}^4}{\text{Var}(MSFE_{n+1})}. \quad (2.30)$$

Таким образом, для того, чтобы получить аналитическое выражение для числа степеней свободы по комбинированной модели  $r$  необходимо всего лишь рассчитать показатель  $\text{Var}(MSFE_{t+1})$ . Используя (2.27), получим следующее:

$$\text{Var}(MSFE_{n+1}) = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{cov}(e_{it}; e_{jt}) w_i w_j \left\{1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T\right\}\right]. \quad (2.31)$$

Введем следующее обозначение для облегчения восприятия дальнейших математических выкладок:

$$\theta_{ij} = 1 + X_{i(n+1)} \left( X_i^T X_i \right)^{-1} X_i^T X_j \left( X_j^T X_j \right)^{-1} X_{j(n+1)}^T. \quad (2.32)$$

Применяя данное обозначение к (2.31) и раскрыв скобки, можем переписать дисперсию MSFE в следующем виде:

$$\text{Var}(MSFE_{n+1}) = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=1}^M \text{cov}\{\text{cov}(e_{at}; e_{bt}); \text{cov}(e_{ct}; e_{dt})\} w_a w_b w_c w_d \theta_{ab} \theta_{cd}. \quad (2.33)$$

Для завершения вывода формулы для дисперсии MSFE комбинированной модели необходимо в явном виде вывести аналитические выражения для ковариаций всех ковариаций. В связи с этим проведем следующие математические преобразования:

$$\begin{aligned} & \text{cov}\{\text{cov}(e_{at}; e_{bt}) \text{tr}(A_a A_b); \text{cov}(e_{ct}; e_{dt}) \text{tr}(A_c A_d)\} \\ &= E\left[\left\{e_a^T e_b - E(e_a^T e_b)\right\} \left\{e_c^T e_d - E(e_c^T e_d)\right\}\right] \\ &= E\left[\left\{\varepsilon_a^T A_a A_b \varepsilon_b - E(\varepsilon_a^T A_a A_b \varepsilon_b)\right\} \left\{\varepsilon_c^T A_c A_d \varepsilon_d - E(\varepsilon_c^T A_c A_d \varepsilon_d)\right\}\right] \\ &= \left\{E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt}) - E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}) E(\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\right\} \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \\ &+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) \left[ \text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]^T) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \right] \\ &+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) \left[ \text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \right] \\ &= \text{cov}\left\{(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}); (\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\right\} \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \\ &+ \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) \left[ \text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]^T) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \right] \\ &+ \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) \left[ \text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $\circ$  – произведение Адамара.

Дадим некоторые пояснения того, как был осуществлен переход в (2.34) от третьей к четвертой строчке. Обозначим  $A_a A_b = U$  и  $A_c A_d = V$  с элементами  $u_{ij}$  и

$v_{ij}$  соответственно. Тогда третья строчка в (2.34) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
& E\left\{\left(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b - E(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b)\right)\left(\varepsilon_c^T V \varepsilon_d - E(\varepsilon_c^T V \varepsilon_d)\right)\right\} \\
&= E\left[\varepsilon_a^T U \varepsilon_b \varepsilon_c^T V \varepsilon_d - E(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b) \varepsilon_c^T V \varepsilon_d - \varepsilon_a^T U \varepsilon_b E(\varepsilon_c^T V \varepsilon_d) + E(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b) E(\varepsilon_c^T V \varepsilon_d)\right] \\
&= E(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b \varepsilon_c^T V \varepsilon_d) - E(\varepsilon_a^T U \varepsilon_b) E(\varepsilon_c^T V \varepsilon_d) \\
&= \{E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt}) - E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}) E(\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\} \text{tr}(U \circ V) \\
&+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) [\text{tr}(U \times V^T) - \text{tr}(U \circ V)] \\
&+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) [\text{tr}(U \times V) - \text{tr}(U \circ V)].
\end{aligned}$$

Откуда путем обратной замены получаем переход к четвертой строчке в (2.34).

Таким образом, мы выразили ковариации ковариаций наблюдаемых отклонений через истинные ошибки моделей. Для краткости последующих выкладок введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned}
\Psi_{abcd} = & \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) [\text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]^T) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d])] \\
& + \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) [\text{tr}([A_a A_b] \times [A_c A_d]) - \text{tr}([A_a A_b] \circ [A_c A_d])]. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Применяя полученное выражение (2.35) к (2.33) и затем подставляя полученное в (2.30), можем записать аналитически формулу для числа степеней свободы по комбинированной модели, выраженного через истинные ошибки рассматриваемых подмоделей.

$$r = \frac{2\bar{\sigma}^4}{\sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=1}^M w_a w_b w_c w_d \theta_{ab} \theta_{cd} \frac{\text{cov}\{(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}); (\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\} \text{tr}(A_a A_b \circ A_c A_d) + \Psi_{abcd}}{\text{tr}(A_a A_b) \text{tr}(A_c A_d)}}. \quad (2.36)$$

Последним шагом на пути вывода аналитического выражения для числа

степеней свободы является вычисление ковариации произведений истинных ошибок подмоделей. Для решения данной задачи сформируем дисперсионно-ковариационную матрицу для истинных ошибок анализируемых моделей:

$$COV = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(\varepsilon_{1t}; \varepsilon_{2t}) & \cdots & \text{cov}(\varepsilon_{1t}; \varepsilon_{Mt}) \\ \text{cov}(\varepsilon_{2t}; \varepsilon_{1t}) & \sigma_2^2 & \cdots & \text{cov}(\varepsilon_{2t}; \varepsilon_{Mt}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(\varepsilon_{Mt}; \varepsilon_{2t}) & \text{cov}(\varepsilon_{Mt}; \varepsilon_{2t}) & \cdots & \sigma_M^2 \end{vmatrix}, \quad (2.37)$$

а также матрицу произведений истинных ошибок этих подмоделей:

$$\Omega_t = \begin{vmatrix} \varepsilon_{1t}^2 & \varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t} & \cdots & \varepsilon_{1t}\varepsilon_{Mt} \\ \varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t} & \varepsilon_{2t}^2 & \cdots & \varepsilon_{2t}\varepsilon_{Mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{Mt}\varepsilon_{2t} & \varepsilon_{Mt}\varepsilon_{2t} & \cdots & \varepsilon_{Mt}^2 \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Для дальнейших расчетов обратимся к вероятностному распределению Уишарта, предложенному шотландским статистиком Джоном Уишартом, см. [254]. С целью полноценного изложения материала дадим краткую справку по данному распределению. Пусть  $X$  является матрицей размерности  $n \times p$ , где каждая строка независимо получена из  $p$ -мерного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием.

$$X_{(i)} = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^p) \sim N_p(0, V).$$

Тогда распределением Уишарта является вероятностное распределение случайной матрицы  $S = X^T X$  размерностью  $p \times p$ . Общепринятым обозначением

того факта, что  $S$  подчиняется данному распределению является следующая запись:

$$S \sim W_p(V, n),$$

где положительное действительное число  $n \geq p$  – число степеней свободы для данного распределения. Простейшим случаем является ситуация, когда  $p = V = 1$  – распределение Уишарта представляет собой распределение хи-квадрат с  $n$  степенями свободы. Функция плотности данного вероятностного распределения выглядит следующим образом:

$$f(X) = \frac{1}{2^{np/2} |V|^{n/2} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} |X|^{(n-p-1)/2} e^{-(1/2)tr(V^{-1}X)},$$

где  $|X|$  – определитель матрицы  $X$  и  $\Gamma_p(\cdot)$  – многомерная гамма-функция, имеющая вид:

$$\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{j=1}^p \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1-j}{2}\right).$$

Из приведенного выше описания можем заключить, что матрица  $\sum_{t=1}^n \Omega_t$  также подчиняется распределению Уишарта с  $n$  степенями свободы. Для вычисления ковариаций всех возможных комбинаций элементов матрицы  $\sum_{t=1}^n \Omega_t$  требуется формирование массива более высокого порядка, такого как операция Кронекера с целью представления такого массива в форме матрицы. Таким образом, дисперсионно-ковариационная матрица  $\sum_{t=1}^n \Omega_t$  может быть представлена как показано ниже:

$$\text{cov}\left(\sum_{t=1}^n \Omega_t\right) = \sum_{t=1}^n \text{cov}(\Omega_t) = n \text{cov}(Cz_t z_t^T C^T),$$

где  $COV = CC^T$  – разложение Холецкого квадратной симметричной матрицы и  $z_t z_t^T = I_M$ , что означает, что  $z_t$  является вектором-столбцом независимо сгенерированных нормальных случайных величин с нулевой средней и единичной дисперсией.

Далее применим оператор векторизации к матрице  $\sum_{t=1}^n \Omega_t$ , которая формирует из нее вектор посредством постановки друг на друга столбцов данной матрицы. Принимая обозначение  $z_t = z$  (так как все векторы имеют одинаковое распределение), имеем:

$$\begin{aligned} \text{cov}\left[\text{vec}\left(\sum_{t=1}^n \Omega_t\right)\right] &= n \text{cov}[\text{vec}(Czz^T C^T)] \\ &= n \text{cov}[(C \otimes C)\text{vec}(zz^T)] \\ &= n(C \otimes C)\text{cov}[\text{vec}(zz^T)](C \otimes C)^T \\ &= n(C \otimes C)\text{cov}[z \otimes z^T](C \otimes C)^T, \end{aligned}$$

где  $\otimes$  - произведение Кронекера.

Таким образом, для того, чтобы определить  $\text{cov}(\sum_{t=1}^n \Omega_t)$ , нужно всего лишь вычислить  $\text{cov}(z \otimes z)$ . Так как  $z$  является вектором независимых нормально распределенных случайных величин, существует только пять уникальных элементов в рассматриваемой дисперсионно-ковариационной матрице: 1) дисперсия  $Z_k^2$ , где  $k$  – любой элемент вектора  $z$ ; 2) дисперсия  $Z_k Z_l \forall l \neq k$ ; 3) ковариация элементов  $Z_k Z_l$  и  $Z_l Z_k$ ; 4) ковариация элементов  $Z_k^2$  и  $Z_l^2$ ; 5) ковариация элементов  $Z_i Z_j$  и  $Z_l Z_k$ , где число одинаковых индексов из  $i, j, k, l$  не более трех.

1). Поскольку  $Z_k$  является нормально распределенной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, то  $Z_k^2$  подчиняется распределению  $\chi^2(1)$  с дисперсией равной 2. Поэтому  $Var(Z_k^2) = 2$  для любого  $k$ .

2).  $Z_k$  и  $Z_l$  являются некоррелированными случайными величинами, что подразумевает, что они также независимы. Поэтому  $Var(Z_k Z_l) = E[(Z_k Z_l)^2] - E[Z_k Z_l]^2 = E(Z_k^2 Z_l^2) - E[Z_k]^2 E[Z_l]^2 = E(Z_k^2 Z_l^2)$  вследствие независимости, тогда  $Var(Z_k Z_l) = E(Z_k^2)E(Z_l^2) = 1 \cdot 1 = 1$ , поскольку элементы  $Z_k^2$  и  $Z_l^2$  подчиняются распределению  $\chi^2(1)$  с математическим ожиданием равным единице.

3). Так как  $Z_k$  и  $Z_l$  являются некоррелированными случайными величинами, то  $cov(Z_k Z_l, Z_l Z_k) = E(Z_k Z_l Z_l Z_k) - E(Z_k Z_l)E(Z_k Z_l) = E(Z_k^2 Z_l^2) - E[Z_k]^2 E[Z_l]^2 = 1 - 0 = 1$  вследствие независимости и свойств  $\chi^2(1)$ .

4). Так как  $Z_k$  и  $Z_l$  являются некоррелированными случайными величинами, то  $cov(Z_k^2, Z_l^2) = E(Z_k^2 Z_l^2) - E(Z_k^2)E(Z_l^2) = 1 - 1 = 0$  вследствие независимости и свойств  $\chi^2(1)$ .

5). Вследствие того, что элементы  $Z_i, Z_j, Z_l, Z_k$  являются независимыми  $cov(Z_i Z_j, Z_l Z_k) = 0$  даже, если три элемента являются одинаковыми.

Таким образом, элементы  $[p(k-1) + k, p(k-1) + k]$  матрицы  $cov(z \otimes z)$  будут равны 2, поскольку  $Var(Z_k^2) = 2$  для любого  $k$ , в то время как оставшиеся диагональные элементы  $cov(z \otimes z)$  будут равны 1, так как  $Var(Z_k Z_l) = 1$ . Остальные элементы должны равняться 0 за исключением  $cov(Z_k Z_l, Z_l Z_k)$ , которая также равняется 1. Подводя итоги, можно выразить  $cov(z \otimes z)$  как  $(I_p \otimes I_p + M_p)$ , где  $M_p$  – квадратная матрица размерности  $p^2 \times p^2$ , состоящая из 0 и 1. Элементы векторизации данной матрицы  $vec(M_p)$  могут быть описаны следующим образом:

- Каждая единица обрамляет последовательность нулей;
- Длина последовательности нулей имеет одну из следующих форм:
  - Большая последовательность =  $p^2 + (p - 1)$ ;

- Малая последовательность =  $p$ ;
- Набор элементов представляется в следующем виде:
  - Повторение  $p - 1$  больших последовательностей, за которыми следует
  - Одна малая последовательность, где
  - Каждая последовательность обрамляется единицами.

Используя вышеописанную схему,  $vec(M_p)$  состоит из  $p - 1$  повторений  $p - 1$  больших последовательностей. К примеру, при  $p = 3$

$$vec(M_p) = [1,11 0, 1,11 0, 1, 3 0, 1, 11 0, 1,11 0, 1, 3 0, 1, 11 0, 11 0, 1].$$

Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned}
 cov\left[vec\left(\sum_{t=1}^n \Omega_t\right)\right] &= n(C \otimes C)cov[z \otimes z^T](C \otimes C)^T \\
 &= n(C \otimes C)(I_p \otimes I_p + M_p)(C \otimes C)^T \\
 &= n[(C \otimes C)(C^T \otimes C^T) + (C \otimes C)M_p(C^T \otimes C^T)] \quad (2.39) \\
 &= n[COV \otimes COV + (C \otimes C)M_p(C^T \otimes C^T)]
 \end{aligned}$$

Также можно представить аналитическое выражение для дисперсионно-ковариационной матрицы  $\sum_{t=1}^n \Omega_t$ , полученное в (2.39), в следующем виде:

$$cov\left(\sum_{t=1}^n \Omega_t\right) = n(I + P_{vec(COV)})COV \otimes COV, \quad (2.40)$$

где  $P_{vec(COV)}$  – матрица перестановок, значения элементов которой выводятся из

следующего равенства:

$$\text{vec}(X^T) = P_{\text{vec}(X)} \text{vec}(X). \quad (2.41)$$

Более подробно ознакомиться с выводом формулы (2.39) и (2.40) можно в работе [203].

Двигаясь дальше, из формулы (2.40) можно заключить, что

$$\text{cov}\{(\varepsilon_a \varepsilon_b), (\varepsilon_c \varepsilon_d)\} = \{(I + P_{\text{vec}(COV)}) COV \otimes COV\}_{\langle abcd \rangle}, \quad (2.42)$$

где нижний индекс  $\langle abcd \rangle$  обозначает элемент матрицы, который находится согласно следующей процедуре. Фиксируется позиция элемента  $COV_{ab}COV_{cd}$  в матрице  $(\text{vec}(COV)\text{vec}(COV)^T)$ , после чего берется точно такая же позиция элемента в матрице  $(I + P_{\text{vec}(COV)})COV \otimes COV$ .

Поскольку истинные ошибки подмоделей неизвестны, как следствие неизвестна и матрица  $COV$ . В связи с этим заменим матрицу  $COV$  ее несмещенной оценкой  $UCOV$ , которая приведена ниже:

$$UCOV = \begin{vmatrix} \frac{\sum_{t=1}^n e_{1t}^2}{tr(A_1)} & \frac{\sum_{t=1}^n e_{1t}e_{2t}}{tr(A_1A_2)} & \dots & \frac{\sum_{t=1}^n e_{1t}e_{Mt}}{tr(A_1A_M)} \\ \frac{\sum_{t=1}^n e_{2t}e_{1t}}{tr(A_2A_1)} & \frac{\sum_{t=1}^n e_{2t}^2}{tr(A_2)} & \dots & \frac{\sum_{t=1}^n e_{2t}e_{Mt}}{tr(A_2A_M)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sum_{t=1}^n e_{Mt}e_{1t}}{tr(A_M A_1)} & \frac{\sum_{t=1}^n e_{Mt}e_{2t}}{tr(A_M A_2)} & \dots & \frac{\sum_{t=1}^n e_{Mt}^2}{tr(A_M)} \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

После чего заменим матрицу  $COV$  в формуле (2.36) на введенную матрицу  $UCOV$  и введем следующее обозначение для большей компактности дальнейших математических выражений:

$$\Theta_{abcd} = \left\{ (I + P_{vec(UCOV)}) UCOV \otimes UCOV \right\}_{\{abcd\}}. \quad (2.44)$$

Наконец, применяя обозначение (2.44) к (2.36) и заменяя квадрат истинной дисперсии ошибок комбинированной модели на квадрат несмещенной оценки этой дисперсии, представленной в формуле (2.27), получим окончательную формулу для числа степеней свободы для комбинированной модели.

$$r = \frac{2 \left( \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\sum_{t=1}^n e_{it} e_{jt}}{tr(A_i A_j)} w_i w_j \theta_{ij} \right)^2}{\sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=1}^M w_a w_b w_c w_d \theta_{ab} \theta_{cd} \frac{\Theta_{abcd} tr([A_a A_b] \circ [A_c A_d]) + \Psi_{abcd}}{tr(A_a A_b) tr(A_c A_d)}}. \quad (2.45)$$

Из формулы (2.45) видно, что даже, если была бы известна матрица  $COV$ , то число степеней свободы при постоянных весах все равно изменяется в зависимости от матриц объясняющих переменных по каждой из подмоделей. Также представляется интересным проследить зависимость  $r$  от значений весовых коэффициентов. В связи с этим данная формула заслуживает отдельного детального анализа, который представлен в разделе 3.2 диссертационного исследования.

С целью подведения итогов проведенных выше расчетов и выводов, представим ниже пошаговый алгоритм для вычисления оптимального вектора весовых коэффициентов, применяемого для построения комбинированной модели, а также

получения по ней точечного и интервального прогнозов.

**Шаг 1:** Специфицировать набор подмоделей, удовлетворяющих предпосылкам 1-5 и 7, рассчитанных на окнах данных одинаковой длины.

**Шаг 2:** Рассчитать вектор весовых коэффициентов посредством решения оптимизационной задачи (2.28).

**Шаг 3:** Осуществить комбинирование подмоделей по формуле (2.6), используя вектор весовых коэффициентов, рассчитанный на шаге 2.

**Шаг 4:** Произвести расчет точечного прогноза согласно полученной на шаге 3 комбинированной модели.

**Шаг 5:** Получить доверительный интервал для точечного прогноза согласно формуле (2.29) при числе степеней свободы, рассчитанном по формуле (2.45).

### 2.3 Апробация метода взвешивания моделей на имитационных и исторических данных

Для доказательства эффективности предложенного метода взвешивания моделей проведем тестирование на имитационных и исторических данных.

Начнем с проведения имитационного эксперимента на невложенных моделях. В данном случае план эксперимента будет заключаться в следующем. Генерируется временной ряд целевой переменной  $y_t \sim N(0,1), t \in [1, n]$  и соответствующий ей набор объясняющих переменных  $x_{it} \sim N(2, \sigma_{xi}), i \in [1, 10]$ , каждая из которых генерируется согласно представленному ниже выражению:

$$x_{it} = y_t + \varepsilon_{it}, \quad (2.46)$$

где  $\varepsilon_{it} \sim N(2, \sigma_i)$ , а  $\sigma_i \sim U(0,4)$  для каждого вновь сгенерированного окна наблюдений, что дает как значимые предикторы, так и переменные со слабым влиянием на целевую переменную  $y_t$ .

По сгенерированным данным будем специфицировать четыре линейных невложенных регрессионных модели:

$$1). \hat{y}_{1t} = b_{01} + b_{11}x_{1t} + b_{21}x_{2t} + b_{31}x_{3t} + b_{41}x_{4t},$$

$$2). \hat{y}_{2t} = b_{02} + b_{12}x_{5t} + b_{22}x_{6t} + b_{32}x_{7t},$$

$$3). \hat{y}_{3t} = b_{03} + b_{13}x_{8t} + b_{23}x_{9t},$$

$$4). \hat{y}_{4t} = b_{04} + b_{14}x_{10t}.$$

В данном эксперименте проанализируем три плана, каждый из которых взвешивает различные комбинации указанных выше моделей: план 1 – взвешивание моделей 1 и 2; план 2 – взвешивание моделей 1, 2 и 3; план 3 – взвешивание моделей 1, 2, 3 и 4. Во всех трех планах мы предсказываем  $y_{n+1}$ , где  $n$  – число наблюдений в рассматриваемом окне данных.

Будем тестировать шесть методов взвешивания моделей, описанных в разделе 2.1, а именно взвешивание по критерию Маллоуса (ММА), байесовское взвешивание (ВМА), взвешивание Акаике (АМА), простое усреднение прогнозов (англ. Simple Model Averaging, SMA), предложенный в диссертационной работе метод взвешивания (MSFE), а также добавим для сравнения внутривыборочное взвешивание (англ. in-sample model averaging, ISMA), которое просто минимизирует внутривыборочную сумму квадратов отклонений комбинированной модели. Поскольку в данном эксперименте мы имеем дело с невложенными моделями, то при расчете весов по критерию Маллоуса, заменим несмещенную оценку дисперсии ошибок наибольшей из рассматриваемых моделей наименьшей несмещенной оценкой дисперсии ошибок из всех анализируемых уравнений. При проведении эксперимента сравнивались

среднеквадратические реализованные ошибки (англ. Mean Squared Realised Error, MSRE) рассматриваемых способов взвешивания моделей для окон данных различной длины согласно трем описанным выше планам экспериментов. Для расчета каждого отдельного значения проводилось 50 000 имитаций. Результаты проведенного тестирования по плану 1 представлены в таблице 2.1.

**Таблица 2.1** – Сравнение методов взвешивания моделей, план 1

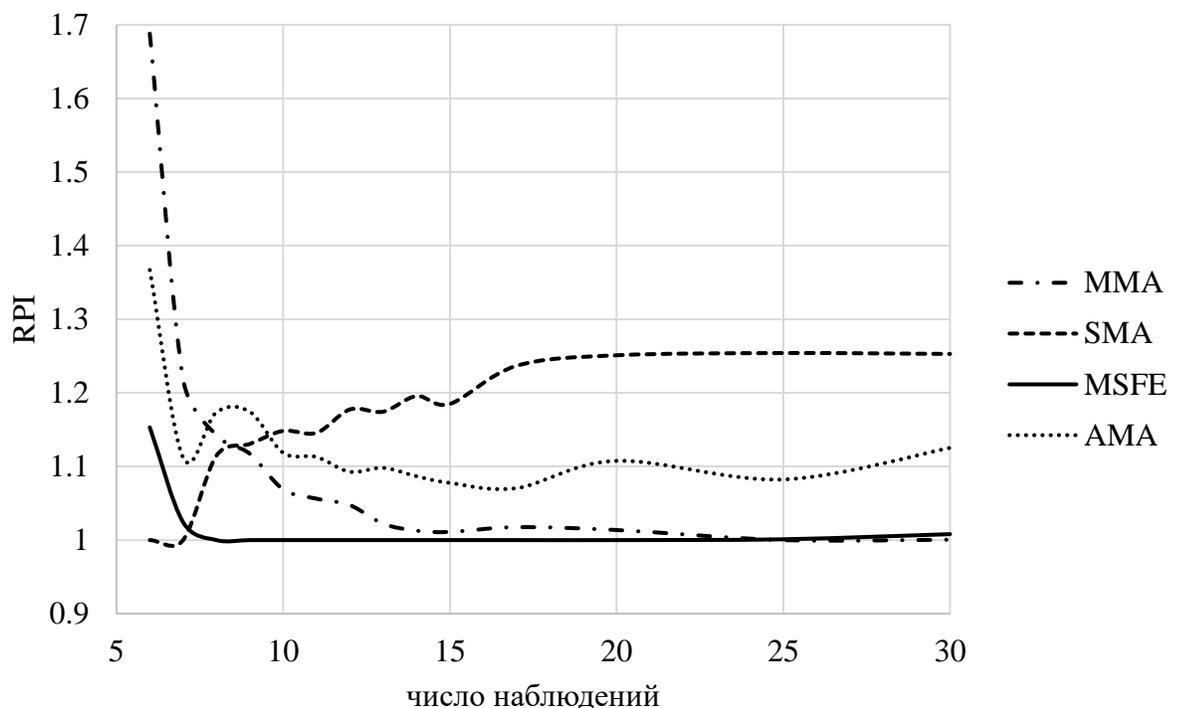
<i>n</i>	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA
6	3.072	2.918	<b>1.729</b>	1.993	2.378	2.363
7	0.793	0.765	<b>0.628</b>	0.643	0.698	0.698
8	0.489	0.475	0.464	<b>0.416</b>	0.488	0.488
9	0.377	0.369	0.373	<b>0.330</b>	0.387	0.388
10	0.320	0.316	0.340	<b>0.296</b>	0.331	0.331
11	0.297	0.297	0.322	<b>0.281</b>	0.313	0.313
12	0.270	0.267	0.301	<b>0.255</b>	0.279	0.279
13	0.254	0.253	0.291	<b>0.248</b>	0.272	0.272
14	0.237	0.238	0.281	<b>0.235</b>	0.256	0.256
15	0.229	0.228	0.267	<b>0.225</b>	0.243	0.243
17	0.215	0.215	0.261	<b>0.211</b>	0.226	0.226
20	0.193	0.193	0.238	<b>0.190</b>	0.211	0.211
25	<b>0.185</b>	<b>0.185</b>	0.232	<b>0.185</b>	0.201	0.200
30	<b>0.174</b>	<b>0.174</b>	0.218	0.175	0.197	0.196
50	<b>0.165</b>	<b>0.165</b>	0.214	0.166	0.184	0.183

Источник: составлено автором

Для лучшей визуализации представленных в таблице 2.1 данных будем использовать индекс относительной эффективности (англ. Relative Performance Index, RPI), который представляет собой отношение реализованной среднеквадратической ошибки (MSRE) рассматриваемой модели и наименьшей MSRE по всем анализируемым моделям. Таким образом, равенство RPI единице означает превосходство рассматриваемой модели над всеми остальными. Показатель RPI рассчитывается по формуле, приведенной ниже:

$$RPI_i = \frac{MSRE_i}{\min(MSRE_1, MSRE_2, \dots, MSRE_6)} \cdot \quad (2.47)$$

Поскольку ВМА и АМА показывают примерно равную эффективность, а ISMA либо дает такую же, либо меньшую точность прогноза, чем ММА – изобразим графически только четыре из анализируемых методов для получения более отчетливой картины. Этими методами являются ММА, SMA, MSFE и АМА. На рисунке 2.3 представлено сравнение динамики индексов относительной эффективности по рассматриваемым методам взвешивания моделей в зависимости от числа наблюдений в окне данных.



**Рисунок 2.3** – Относительная эффективность методов взвешивания, план 1

Источник: составлено автором

Из рисунка 2.3 видно, что явным аутсайдером, особенно при достаточном количестве наблюдений, является SMA. Однако при совсем коротком окне наблюдений, а как следствие большой неопределенности в рассчитанных параметрах, простая средняя превосходит по эффективности другие методы взвешивания. Байесовское взвешивание и взвешивание Акаике показывают более высокую

точность, чем SMA, при достаточной длине окна наблюдений, однако проигрывают ISMA и MMA. Что касается предложенного метода взвешивания моделей, то MSFE взвешивание в среднем превосходит по точности прогноза другие анализируемые методы, демонстрируя примерно одинаковую эффективность с ISMA и MMA при большем числе наблюдений, но выигрывая у них при малом  $n$ . MSFE взвешивание существенно проигрывает в точности только одному методу – простой средней и только в одном случае, при числе наблюдений равном шести.

Далее перейдем ко второму плану эксперимента, где взвешивание происходит по трем регрессионным уравнениям. Результаты данного тестирования приведены в таблице 2.2.

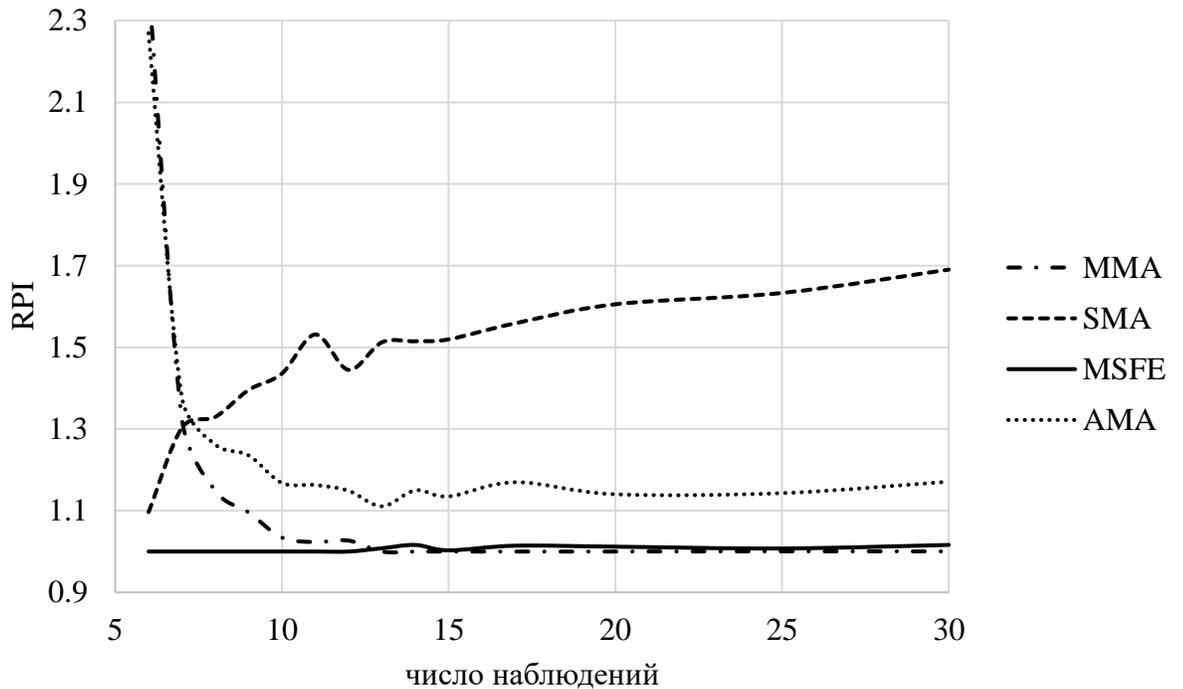
**Таблица 2.2** – Сравнение методов взвешивания моделей, план 2

$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA
6	2.047	1.810	0.829	<b>0.757</b>	1.734	1.717
7	0.501	0.462	0.454	<b>0.349</b>	0.481	0.481
8	0.339	0.322	0.372	<b>0.280</b>	0.353	0.353
9	0.255	0.249	0.317	<b>0.227</b>	0.281	0.281
10	0.227	0.222	0.307	<b>0.214</b>	0.251	0.250
11	0.195	0.191	0.286	<b>0.187</b>	0.218	0.217
12	0.199	0.198	0.278	<b>0.192</b>	0.221	0.221
13	0.179	<b>0.178</b>	0.269	0.179	0.199	0.197
14	<b>0.168</b>	<b>0.168</b>	0.254	0.171	0.194	0.193
15	<b>0.161</b>	<b>0.161</b>	0.245	0.162	0.184	0.183
17	<b>0.153</b>	<b>0.153</b>	0.238	0.155	0.179	0.178
20	<b>0.146</b>	<b>0.146</b>	0.234	0.148	0.167	0.166
25	<b>0.138</b>	<b>0.138</b>	0.226	0.139	0.158	0.158
30	<b>0.132</b>	<b>0.132</b>	0.223	0.134	0.155	0.155
50	<b>0.120</b>	<b>0.120</b>	0.215	0.121	0.139	0.137

Источник: составлено автором

Для визуализации полученных в результате эксперимента данных, точно так же, как и в случае с таблицей 2.1, прибегнем к расчету и графическому изображению индекса относительной эффективности (RPI) рассматриваемых методов взвешивания в зависимости от длины окна наблюдений, который показывает степень

превосходства среднеквадратической реализованной ошибки прогноза над наименьшей. Динамика RPI по результатам, представленным в таблице 2.2, изображена на рисунке 2.4.



**Рисунок 2.4** – Относительная эффективность методов взвешивания, план 2

Источник: составлено автором

Анализируя рисунок 2.4, можно заключить, что SMA с увеличением числа наблюдений эффективность данного метода взвешивания падает по сравнению с остальными. AMA и BMA демонстрируют лучшую эффективность по сравнению с SMA, но проигрывают ISMA, MMA и MSFE. MSFE как и в первом плане эксперимента показывает схожую точность с ISMA и MMA при достаточной длине окна данных, но выигрывает у них при малом числе наблюдений.

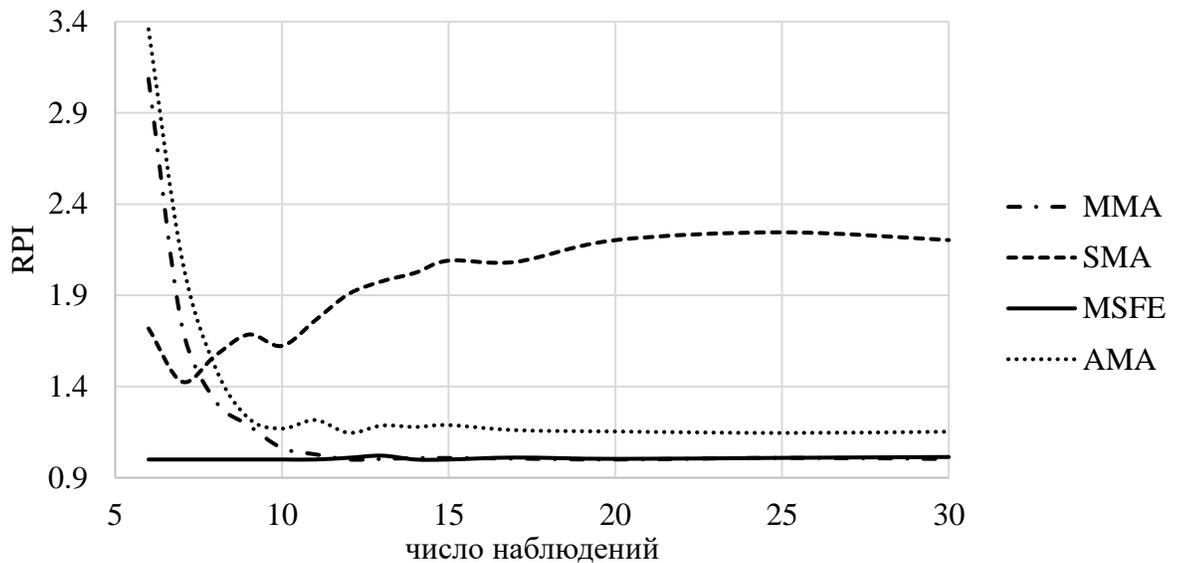
Теперь рассмотрим третий план эксперимента, в котором взвешиваются четыре регрессионных уравнения. Результаты расчетов приведены в таблице 2.3.

**Таблица 2.3** – Сравнение методов взвешивания моделей, план 3

$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA
6	1.749	1.389	0.773	<b>0.450</b>	1.519	1.511
7	0.523	0.503	0.414	<b>0.290</b>	0.363	0.610
8	0.315	0.290	0.345	<b>0.220</b>	0.330	0.331
9	0.269	0.234	0.332	<b>0.197</b>	0.243	0.242
10	0.205	0.200	0.305	<b>0.188</b>	0.221	0.220
11	0.175	0.170	0.292	<b>0.166</b>	0.204	0.201
12	0.149	<b>0.148</b>	0.283	0.150	0.170	0.170
13	<b>0.138</b>	<b>0.138</b>	0.272	0.141	0.165	0.163
14	0.131	0.130	0.261	<b>0.129</b>	0.153	0.152
15	0.125	0.123	0.255	<b>0.122</b>	0.144	0.145
17	<b>0.120</b>	0.121	0.250	0.121	0.141	0.139
20	0.115	<b>0.113</b>	0.248	<b>0.113</b>	0.136	0.130
25	<b>0.110</b>	0.111	0.247	0.111	0.134	0.126
30	<b>0.111</b>	<b>0.111</b>	0.244	0.112	0.130	0.128
50	<b>0.107</b>	<b>0.107</b>	0.240	<b>0.107</b>	0.124	0.123

Источник: составлено автором

Снова, как и в предыдущих двух случаях для анализа представленной в таблице 2.3 информации будем использовать показатель RPI. Его динамика для анализируемых методов согласно третьему плану эксперимента представлена на рисунке 2.5.

**Рисунок 2.5** – Относительная эффективность методов взвешивания, план 3

Источник: составлено автором

Из рисунка 2.5 видно, что выводы, сделанные по предыдущим двум планам проводимого эксперимента, применимы и в данном случае. Точно так же SMA демонстрирует худшую эффективность, затем идут АМА и ВМА, потом ISMA и ММА. Наиболее эффективным методом может считаться предложенный метод взвешивания на основе минимизации несмещенной оценки ожидаемой дисперсии ошибки прогноза (MSFE).

Далее перейдем к имитационному тестированию по плану, основанному на представленном в разделе 1.2 диссертационного исследования. Предположим, что имеется целевая переменная  $y_t$  и набор потенциальных объясняющих переменных  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}$ . В данных экспериментах будем полагать, что объясняющие переменные подчиняются нормальному распределению с нулевой средней и единичной дисперсией, а именно  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm} \sim N[E(x_{ti}) = 0, D(x_{ti}) = 1]$ . Также на данном этапе установим, что объясняющие переменные не мультиколлинеарны, то есть являются линейно независимыми друг от друга. Определим, что целевая переменная зависит только от первых четырех предикторов из сгенерированного набора данных, а остальные факторы не имеют никакой взаимосвязи с  $y_t$ . Таким образом,  $y_t$  будет вычисляться как показано в формуле (1.13). На основе сгенерированных данных проводится спецификация четырех уравнений регрессии: 1) Прямой отбор с критерием оптимальности ВИС; 2) Пошаговый отбор с критерием оптимальности MSE; 3) Отбор по остаточной корреляции с критерием оптимальности F-статистика; 4) Обратное исключение с критерием оптимальности MSE. Каждый из способов спецификации строит свою модель, при этом модели могут быть как различными, так и одинаковыми (если включаются одни и те же факторы). Для проведения сравнительного анализа способов спецификации и способов взвешивания моделей поставим несколько имитационных экспериментов при различном числе наблюдений  $n$  и количестве объясняющих переменных  $m$ . Для получения расчетных значений по каждому из способов спецификации и взвешивания использовалось 10

000 итераций. Сравнительный анализ результатов по аналогии с описанным выше экспериментом проводится путем расчета и сравнения индекса относительной эффективности (RPI) рассматриваемых методов. Результаты эксперимента при  $m = 4$  приведены в таблице 2.4.

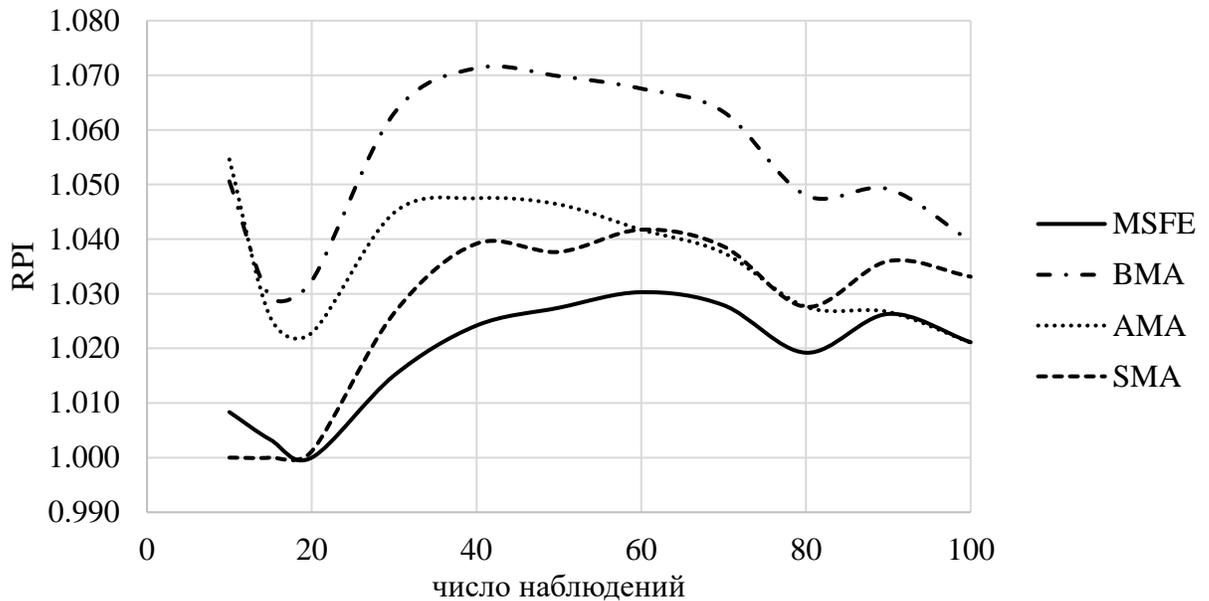
**Таблица 2.4** – Сравнение методов взвешивания моделей,  $m = 4$ .

$n$	MSFE	BMA	AMA	SMA	BIC (прямой отбор)	MSE (пошаговый отбор)	F-статистика (остаточная корреляция)	MSE (обратное исключение)
10	1.008	1.051	1.055	<b>1.000</b>	1.075	1.040	1.000	1.212
15	1.003	1.029	1.026	<b>1.000</b>	1.059	1.060	1.046	1.057
20	<b>1.000</b>	1.032	1.023	1.001	1.057	1.059	1.064	1.009
30	1.015	1.063	1.045	1.026	1.085	1.082	1.116	<b>1.000</b>
40	1.024	1.071	1.047	1.039	1.092	1.086	1.160	<b>1.000</b>
50	1.027	1.070	1.046	1.038	1.093	1.079	1.166	<b>1.000</b>
60	1.030	1.068	1.042	1.042	1.091	1.067	1.195	<b>1.000</b>
70	1.028	1.063	1.037	1.039	1.087	1.059	1.191	<b>1.000</b>
80	1.019	1.048	1.028	1.028	1.069	1.044	1.178	<b>1.000</b>
90	1.026	1.049	1.027	1.036	1.067	1.042	1.216	<b>1.000</b>
100	1.021	1.040	1.021	1.033	1.057	1.034	1.216	<b>1.000</b>
Mean	<b>1.018</b>	1.053	1.036	1.026	1.076	1.059	1.141	1.025

Источник: составлено автором

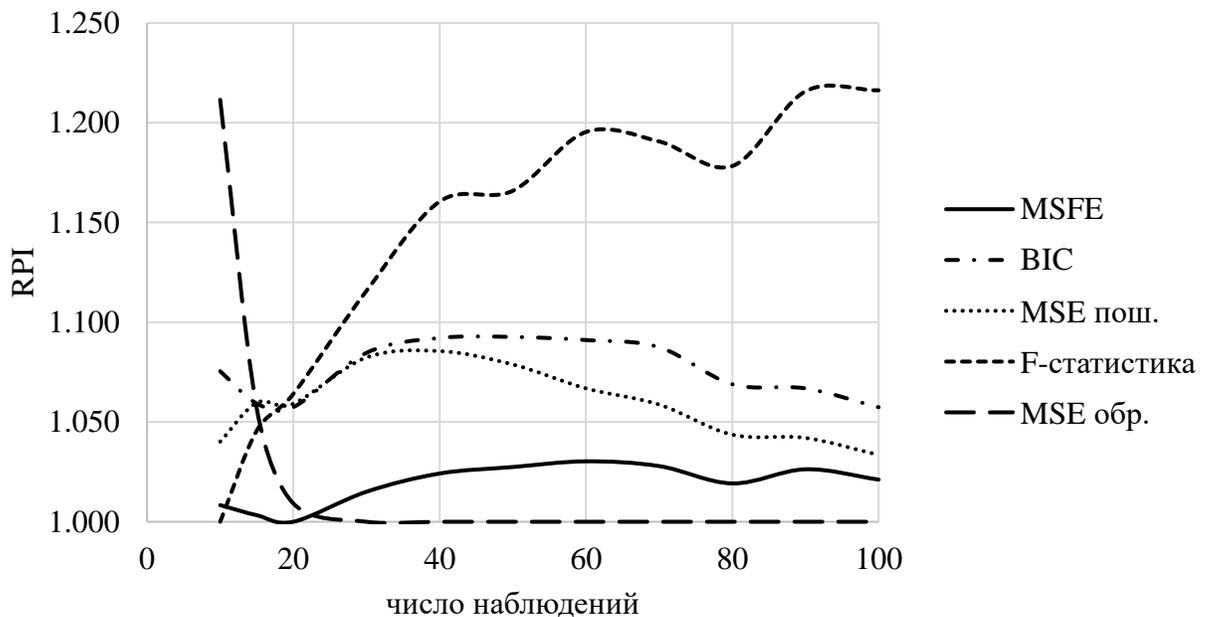
На рисунке 2.6 представлена графическая визуализация относительной эффективности методов взвешивания, а на рисунке 2.7 – демонстрируется относительная эффективность предлагаемого метода взвешивания и рассматриваемых способов спецификации регрессионного уравнения. Как видно из рисунка 2.6, MSFE взвешивание работает лучше остальных методов за исключением случая  $n = 10$ , где он незначительно уступает простой средней. AMA показывает более высокую точность по сравнению с BMA, но в среднем уступает SMA. На рисунке 2.7 можно видеть, что предлагаемый метод взвешивания моделей при всех рассматриваемых значениях  $n$  демонстрирует более высокую точность прогноза по сравнению с первыми тремя способами спецификации. MSFE незначительно

проигрывает методу обратного исключения с критерием оптимальности MSE при достаточно длинном окне наблюдений, но значительно выигрывает при коротком.



**Рисунок 2.6** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 4$

Источник: составлено автором



**Рисунок 2.7** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 4$

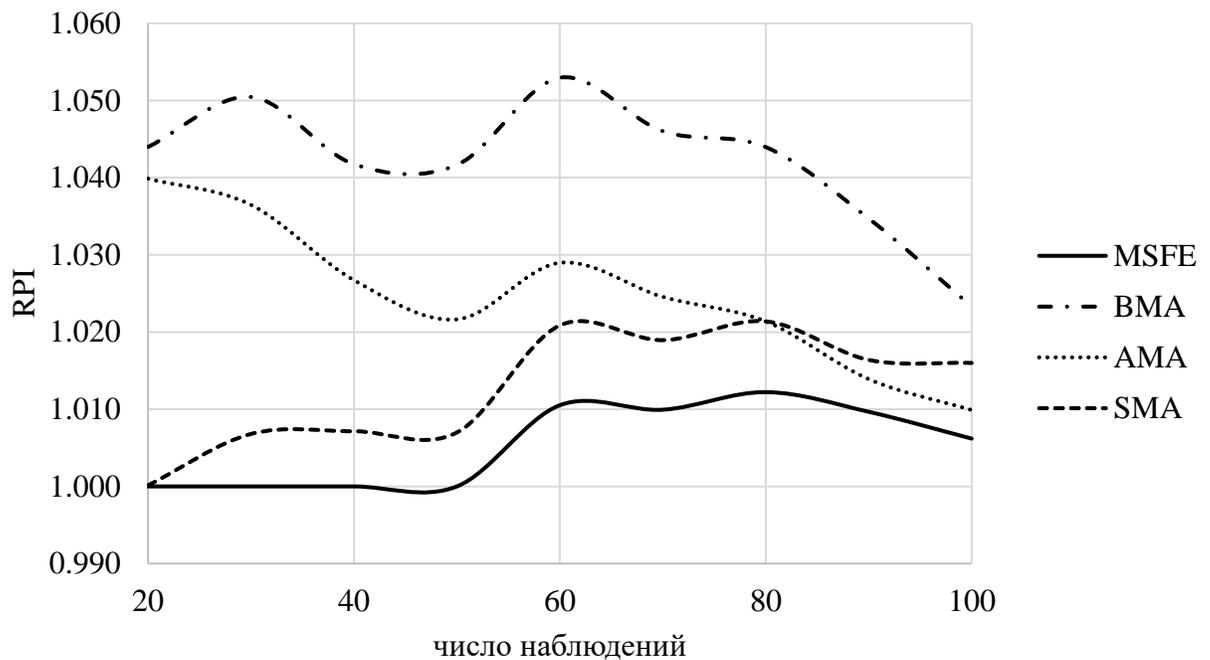
Источник: составлено автором

В таблице 2.5 представлены результаты имитационного эксперимента при количестве потенциальных объясняющих переменных равном шести при условии, что только первые четыре переменные являются истинно значимыми.

**Таблица 2.5** – Сравнение методов взвешивания моделей,  $m = 6$ .

$n$	MSFE	BMA	AMA	SMA	BIC (прямой отбор)	MSE (пошаговый отбор)	F-статистика (остаточная корреляция)	MSE (обратное исключение)
20	<b>1.000</b>	1.044	1.040	1.000	1.073	1.071	1.053	1.094
30	<b>1.000</b>	1.050	1.036	1.007	1.071	1.068	1.075	1.030
40	<b>1.000</b>	1.042	1.027	1.007	1.060	1.058	1.100	1.016
50	<b>1.000</b>	1.042	1.022	1.007	1.064	1.047	1.118	1.001
60	1.011	1.053	1.029	1.021	1.073	1.055	1.163	<b>1.000</b>
70	1.010	1.046	1.025	1.019	1.065	1.044	1.170	<b>1.000</b>
80	1.012	1.044	1.021	1.021	1.063	1.040	1.184	<b>1.000</b>
90	1.010	1.035	1.014	1.016	1.050	1.027	1.180	<b>1.000</b>
100	1.006	1.023	1.010	1.016	1.035	1.021	1.184	<b>1.000</b>
Mean	<b>1.005</b>	1.042	1.025	1.013	1.062	1.048	1.136	1.016

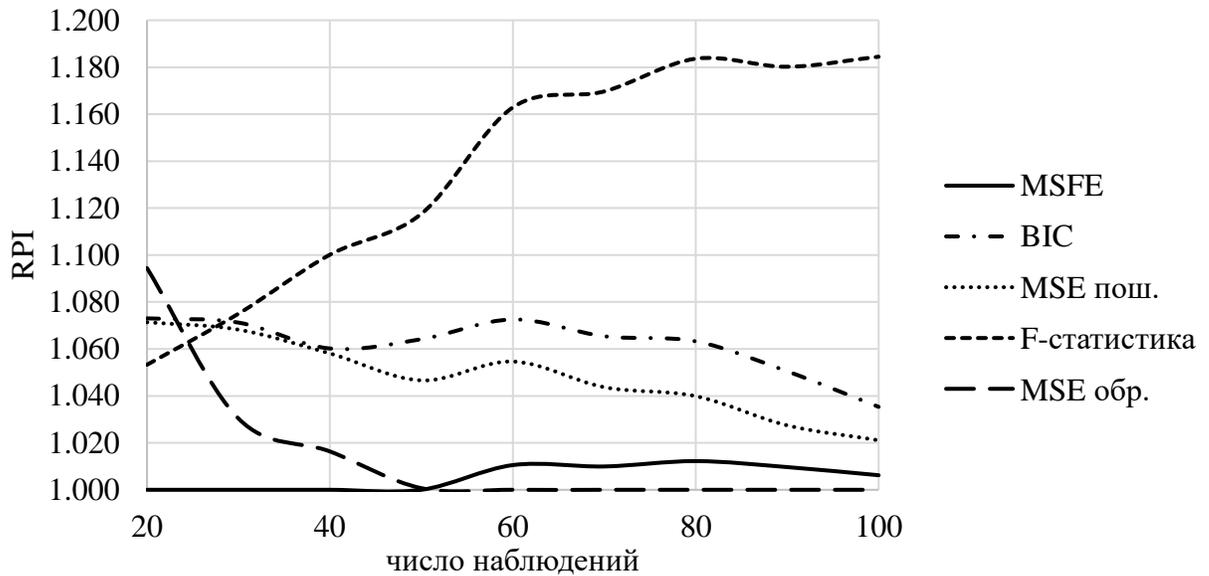
Источник: составлено автором



**Рисунок 2.8** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 6$

Источник: составлено автором

Как видно из рисунка 2.8, предлагаемый в диссертационной работе метод взвешивания моделей при любом из рассматриваемых значений  $n$  демонстрирует лучшую эффективность по сравнению с ВМА, АМА и SMA для случая  $m = 6$ . ВМА как и при  $m = 4$  является явным аутсайдером. Затем следуют методы АМА и SMA, причем SMA значительно превосходит АМА в условиях короткого окна данных.



**Рисунок 2.9** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 6$

Источник: составлено автором

Анализируя рисунок 2.9 можно заключить, что как и в предыдущем случае MSFE взвешивание работает лучше первых трех способов спецификации, взятых по отдельности, однако при большом количестве наблюдений незначительно уступает методу обратного исключения с критерием оптимальности MSE, однако значительно выигрывает у данного метода при малом окне наблюдений. Наихудшим способом спецификации в данном случае является отбор по остаточной корреляции с критерием оптимальности F-статистика.

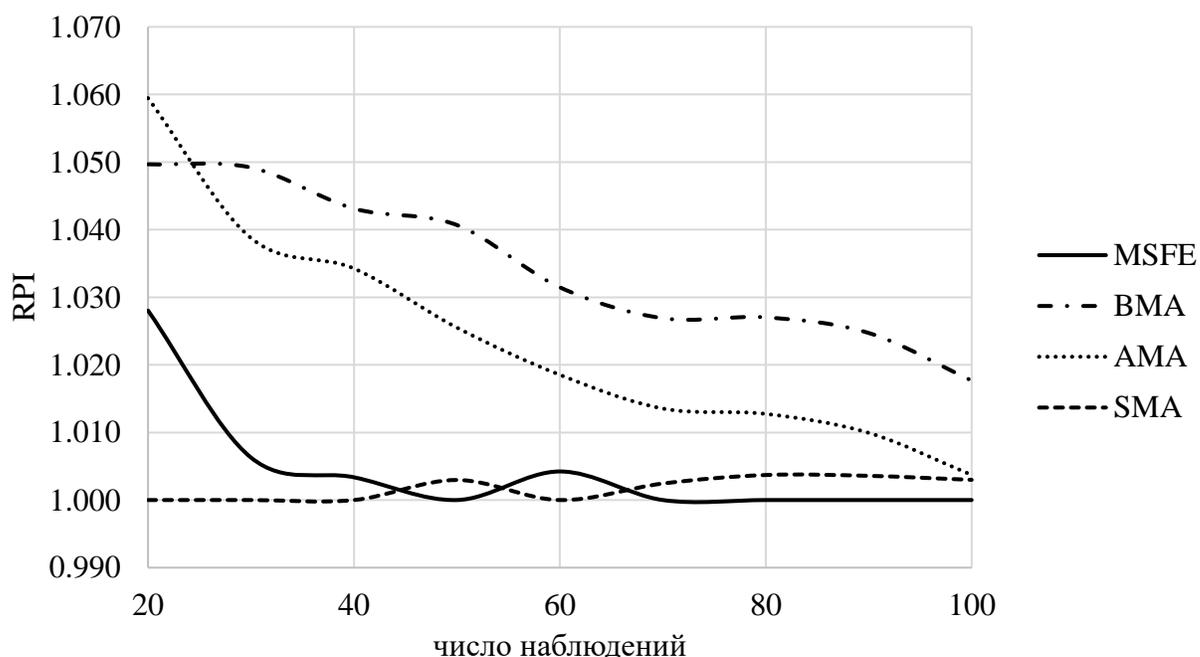
Заключительным планом в данном эксперименте является случай, когда количество потенциальных объясняющих переменных равно девяти при условии, что

только первые четыре переменные являются истинно значимыми. Результаты, полученные в результате реализации данного плана имитационного эксперимента представлены в таблице 2.6 и рисунках 2.10, 2.11.

**Таблица 2.6** – Сравнение методов взвешивания моделей,  $m = 9$ .

$n$	MSFE	BMA	AMA	SMA	BIC (прямой отбор)	MSE (пошаговый отбор)	F-статистика (остаточная корреляция)	MSE (обратное исключение)
20	1.028	1.050	1.059	<b>1.000</b>	1.072	1.069	1.043	1.280
30	1.006	1.049	1.039	<b>1.000</b>	1.066	1.066	1.075	1.106
40	1.003	1.043	1.034	<b>1.000</b>	1.062	1.060	1.087	1.067
50	<b>1.000</b>	1.041	1.026	1.003	1.058	1.048	1.116	1.037
60	1.004	1.031	1.019	<b>1.000</b>	1.047	1.037	1.120	1.033
70	<b>1.000</b>	1.027	1.014	1.002	1.041	1.028	1.136	1.024
80	<b>1.000</b>	1.027	1.013	1.004	1.039	1.028	1.153	1.010
90	<b>1.000</b>	1.025	1.010	1.004	1.037	1.020	1.150	1.016
100	<b>1.000</b>	1.018	1.004	1.003	1.031	1.013	1.166	1.005
Mean	1.005	1.034	1.024	<b>1.002</b>	1.050	1.041	1.116	1.064

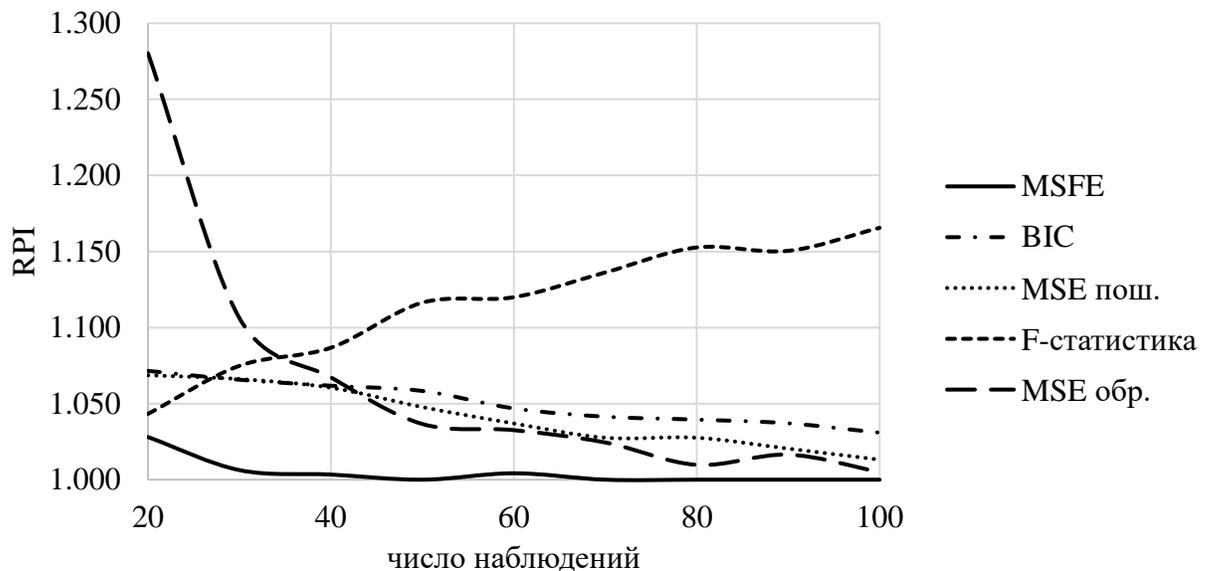
Источник: составлено автором



**Рисунок 2.10** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 9$

Источник: составлено автором

Как можно видеть из рисунка 2.10, при незначительном превосходстве числа наблюдений над числом потенциальных предикторов простая средняя демонстрирует наилучшую точность прогноза, однако при большем окне данных уступает предлагаемому методу взвешивания. ВМА и АМА в данном случае являются явными аутсайдерами.



**Рисунок 2.11** – Относительная эффективность методов взвешивания,  $m = 9$

Источник: составлено автором

Анализируя рисунок 2.11 можно заключить, что предлагаемый метод MSFE взвешивания превосходит по точности прогнозирования каждый из способов спецификации уравнения регрессии по отдельности при любом из рассматриваемых  $n$ . Отбор по остаточной корреляции с критерием оптимальности F-статистика работает лучше всего при коротком окне данных, но сильно уступает в точности при большом количестве наблюдений. В противовес данному методу идет отбор путем обратного исключения с критерием оптимальности MSE, который показывает низкую эффективность при коротком окне данных и высокую при длинном.

Подводя итоги данного имитационного эксперимента, можно сказать, что в среднем разрабатываемый метод MSFE взвешивания регрессионных моделей

является более эффективным по сравнению как с альтернативными методами взвешивания, так и с каждым отдельно взятым способом спецификации регрессионных моделей. В целом методы взвешивания работают лучше способов спецификации по отдельности. Простое взвешивание демонстрирует наилучшую эффективность при повышенной неопределенности, когда число наблюдений незначительно превышает число потенциальных объясняющих переменных, в то время как способ обратного исключения с критерием оптимальности MSE превосходит другие методы при значительной длине окна наблюдений.

Для подтверждения эффективности разработанного метода помимо имитационных экспериментов проведем также эмпирическое тестирование на реальных макроэкономических данных. Проанализируем следующие макроэкономические индикаторы различных стран: Индекс Потребительских Цен (англ. Consumer Price Index, CPI) в США (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные), ИПЦ в Японии (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные), ИПЦ в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные), денежный агрегат М2 в США (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные), безработица в США (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные), денежный агрегат М2 в Японии (Q1.1955-Q2.2019, квартальные данные) и безработица в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные). В данном эксперименте рассмотрим модели авторегрессии разного порядка для построения четырех уравнений для проведения процедуры взвешивания. Для того, чтобы данные переменные были стационарны преобразуем показатели безработицы в разности первого порядка, а ИПЦ и М2 конвертируем в темпы прироста согласно следующей формуле:

$$I\%_t = \left( \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (2.48)$$

Таким образом, получим четыре уравнения для взвешивания:

$$1). I\%_t = b_{01} + b_{11}I\%_{t-1} + b_{21}I\%_{t-2} + b_{31}I\%_{t-3} + b_{41}I\%_{t-4} + e_{1t},$$

$$2). I\%_t = b_{02} + b_{12}I\%_{t-1} + b_{22}I\%_{t-2} + b_{32}I\%_{t-3} + e_{2t},$$

$$3). I\%_t = b_{03} + b_{13}I\%_{t-1} + b_{23}I\%_{t-2} + e_{3t},$$

$$4). I\%_t = b_{04} + b_{14}I\%_{t-1} + e_{4t}.$$

По аналогии с тем, как это было сделано выше, будем проводить сравнительный анализ способов взвешивания регрессионных моделей с помощью вычисления индекса их относительной эффективности при различной длине окна наблюдений. Также добавим к сравнению каждую из взвешиваемых моделей по отдельности. Результаты для временного ряда ИПЦ США представлены в таблице 2.7.

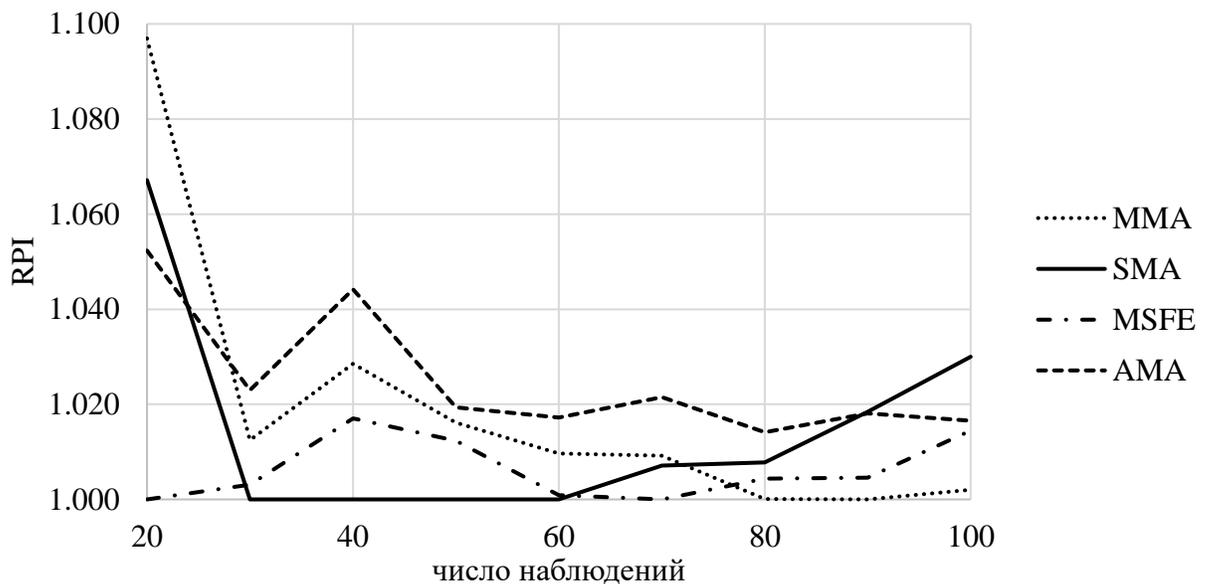
**Таблица 2.7** – Сравнение методов взвешивания моделей, ИПЦ США

<i>n</i>	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	<i>m</i> = 4	<i>m</i> = 3	<i>m</i> = 2	<i>m</i> = 1
10	2.054	1.368	1.322	1.091	1.170	1.194	2.150	1.502	1.319	<b>1.000</b>
15	1.550	1.278	1.175	1.096	1.081	1.121	1.597	1.356	1.157	<b>1.000</b>
20	1.217	1.097	1.067	<b>1.000</b>	1.038	1.052	1.238	1.185	1.097	1.015
30	1.045	1.012	<b>1.000</b>	1.003	1.027	1.023	1.055	1.044	1.032	1.036
40	1.030	1.029	<b>1.000</b>	1.017	1.048	1.044	1.038	1.029	1.039	1.049
50	1.039	1.016	<b>1.000</b>	1.012	1.024	1.019	1.047	1.029	1.027	1.026
60	1.007	1.010	<b>1.000</b>	1.001	1.029	1.017	1.012	1.035	1.033	1.045
70	1.007	1.009	1.007	<b>1.000</b>	1.040	1.021	1.012	1.039	1.055	1.063
80	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	1.008	1.004	1.026	1.014	1.005	1.036	1.061	1.070
90	1.005	<b>1.000</b>	1.018	1.005	1.013	1.018	1.010	1.056	1.074	1.066
100	<b>1.000</b>	1.002	1.030	1.014	1.006	1.017	1.003	1.066	1.092	1.093
Mean	1.178	1.075	1.057	<b>1.022</b>	1.045	1.049	1.197	1.125	1.090	1.042

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Как видно из таблицы 2.7, предлагаемый метод MSFE взвешивания в среднем демонстрирует более высокую эффективность по сравнению как с остальными

методами взвешивания, так и с каждой отдельно взятой взвешиваемой моделью. Несмотря на то, что предлагаемый метод является лучшим лишь в двух случаях из десяти, в остальных он показывает эффективность, близкую к наилучшей, в среднем превышая минимальную среднеквадратическую реализованную ошибку прогноза на 2.2%. Для визуализации относительной точности прогнозов, полученных по рассматриваемым методам, приведем графическое изображение динамики индекса относительной эффективности в зависимости от длины окна наблюдений (см. рисунок 2.12 и 2.13).

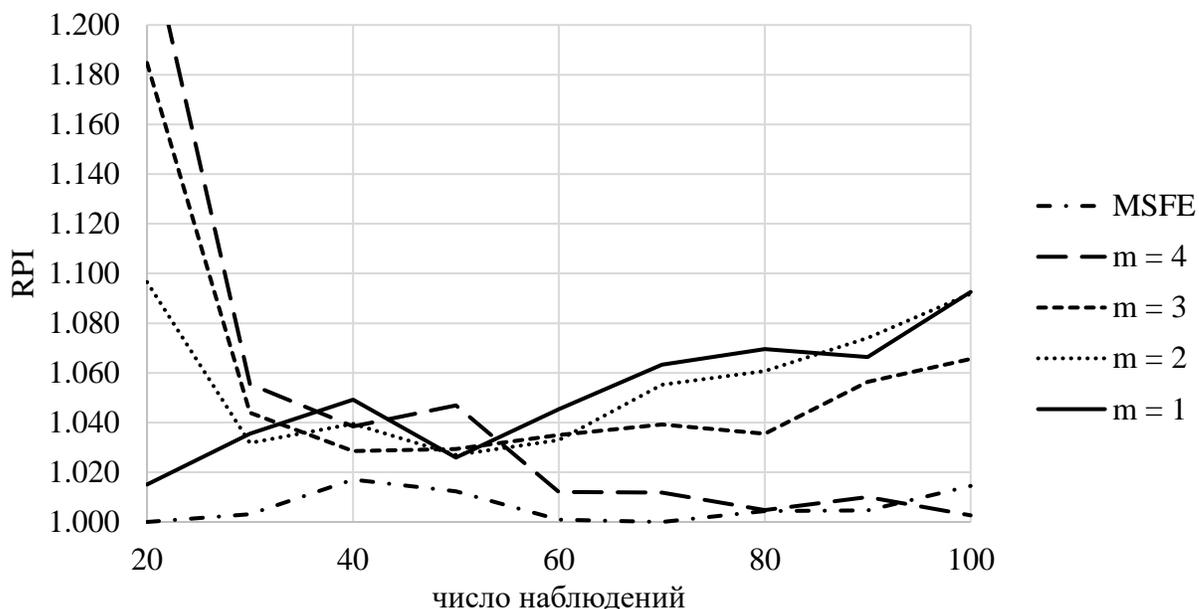


**Рисунок 2.12** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

Из рисунков 2.11 и 2.12 видно, что предлагаемый метод взвешивания незначительно уступает SMA при числе наблюдений 30-60 и методу MMA при длине окна данных 80-100. В случае сравнения MSFE со взвешиваемыми моделями, то тут предлагаемый метод однозначно превосходит каждую из них. Можно также отметить,

что в целом методы взвешивания демонстрируют более высокую эффективность, чем отдельно взятые модели.



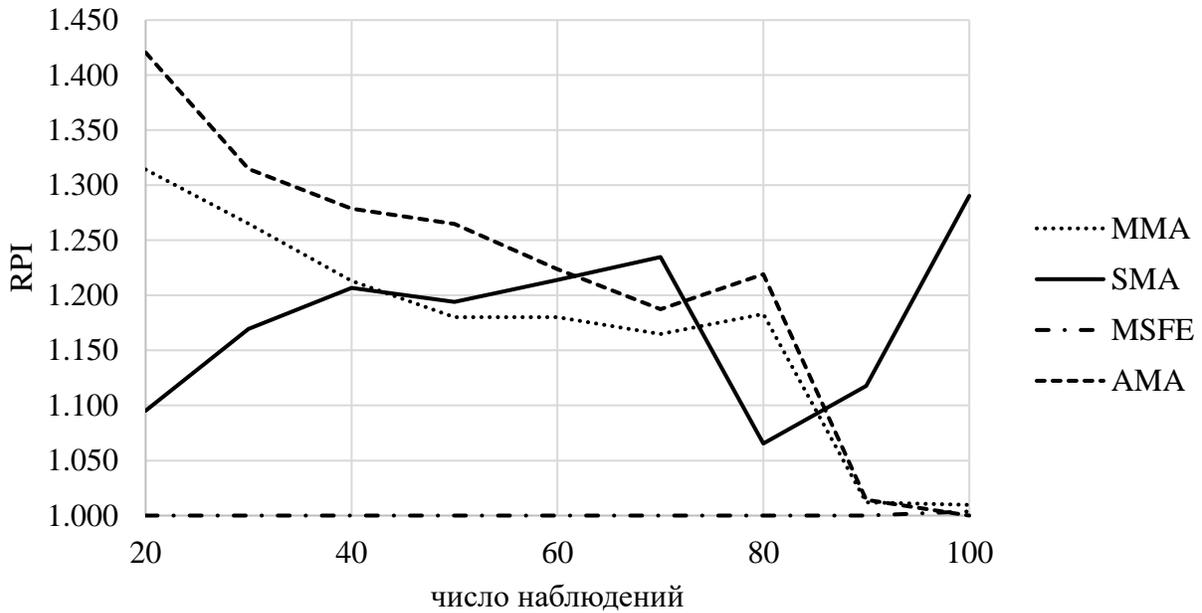
**Рисунок 2.13** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США (англ. U.S. Bureau of Labor Statistics)

**Таблица 2.8** – Сравнение методов взвешивания моделей, ИПЦ Великобритании

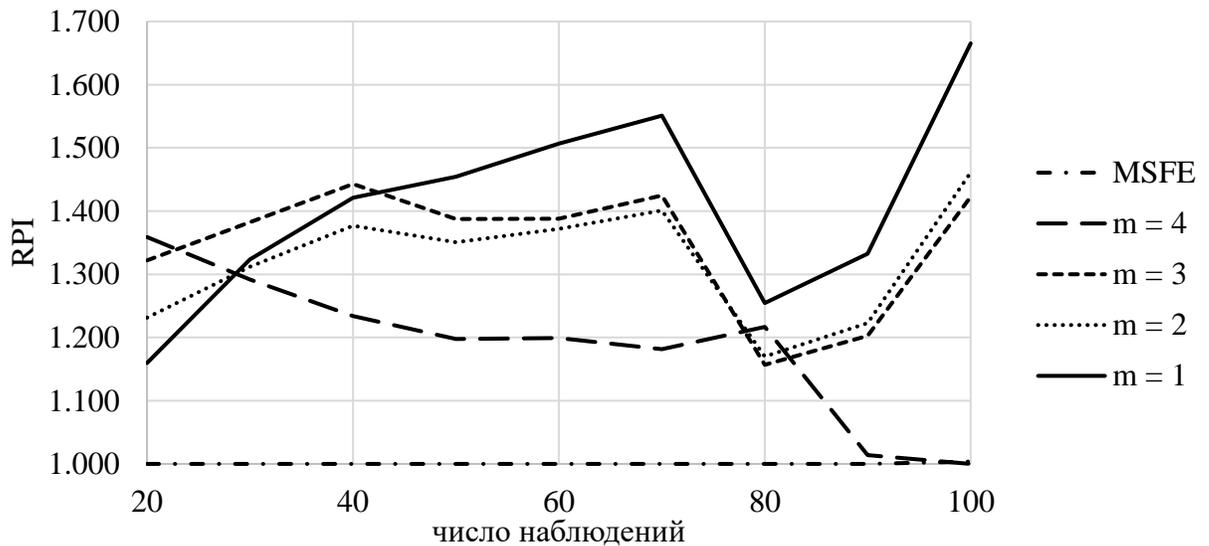
<i>n</i>	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	<i>m</i> = 4	<i>m</i> = 3	<i>m</i> = 2	<i>m</i> = 1
10	1.610	1.434	1.088	1.036	1.403	1.423	1.701	1.483	1.201	<b>1.000</b>
15	1.391	1.350	1.016	1.038	1.488	1.463	1.458	1.240	1.115	<b>1.000</b>
20	1.307	1.314	1.095	<b>1.000</b>	1.458	1.421	1.359	1.322	1.231	1.160
30	1.255	1.265	1.169	<b>1.000</b>	1.338	1.315	1.292	1.382	1.312	1.323
40	1.203	1.213	1.207	<b>1.000</b>	1.289	1.279	1.234	1.443	1.377	1.421
50	1.171	1.180	1.194	<b>1.000</b>	1.300	1.265	1.198	1.387	1.351	1.454
60	1.175	1.180	1.214	<b>1.000</b>	1.297	1.224	1.199	1.388	1.372	1.507
70	1.160	1.165	1.235	<b>1.000</b>	1.232	1.188	1.182	1.425	1.401	1.551
80	1.183	1.183	1.065	<b>1.000</b>	1.235	1.219	1.217	1.157	1.170	1.254
90	1.012	1.012	1.118	<b>1.000</b>	1.020	1.014	1.014	1.203	1.223	1.332
100	1.010	1.010	1.290	1.004	1.001	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	1.423	1.461	1.665
Mean	1.225	1.210	1.154	<b>1.007</b>	1.278	1.255	1.259	1.350	1.292	1.334

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.13** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.14** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ Великобритании

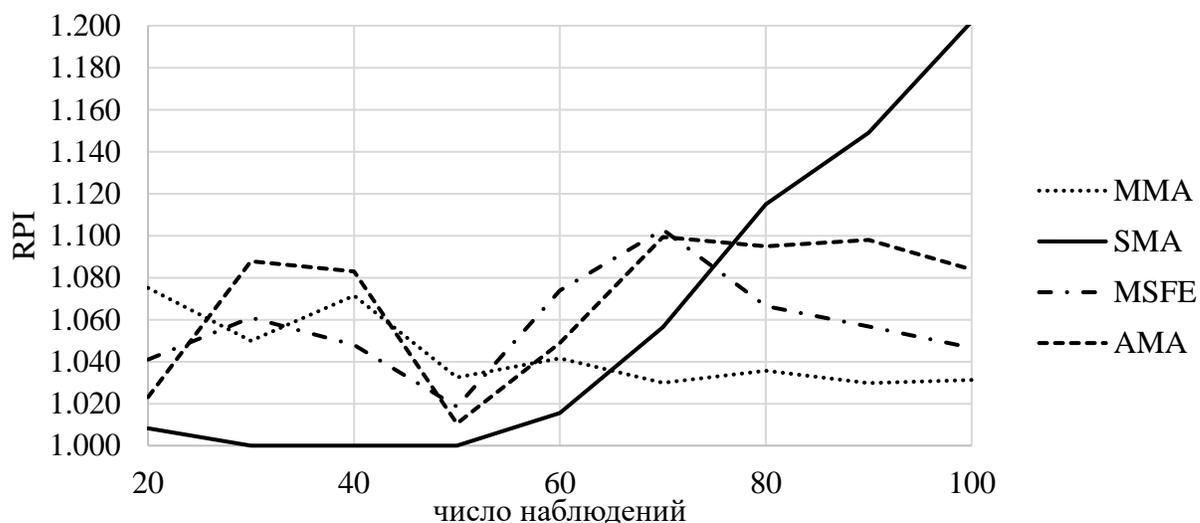
Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития

Таблица 2.8 и рисунки 2.13, 2.14 посвящены результатам эксперимента по ИПЦ Великобритании. Здесь можно наблюдать подавляющее превосходство предлагаемого метода как над другими методами взвешивания, так и над каждой из взвешиваемых моделей по отдельности.

**Таблица 2.9** – Сравнение методов взвешивания моделей, ИПЦ Японии

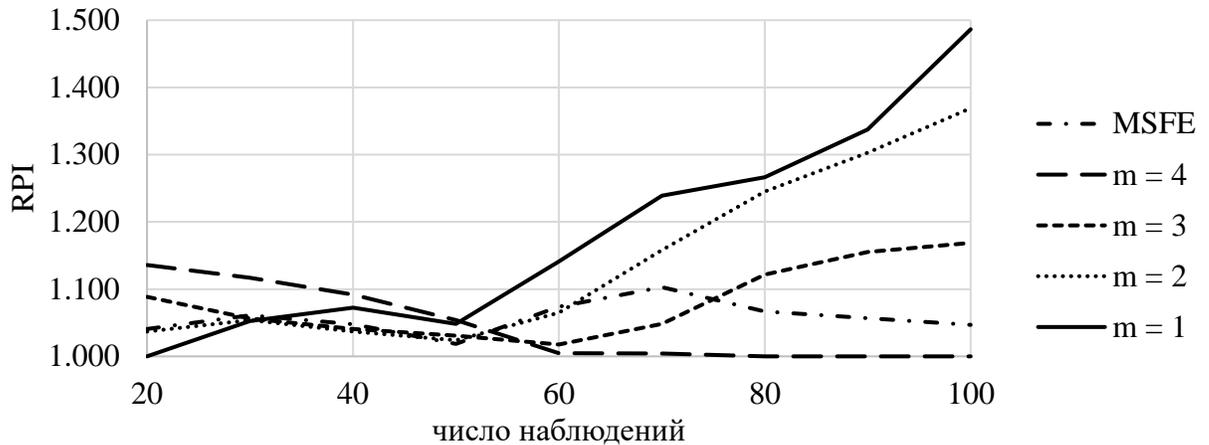
$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$
10	1.701	1.264	1.194	1.088	1.079	1.094	1.760	1.341	1.217	<b>1.000</b>
15	1.308	1.116	1.074	1.040	1.023	1.037	1.336	1.161	1.080	<b>1.000</b>
20	1.118	1.075	1.008	1.041	1.010	1.023	1.136	1.088	1.037	<b>1.000</b>
30	1.094	1.050	<b>1.000</b>	1.061	1.075	1.088	1.117	1.057	1.054	1.052
40	1.075	1.072	<b>1.000</b>	1.048	1.074	1.083	1.092	1.041	1.037	1.072
50	1.044	1.032	<b>1.000</b>	1.019	1.026	1.011	1.054	1.031	1.024	1.048
60	<b>1.000</b>	1.042	1.016	1.074	1.084	1.049	1.005	1.018	1.065	1.141
70	<b>1.000</b>	1.030	1.056	1.103	1.147	1.099	1.004	1.048	1.158	1.239
80	1.003	1.036	1.115	1.067	1.139	1.095	<b>1.000</b>	1.122	1.245	1.267
90	1.006	1.030	1.149	1.057	1.167	1.098	<b>1.000</b>	1.155	1.303	1.337
100	1.012	1.031	1.202	1.047	1.192	1.084	<b>1.000</b>	1.169	1.369	1.486
Mean	1.124	1.071	1.074	<b>1.058</b>	1.092	1.069	1.137	1.112	1.144	1.149

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.15** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.16** – Относительная эффективность методов взвешивания, ИПЦ Японии

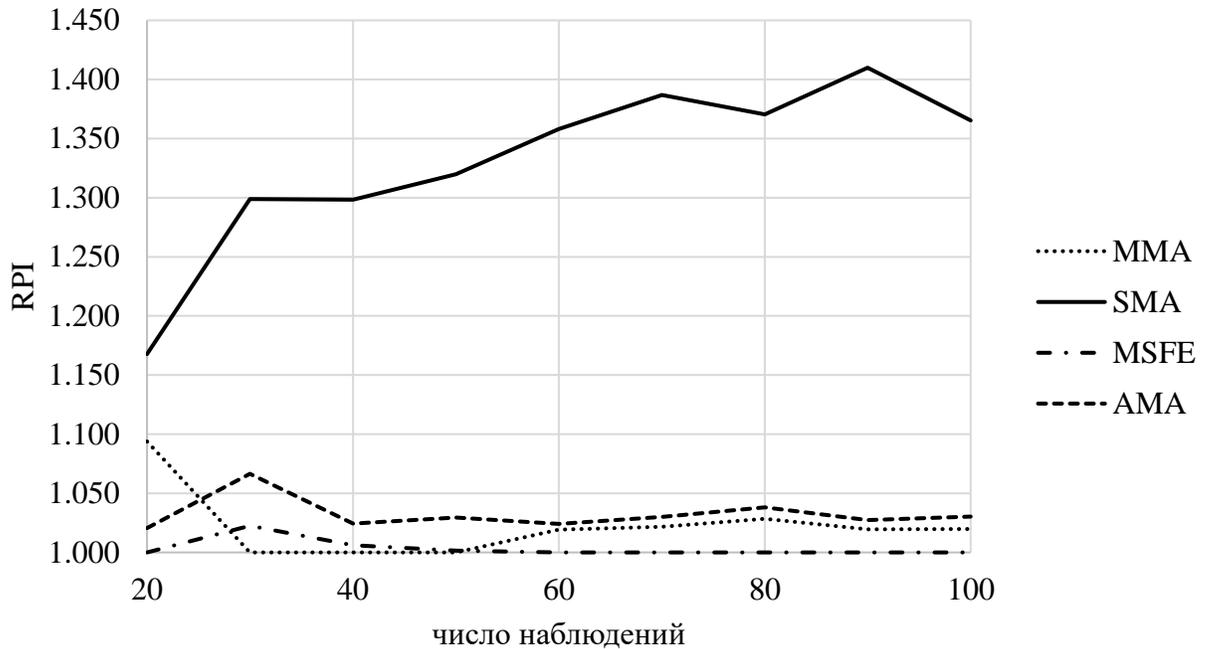
Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития

В таблице 2.9 и на рисунках 2.15, 2.16 представлены результаты эмпирического тестирования для ИПЦ Японии. В данном случае предлагаемый метод взвешивания уступает SMA при коротком окне данных и MMA при длинном. Однако в среднем показывает лучшую эффективность.

**Таблица 2.10** – Сравнение методов взвешивания моделей, денежный агрегат M2 США

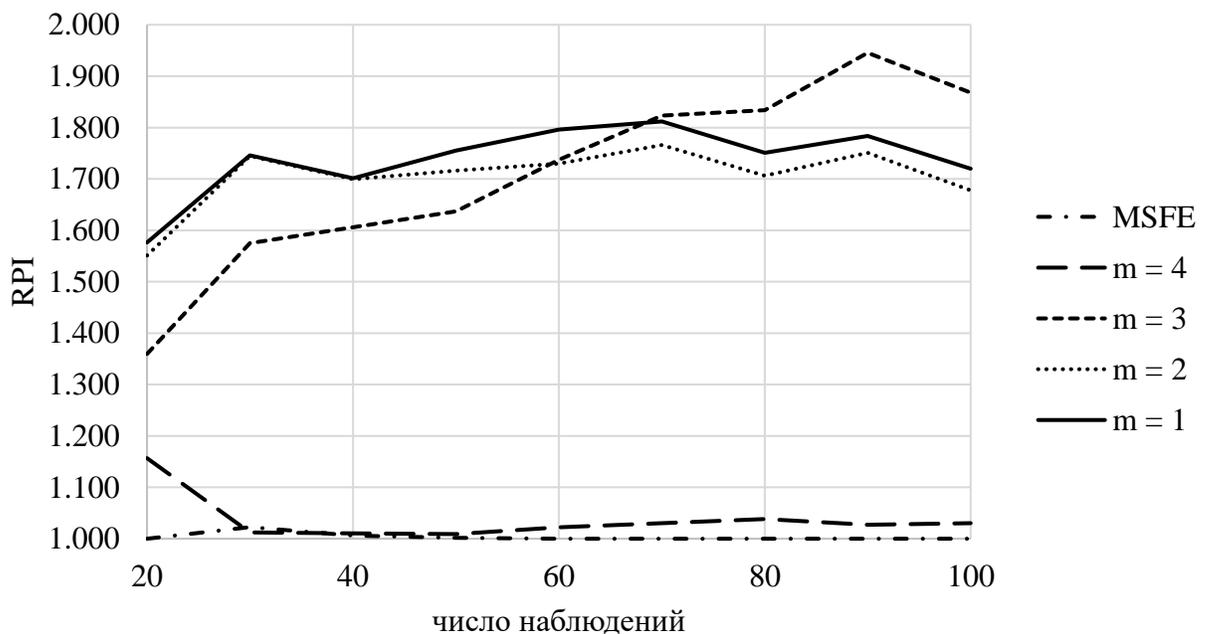
$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$
10	1.497	1.313	<b>1.000</b>	1.146	1.238	1.229	1.578	1.176	1.257	1.204
15	1.352	1.253	<b>1.000</b>	1.064	1.189	1.206	1.417	1.118	1.277	1.248
20	1.125	1.094	1.168	<b>1.000</b>	1.041	1.021	1.157	1.359	1.551	1.576
30	1.004	<b>1.000</b>	1.299	1.023	1.098	1.066	1.013	1.575	1.745	1.746
40	1.003	<b>1.000</b>	1.298	1.006	1.085	1.024	1.011	1.606	1.699	1.702
50	1.002	<b>1.000</b>	1.320	1.002	1.057	1.030	1.009	1.637	1.716	1.755
60	1.015	1.019	1.358	<b>1.000</b>	1.049	1.024	1.022	1.737	1.730	1.796
70	1.022	1.022	1.387	<b>1.000</b>	1.032	1.030	1.030	1.823	1.766	1.812
80	1.028	1.028	1.370	<b>1.000</b>	1.038	1.038	1.038	1.834	1.706	1.751
90	1.020	1.020	1.410	<b>1.000</b>	1.027	1.027	1.027	1.945	1.751	1.784
100	1.020	1.020	1.365	<b>1.000</b>	1.030	1.030	1.030	1.868	1.678	1.720
Mean	1.099	1.070	1.271	<b>1.022</b>	1.080	1.066	1.121	1.607	1.625	1.645

Источник: составлено автором на основе данных Совета управляющих Федеральной резервной системы США



**Рисунок 2.17** – Относительная эффективность методов взвешивания, M2 США

Источник: составлено автором на основе данных Совета управляющих Федеральной резервной системы США



**Рисунок 2.18** – Относительная эффективность методов взвешивания, M2 США

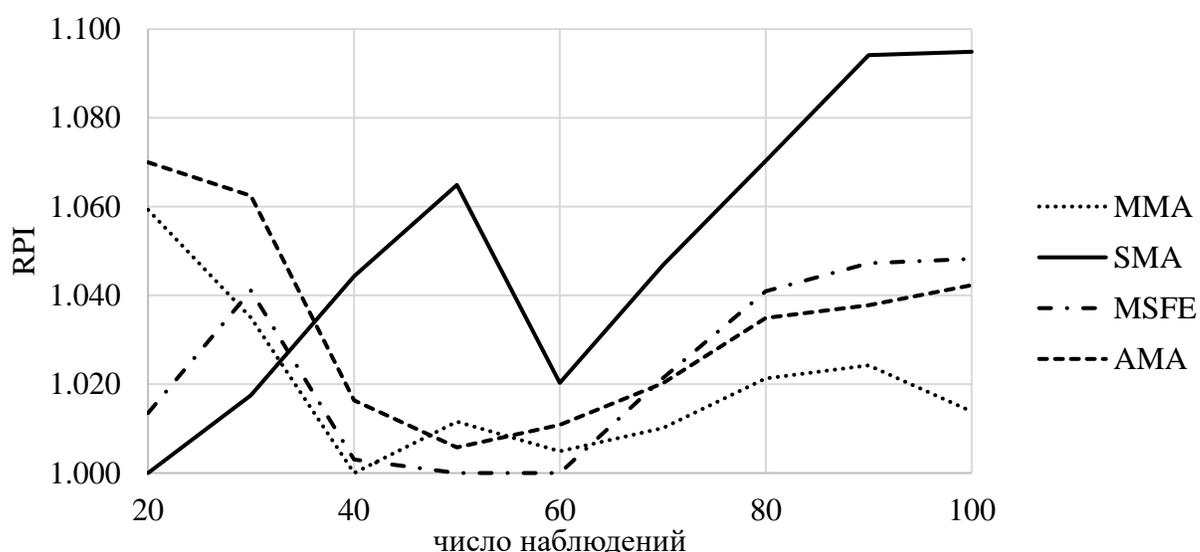
Источник: составлено автором на основе данных Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Таблица 2.10 и рисунки 2.17, 2.18 демонстрируют сравнение точности полученных прогнозов для денежного агрегата М2 США. В данном случае MSFE взвешивание почти однозначно превосходит по точности другие анализируемые методы и взвешиваемые модели.

**Таблица 2.11** – Сравнение методов взвешивания моделей, безработица США

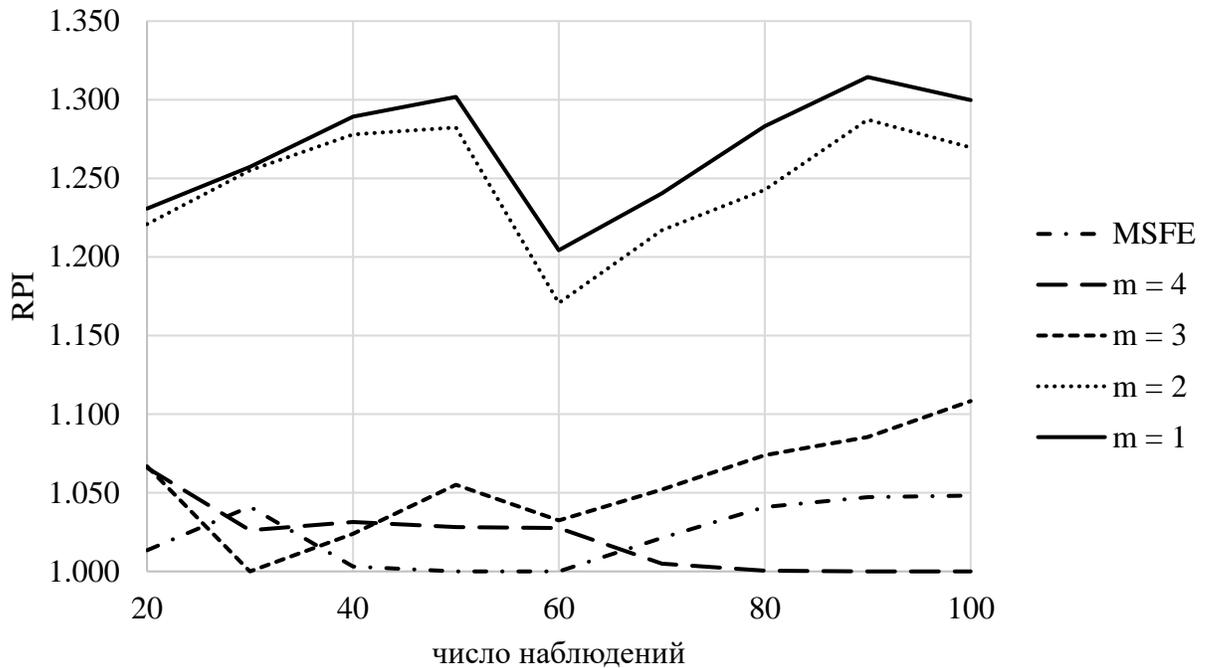
<i>n</i>	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	<i>m</i> = 4	<i>m</i> = 3	<i>m</i> = 2	<i>m</i> = 1
10	1.830	1.593	1.117	<b>1.000</b>	1.257	1.315	1.946	1.538	1.400	1.180
15	1.193	1.159	<b>1.000</b>	1.039	1.172	1.178	1.237	1.163	1.235	1.189
20	1.043	1.059	<b>1.000</b>	1.013	1.077	1.070	1.066	1.067	1.221	1.231
30	1.014	1.035	1.017	1.041	1.105	1.062	1.026	<b>1.000</b>	1.255	1.257
40	1.019	<b>1.000</b>	1.044	1.003	1.051	1.016	1.031	1.024	1.278	1.289
50	1.023	1.012	1.065	<b>1.000</b>	1.017	1.006	1.028	1.055	1.282	1.302
60	1.018	1.005	1.020	<b>1.000</b>	1.015	1.011	1.028	1.033	1.171	1.204
70	<b>1.000</b>	1.010	1.047	1.021	1.029	1.020	1.005	1.052	1.217	1.241
80	<b>1.000</b>	1.021	1.070	1.041	1.047	1.035	<b>1.000</b>	1.074	1.243	1.283
90	1.001	1.024	1.094	1.047	1.051	1.038	<b>1.000</b>	1.085	1.287	1.314
100	1.001	1.014	1.095	1.048	1.069	1.042	<b>1.000</b>	1.108	1.270	1.300
Mean	1.104	1.085	1.052	<b>1.023</b>	1.081	1.072	1.124	1.109	1.260	1.254

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США



**Рисунок 2.19** – Относительная эффективность методов взвешивания, безработица США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США



**Рисунок 2.20** – Относительная эффективность методов взвешивания, безработица США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США

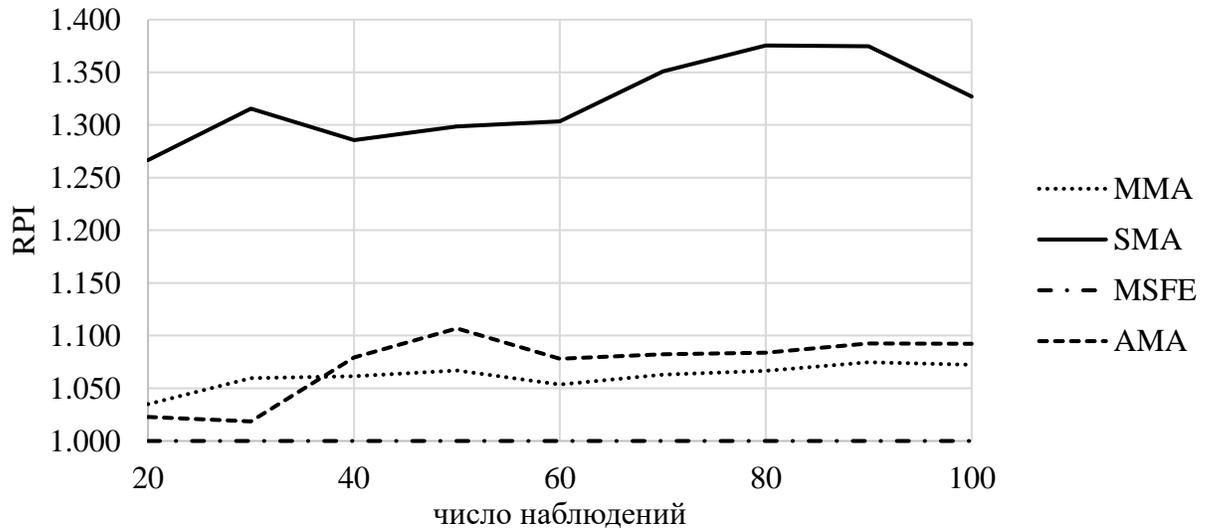
Судя по результатам эксперимента, представленным в таблице 2.11 и на рисунках 2.19, 2.20, предлагаемый метод MSFE взвешивания демонстрирует в среднем наилучшую эффективность, однако при длинном окне данных уступает в точности ММА, АМА и модели с четырьмя объясняющими переменными.

**Таблица 2.12** – Сравнение методов взвешивания моделей, денежный агрегат M2 Японии

$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$
10	1.126	<b>1.000</b>	1.062	1.070	1.098	1.079	1.167	1.193	1.688	1.712
15	1.153	1.067	1.306	<b>1.000</b>	1.026	1.022	1.182	1.438	2.169	2.169
20	1.093	1.035	1.267	<b>1.000</b>	1.009	1.023	1.117	1.532	1.911	1.912
30	1.066	1.060	1.316	<b>1.000</b>	1.011	1.019	1.083	1.523	1.951	1.974
40	1.058	1.061	1.286	<b>1.000</b>	1.040	1.079	1.071	1.534	1.834	1.847
50	1.057	1.067	1.299	<b>1.000</b>	1.103	1.107	1.073	1.636	1.800	1.789
60	1.052	1.054	1.304	<b>1.000</b>	1.097	1.078	1.069	1.790	1.727	1.673
70	1.062	1.063	1.351	<b>1.000</b>	1.091	1.082	1.080	1.914	1.770	1.687

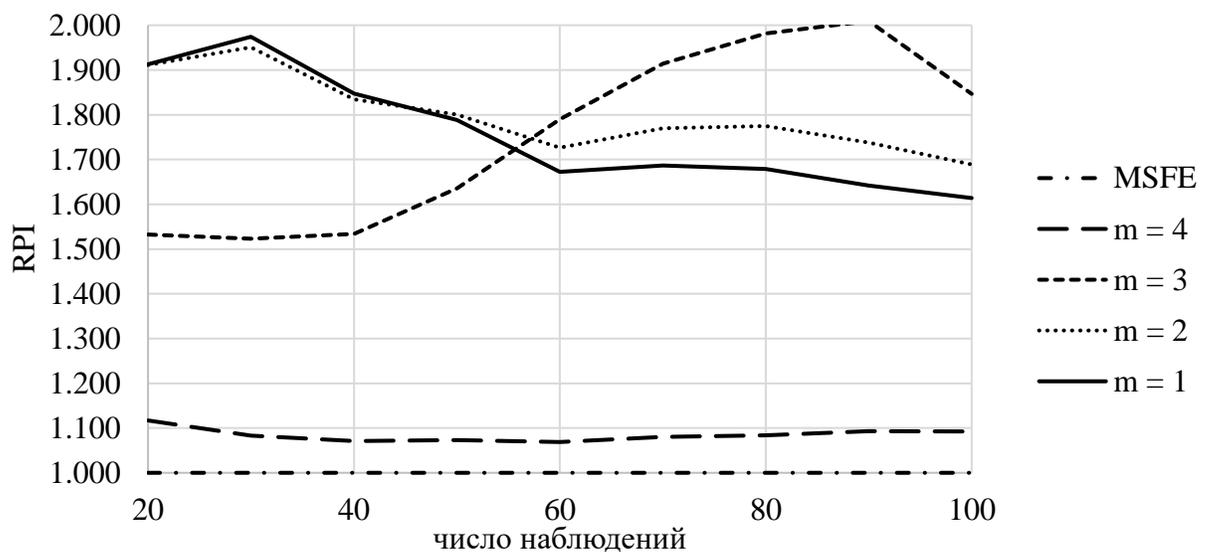
80	1.067	1.067	1.376	<b>1.000</b>	1.085	1.084	1.083	1.981	1.775	1.679
90	1.075	1.075	1.375	<b>1.000</b>	1.093	1.093	1.093	2.009	1.738	1.642
100	1.072	1.072	1.327	<b>1.000</b>	1.092	1.092	1.092	1.847	1.689	1.614
Mean	1.080	1.056	1.297	<b>1.006</b>	1.068	1.069	1.101	1.672	1.823	1.791

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



**Рисунок 2.21** – Относительная эффективность методов взвешивания, М2 Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



**Рисунок 2.22** – Относительная эффективность методов взвешивания, М2 Японии

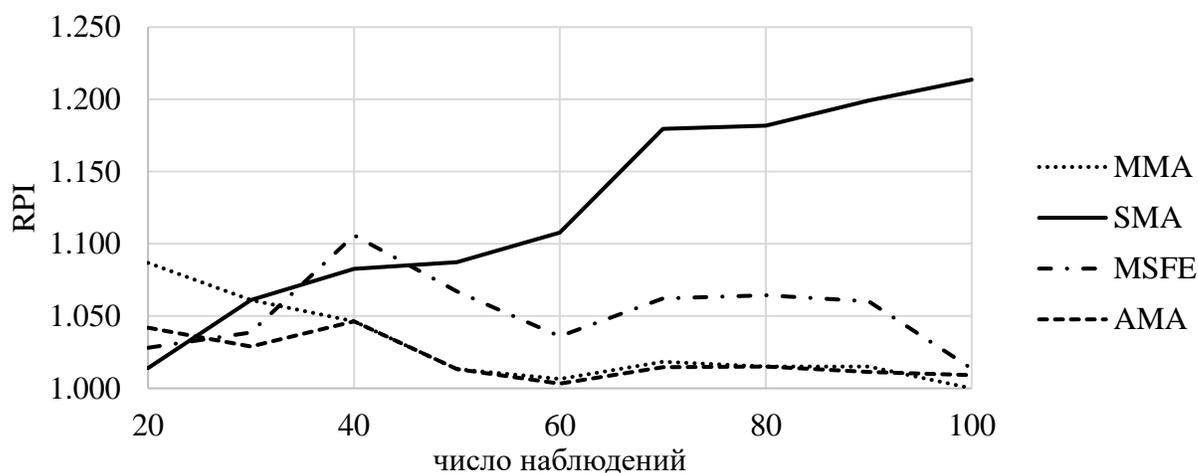
Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда

В случае с денежным агрегатом M2 Японии (см. таблицу 2.12 и рисунки 2.21, 2.22) предлагаемый метод однозначно является лучшим по сравнению с уже существующими методами взвешивания и отдельно взятыми моделями.

**Таблица 2.13** – Сравнение методов взвешивания моделей, безработица Великобритании

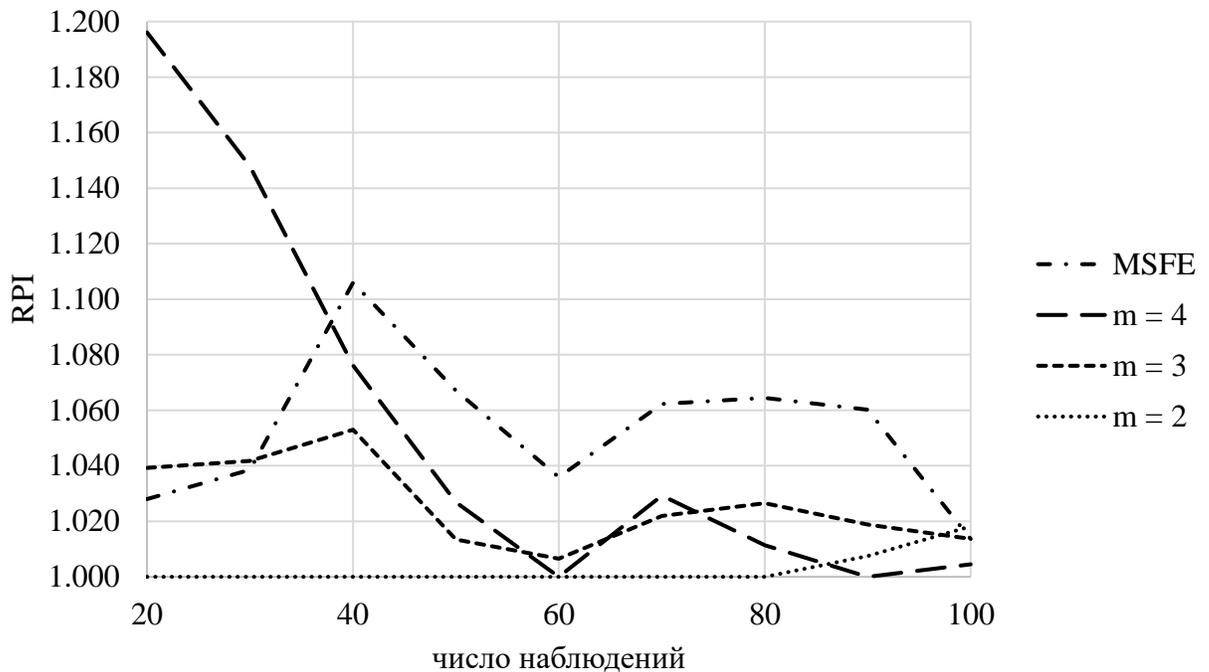
$n$	ISMA	MMA	SMA	MSFE	BMA	AMA	$m = 4$	$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$
10	1.641	1.359	<b>1.000</b>	1.095	1.158	1.168	1.754	1.319	1.053	2.015
15	1.407	1.284	<b>1.000</b>	1.063	1.152	1.172	1.481	1.186	1.054	2.387
20	1.160	1.087	1.014	1.028	1.045	1.042	1.196	1.039	<b>1.000</b>	2.675
30	1.116	1.061	1.061	1.039	1.023	1.029	1.148	1.042	<b>1.000</b>	2.878
40	1.073	1.046	1.083	1.106	1.056	1.046	1.076	1.053	<b>1.000</b>	2.669
50	1.023	1.013	1.087	1.067	1.023	1.013	1.027	1.013	<b>1.000</b>	2.661
60	1.007	1.007	1.108	1.036	1.007	1.003	1.000	1.007	<b>1.000</b>	2.866
70	1.037	1.018	1.179	1.062	1.007	1.015	1.029	1.022	<b>1.000</b>	3.330
80	1.027	1.015	1.182	1.064	1.008	1.015	1.011	1.027	<b>1.000</b>	3.451
90	1.008	1.015	1.199	1.060	1.011	1.011	<b>1.000</b>	1.019	1.008	3.635
100	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	1.214	1.014	1.014	1.009	1.005	1.014	1.018	4.118
Mean	1.136	1.082	1.102	1.058	1.046	1.048	1.157	1.067	<b>1.012</b>	2.971

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.23** – Относительная эффективность методов взвешивания, безработица Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок 2.24** – Относительная эффективность методов взвешивания, безработица Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития

Только в случае с прогнозированием безработицы в Великобритании предлагаемый в диссертационной работе метод демонстрирует не наилучшую эффективность, незначительно уступая байесовскому взвешиванию (BMA), взвешиванию Акаике (АМА) и модели с двумя включенными предикторами (см. таблицу 2.13 и рисунки 2.23, 2.24).

В целом, анализируя динамику индекса относительной эффективности по совокупности планов проведенных экспериментов, можно заключить, что в подавляющем большинстве случаев предлагаемый метод MSFE взвешивания регрессионных моделей работает лучше, чем другие существующие методы, а также более эффективно, чем каждая из взвешиваемых моделей по отдельности. Простая средняя часто демонстрирует наилучшую точность при незначительном

превосходстве числа наблюдений над числом потенциальных объясняющих переменных, однако становится явным аутсайдером при увеличении длины окна данных. АМА и ВМА часто показывают схожую точность, а ММА, несмотря на то что был разработан только для вложенных моделей, во многих случаях работает хорошо и при невложенных моделях. Также стоит отметить, что в среднем все методы взвешивания превосходят по эффективности каждую из взвешиваемых моделей.

Подводя итоги, следует подчеркнуть, что данная глава диссертационного исследования была посвящена обнаружению и исправлению главного недостатка существующих методов взвешивания регрессионных моделей: невозможности получить несмещенную оценку среднеквадратической ошибки прогноза и доверительные интервалы прогнозируемых значений. При использовании MSFE взвешивания мы получаем ожидаемую ошибку прогноза для комбинированной модели и доверительный интервал с заданным уровнем значимости. Предлагаемый метод разрабатывался как для вложенных, так и для невложенных моделей, что существенно расширяет область его применения. Проведенное имитационное и эмпирическое тестирование выявило устойчивое превосходство предлагаемого метода над существующими способами взвешивания регрессионных моделей, что, как следствие, дает ему право считаться предпочтительным в использовании при анализе и прогнозировании временных рядов социально-экономических процессов. Основная причина, по которой MSFE взвешивание работает лучше остальных методов, заключается в том, что он учитывает как корреляционную структуру ошибок взвешиваемых моделей, так и корреляционную структуру их коэффициентов, что позволяет получать более эффективные веса. Помимо этого, MSFE взвешивание точно выполняет задачу оптимизации весовых коэффициентов: выбрать такие веса, которые бы минимизировали ожидаемую ошибку прогноза.

## **ГЛАВА 3 ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ ОКНА НАБЛЮДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОЦЕДУРЫ ВЗВЕШИВАНИЯ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ<sup>5</sup>**

### **3.1 Эмпирическое доказательство невыполнимости предпосылки МНК о постоянстве истинных параметров**

В разделе 1.2 диссертационного исследования было упомянуто, что традиционные методы регрессионного анализа базируются на определенных предположениях, выполнимость которых является ключевым фактором достижения надежных результатов моделирования. Одно из таких предположений – это существование постоянных во времени истинных параметров регрессии, оценку которых мы находим по имеющейся выборке. В случае, если все сделанные предположения верны, то чем больше взятая выборка, тем точнее получаются оценки параметров модели и, как следствие, достигается более высокая эффективность модели, см. [9, 38, 46, 123, 259]. Однако, как будет показано ниже, данное правило не является верным, когда регрессионный анализ делается по временным рядам социально-экономических процессов, а именно среднеквадратическая ошибка предсказаний показывает не гиперболическую, а параболическую зависимость от числа наблюдений в рассматриваемом наборе данных. Таким образом, можно заключить, что прогнозирование экономических процессов требует несколько иных подходов, особенно к выбору длины окна данных, поскольку данный выбор напрямую влияет на эффективность создаваемых моделей.

Выбор оптимального числа наблюдений может быть осуществлен с помощью различных критериев эффективности модели, таких как среднеквадратическая

---

<sup>5</sup> Глава составлена по материалам работ автора [31, 32, 192, 198]

ошибка прогноза, F-статистика, среднеквадратическая бутстрапированная ошибка, байесовский информационный критерий, информационный критерий Акаике и т.д. Байесовский информационный критерий, как уже было упомянуто в разделе 2.1 диссертационного исследования, был предложен в работе [222] в качестве метода отбора моделей и впоследствии исследовался в значительном количестве работ, посвященных его применению в эконометрике, см. например [210, 231, 70, 137, 178, 60, 262]. Также, множество работ посвящено другим методам выбора оптимальной модели и расширением байесовского подхода, см. работы [77, 128, 56, 167, 114, 247, 127, 116, 113, 91, 90]. Наряду с вышеупомянутыми методами в литературе предлагается использовать фокусный информационный критерий (англ. Focused information criterion, FIC), который был предложен в работе [86] и также используется для спецификации регрессионных моделей. Следует отметить, что фокусный информационный критерий может быть использован и для взвешивания набора подмоделей.

Однако, как это показано в эконометрической литературе и в главе 2 настоящего диссертационного исследования, методы взвешивания набора моделей в общем и целом превосходят методы выбора только одной модели из рассматриваемого набора, см. [279, 177, 269, 108, 161, 276, 266, 246, 202, 95]. Единственным камнем преткновения является отсутствие консенсуса в выборе метода для вычисления вектора весовых коэффициентов. В настоящее время в специализированной литературе в основном уделяется внимание следующим методам взвешивания: байесовское взвешивание (BMA), взвешивание Акаике (AMA), взвешивание Маллоуса (MMA), фокусное взвешивание (FMA) и простая средняя, см. работы [216, 204, 242, 282, 200, 160, 153, 99]. Также в главе 2 был разработан метод взвешивания линейных регрессионных моделей путем минимизации ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза (MSFE взвешивание).

Как уже было упомянуто в главе 2 диссертации простая средняя хорошо работает в условиях повышенной неопределенности и в случае тщательного предварительного отбора взвешиваемых регрессионных уравнений. Однако данный метод взвешивания не является оптимальным при включении откровенно плохой модели в набор взвешиваемых. Вследствие этого для обоснованного использования простой средней отобранные модели должны быть близки по своим характеристикам, что накладывает достаточно жесткие ограничения на рассматриваемый набор регрессионных уравнений, см. работы [176, 258, 260, 88, 85, 275].

В связи с вышесказанным данная глава диссертационного исследования посвящена разработке расширения предложенного в главе 2 метода взвешивания регрессионных моделей на основе минимизации несмещенной оценки дисперсии прогноза комбинированной модели, адаптирующего этот метод для взвешивания регрессионных моделей, рассчитанных на окнах данных разной длины.

В данном разделе диссертации сконцентрируемся на демонстрации невыполнимости одной из предпосылок МНК при моделировании временных рядов экономических процессов. Речь идет об отсутствии постоянного вектора истинных параметров  $\beta$ , к которому стремятся оценки коэффициентов с увеличением рассматриваемой выборки. Рассмотрим простую авторегрессию первого порядка, построенную на выборке размера  $n$ :

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + e_t.$$

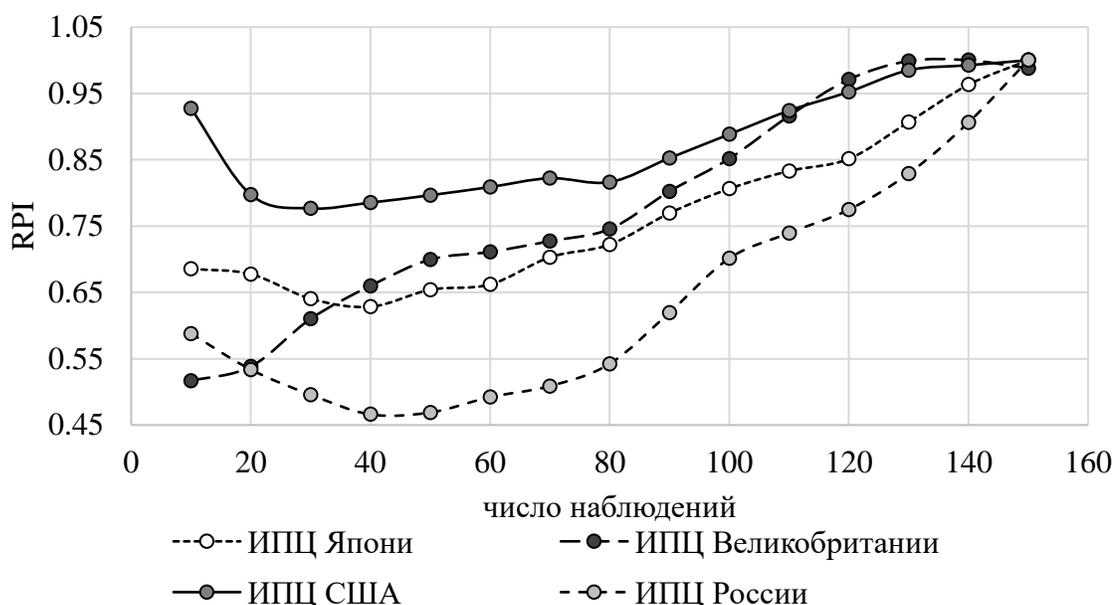
В данном эксперименте проведем вневыборочное прогнозирование на один период вперед, используя выборки разного размера. Другими словами, будем предсказывать одни и те же значения зависимой переменной по моделям, построенным по окнам данных различной длины. Проанализируем следующие макроэкономические индикаторы различных стран: Индекс Потребительских Цен

(англ. Consumer Price Index, CPI) в США (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные), ИПЦ в Японии (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные), ИПЦ в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные), денежный агрегат M2 в США (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные), безработица в США (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные), денежный агрегат M2 в Японии (Q1.1955-Q2.2019, квартальные данные), безработица в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) и ИПЦ в России (01.1992-07.2019, месячные данные). Выбор месячных данных для России объясняется недостатком исторических данных по ИПЦ, что будет выражаться в пониженной надежности полученных результатов в случае, если анализируются квартальные данные. Для того, чтобы данные переменные были стационарны, преобразуем показатели безработицы в разности первого порядка, а ИПЦ и M2 конвертируем в темпы прироста согласно формуле (2.48). Для сравнения точности прогнозов, полученных по разным странам и индикаторам прибегнем к расчету индекса относительной эффективности (RPI). Если рассматриваются  $k$  окон данных, то данный индекс показывает отношение среднеквадратической реализованной ошибки прогноза (MSRE) для  $i$ -ого окна данных к максимальной MSRE среди всех анализируемых окон данных.

На рисунке 3.1 представлена динамика индексов относительной эффективности моделей для ИПЦ четырех рассматриваемых стран, рассчитанных по окнам данных различной длины.

Из рисунка 3.1 видно, что с ростом анализируемой выборки точность получаемых прогнозов снижается, что противоречит традиционной парадигме метода наименьших квадратов. Вместо теоретической гиперболической зависимости между среднеквадратической реализованной ошибкой прогноза и числом наблюдений в рассматриваемом окне данных мы наблюдаем скорее параболическую связь. Это означает, что выбор слишком короткого окна данных так же плох, как и выбор слишком длинного при моделировании временных рядов экономических процессов.

Более того, из рисунка 3.1 не представляется возможным сделать вывод о единой оптимальной длине окна данных, максимально подходящей для моделирования любого из представленных ИПЦ. К примеру, для предсказания инфляции в США с помощью авторегрессии первого порядка лучше использовать окно данных длиной около 30 наблюдений, моделировать ИПЦ Великобритании было бы оптимально при помощи короткого окна данных в 10 наблюдений, а для ИПЦ России и Японии подошло бы окно в 40 наблюдений.



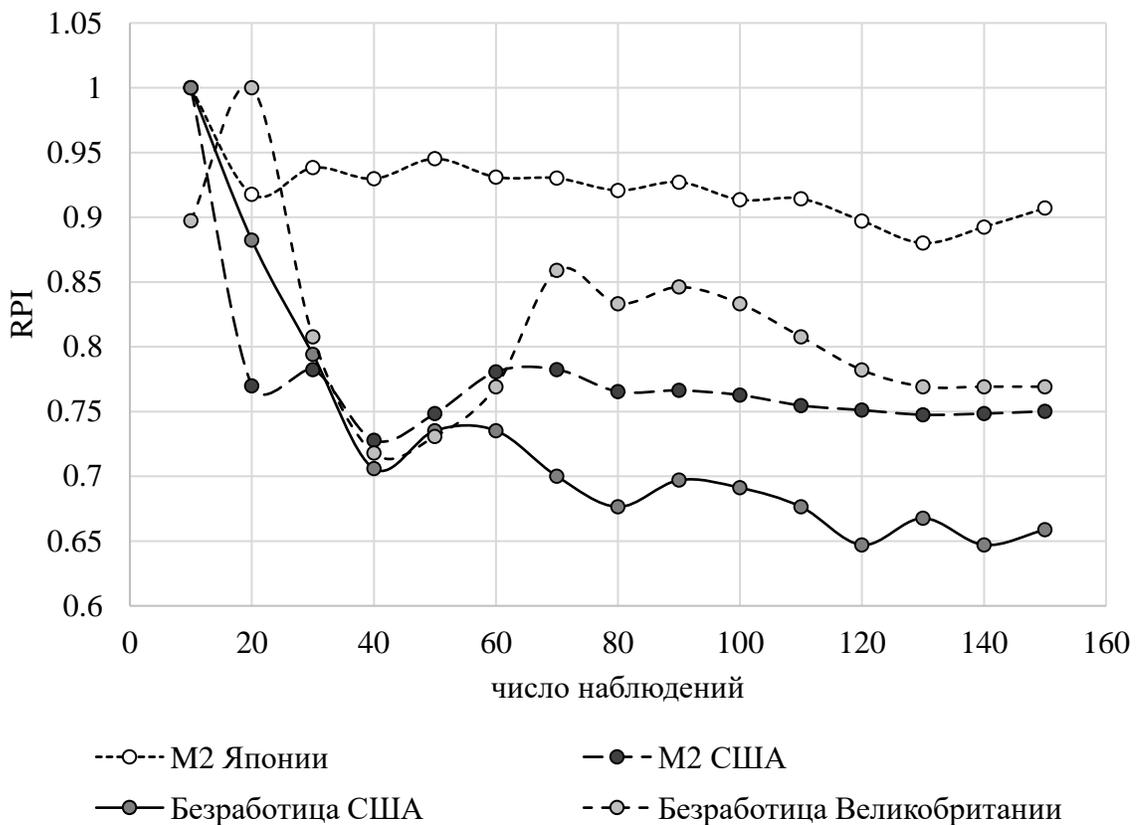
**Рисунок 3.1** – Относительная эффективность авторегрессии первого порядка для ИПЦ разных стран

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Федеральной службы государственной статистики РФ

Также с высокой долей вероятности можно утверждать, что даже для моделирования одного макроэкономического показателя для некоторого государства или региона оптимальное окно данных не является постоянным. Если в процессе проведения описываемого эксперимента на рассматриваемом временном промежутке (Q1.1913-Q2.2019) лучшим для прогнозирования ИПЦ США являлось окно в 30

наблюдений, то это не означает, что оно останется таковым и в дальнейшем. Таким образом, можно заключить, что при моделировании временных рядов макроэкономических процессов присутствует высокая степень неопределенности относительно выбора оптимального окна наблюдений.

Помимо индекса потребительских цен проанализируем также денежный агрегат М2 и безработицу для Японии, Великобритании и США. На рисунке 3.2 представлена динамика индексов относительной эффективности моделей для данных макроэкономических показателей, рассчитанных на окнах данных различной длины.



**Рисунок 3.2** – Относительная эффективность авторегрессии первого порядка для М2 и безработицы разных стран

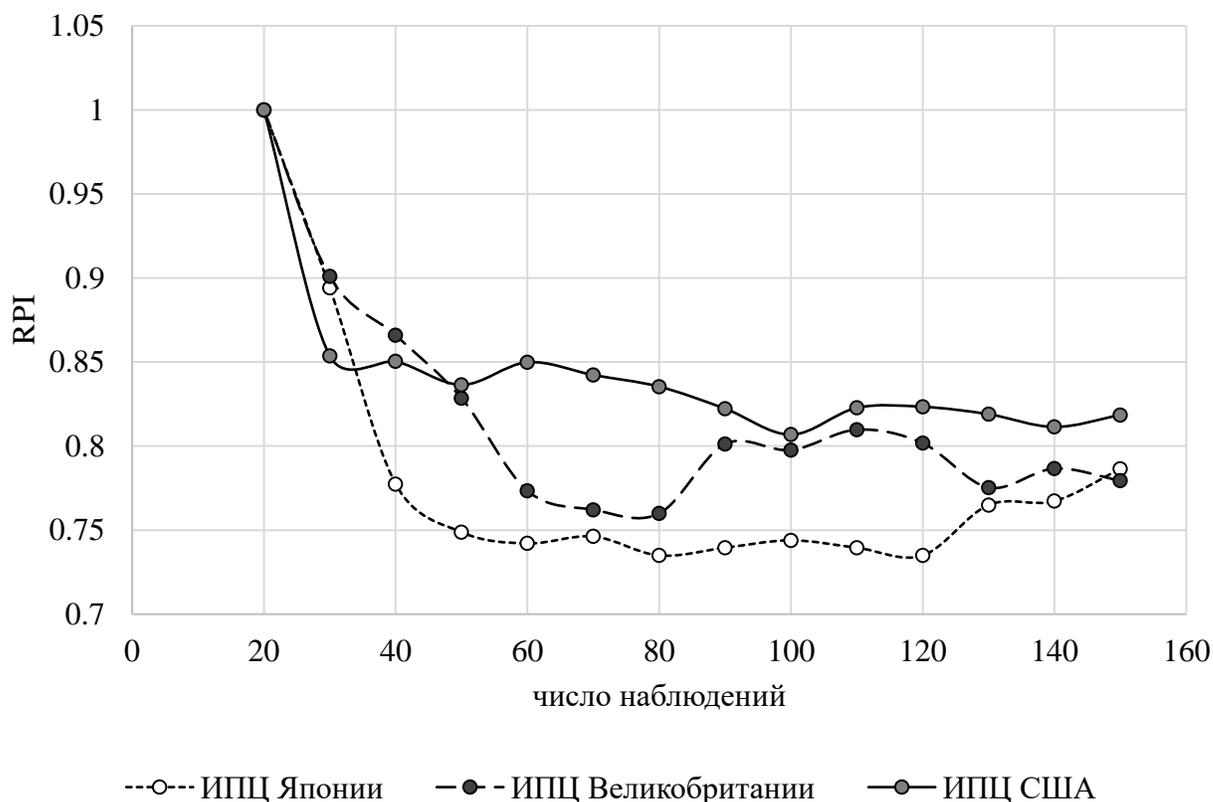
Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Международного валютного фонда, Организации экономического сотрудничества и развития и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Анализируя показатели относительной эффективности, представленные на рисунке 3.2, можно отметить, что данные макроэкономические показатели не показывают такую ярко выраженную параболическую зависимость с длиной окна наблюдений как индексы потребительских цен. Несмотря на это, М2 США и безработица Великобритании имеют оптимальное окно наблюдений на рассматриваемом временном промежутке равное 40 наблюдениям, а денежный агрегат М2 Японии и безработица США – равное 130 и 120 наблюдениям соответственно. Тем не менее зависимость точности моделей для двух последних от длины окна наблюдений скорее описывается классической гиперболической функцией. Данный эффект может быть связан либо с выполнимостью для данных временных рядов предпосылок МНК, либо с тем фактом, что в связи с недостатком эмпирических данных на данном графике изображена лишь левая часть параболической функции.

В качестве продолжения настоящего эмпирического эксперимента рассмотрим также авторегрессию четвертого порядка, применяемую к тем же самым историческим данным. Поскольку в основном макроэкономические индикаторы подвержены сезонности выбор именно четырех лагов для квартальных данных является логически обоснованным для получения более точных предсказаний. В данном случае уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 y_{t-3} + b_4 y_{t-4} + e_t.$$

На рисунке 3.3 представлены результаты эксперимента по аналогии с теми, которые показаны на рисунке 3.1. Единственным отличием здесь является отсутствие ИПЦ России, поскольку месячные данные требуют авторегрессии 12-ого порядка для учета сезонной компоненты, что сделало бы результаты по России несравнимыми с остальными странами при использовании авторегрессии лишь четвертого порядка.

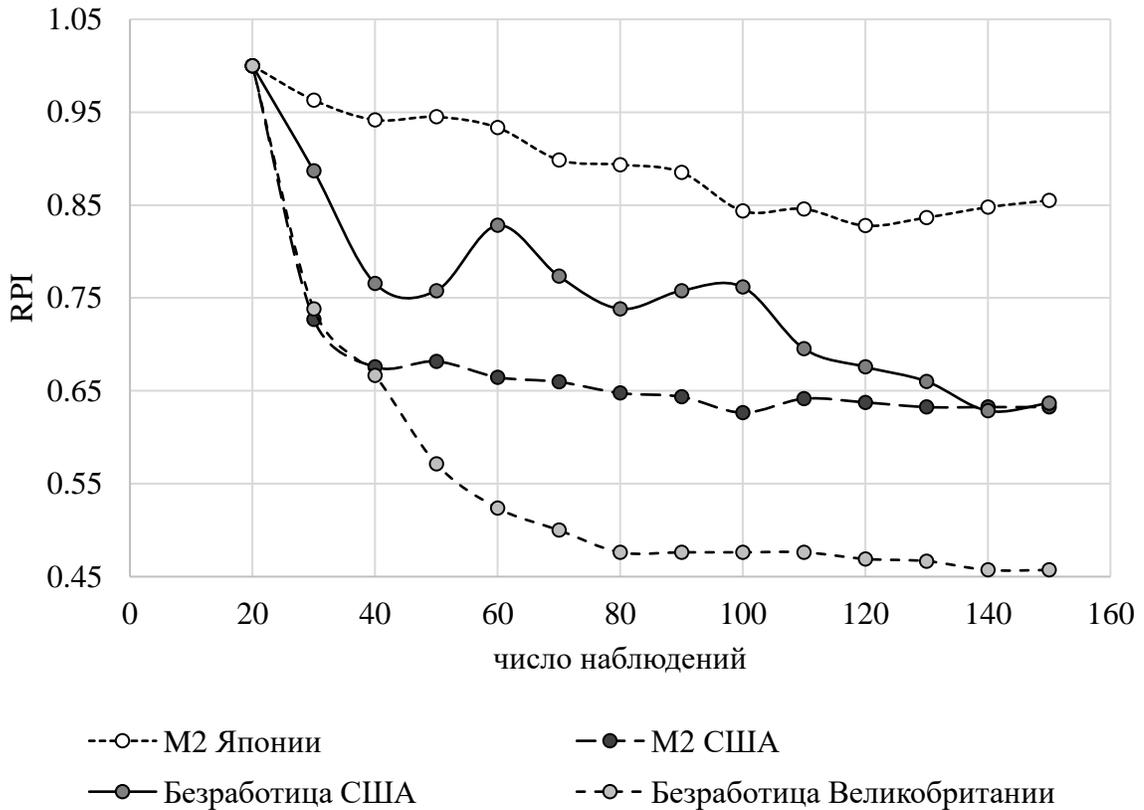


**Рисунок 3.3** – Относительная эффективность авторегрессии четвертого порядка для ИПЦ разных стран

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Федеральной службы государственной статистики РФ

На рисунке 3.3 также можно видеть некоторую параболическую зависимость точности моделей от длины окна наблюдений. Однако в отличие от представленной на рисунке 3.1 динамики ее форма является более полоской, поскольку в случае с четырьмя включенными лагами требуется больше наблюдений, чтобы индекс относительной эффективности начал показывать значительный рост. То есть мы видим подтверждение высказанного выше заявления о том, что длина оптимального окна данных для одного и того же временного ряда не является постоянной, а зависит от включаемых в модель регрессоров и рассматриваемого временного промежутка.

На рисунке 3.4 представлена динамика для моделей авторегрессии четвертого порядка для денежного агрегата М2 и безработицы для Японии, Великобритании и США, рассчитанных на окнах данных различной длины.



**Рисунок 3.4** – Относительная эффективность авторегрессии четвертого порядка для М2 и безработицы разных стран

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Международного валютного фонда, Организации экономического сотрудничества и развития и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Рисунок 3.4 показывает схожую картину с той, которая была изображена на рисунке 3.2. Только в данном случае эффективность модели для М2 Японии показывает параболическую форму, а М2 США, безработица Великобритании и безработица США – гиперболическую.

Попробуем разобраться, что может являться причиной такой параболической формы зависимости точности прогноза и длины окна наблюдений. Здесь логично предположить, что вектор истинных коэффициентов модели  $\beta$  не является постоянным во времени, а подвержен некоторой волатильности. В поддержку данного предположения можно привести довод о том, что экономика – постоянно эволюционирующая система с множеством меняющихся взаимосвязей между ее макро показателями. Также проверим данное предположение с помощью машинного эксперимента. Предположим, что моделируется некоторый процесс  $y_t$  с помощью парной линейной регрессии от фактора  $x_t \sim N(1,1)$ . Причем истинные коэффициенты модели являются не константами, а процессом случайного блуждания и могут быть представлены в виде  $\beta_t = \beta_{t-1} + N(0.003,0.005)$ . Модель в данном случае принимает следующую форму:

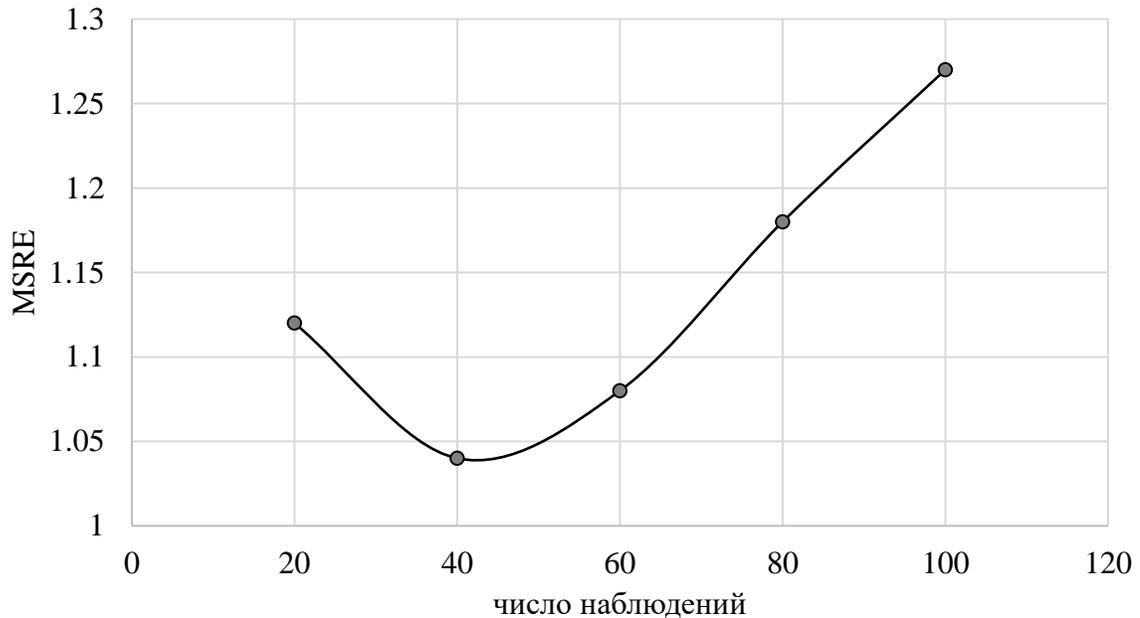
$$y_t = \beta_{0t} + \beta_{1t}x_t + \varepsilon_t.$$

В данном эксперименте будем полагать, что ошибка модели подчиняется нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией, а именно  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ . Таким образом, при выборе некоторого окна данных и расчете выборочных коэффициентов регрессии наблюдаемые ошибки модели принимают на себя вариативность коэффициентов. Чем короче окно, тем меньше этой изменчивости в коэффициентах, однако больше неопределенности относительно полученных оценок истинных параметров модели.

На рисунке 3.5 представлена динамика среднеквадратической реализованной ошибки прогноза для проведенного машинного эксперимента в зависимости от количества наблюдений в анализируемой выборке.

Как видно из рисунка 3.5, при постоянно изменяющихся истинных коэффициентах модели также наблюдается параболическая зависимость

среднеквадратической реализованной ошибки прогноза от числа наблюдений в окне данных, что свидетельствует в пользу высказанной ранее гипотезы о природе данного явления при моделировании исторических данных макроэкономических процессов.

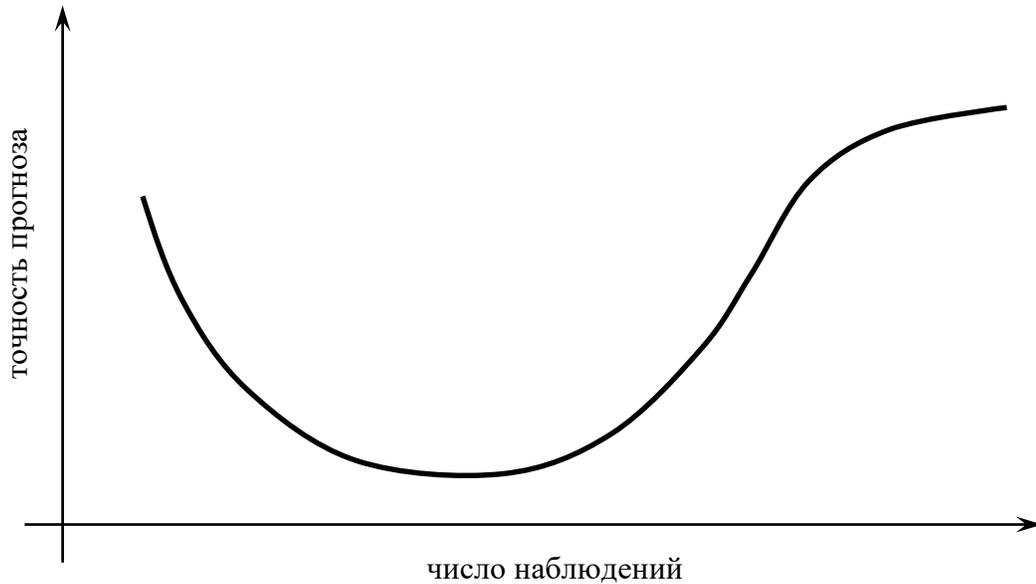


**Рисунок 3.5** – Среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза в зависимости от количества наблюдений в выборке

Источник: составлено автором

Исходя из проведенного анализа, резонно полагать, что в каждый последующий момент времени истинные параметры рассматриваемой модели в некоторой степени отличаются от истинных параметров за предыдущий момент времени, что поддерживается логичным утверждением о постоянно эволюционирующей экономике.

В результате проведенных эмпирических и имитационных экспериментов можно заключить, что схематично зависимость точности получаемых прогнозов от числа наблюдений в рассматриваемой выборке можно представить как показано на рисунке 3.6.



**Рисунок 3.6** – Зависимость точности прогноза от длины окна наблюдений

Источник: составлено автором

Спецификой временных рядов является наличие только одной точки за определенный момент времени, поэтому представляется невозможным проследить в некоторой мере точную динамику истинных параметров модели. Тем не менее представляется возможным снизить ошибку прогноза посредством применения определенных подходов к процедуре моделирования временных рядов. Анализируя полученные в данном разделе результаты, можно заключить, что особо важным является выбор оптимального окна наблюдений, которое было бы не слишком коротким, но также и не слишком длинным. Данный выбор может быть осуществлен с помощью разнообразных критериев оптимальности модели, таких как байесовский информационный критерий, информационный критерий Акаике, информационный критерий Маллоуса, F-статистика, среднеквадратическая ожидаемая ошибка прогноза и др. Однако, как это было показано в главе 2 настоящего диссертационного исследования комбинирование моделей в большинстве случаев превосходит эффективность выбора только одной модели из рассматриваемого набора. В связи с

этим следующий раздел диссертации посвящен разработке расширения метода взвешивания регрессионных уравнений, представленного в главе 2, для комбинирования регрессионных моделей, рассчитанных на окнах данных разной длины, что позволит в некоторой мере найти решение проблемы выбора окна наблюдений при моделировании и прогнозировании временных рядов макроэкономических процессов.

### **3.2 Метод комбинирования регрессионных моделей, рассчитанных по разным окнам данных**

Пусть имеется  $M$  подмоделей, каждая из которых имеет ошибку  $\varepsilon_{it}$  и удовлетворяет предпосылкам 1-5 и 7, причем модели могут быть рассчитаны как на окнах данных разной длины, так и одинаковой. Также набор предикторов каждой модели может различаться. Конечной целью в данном случае является оптимизация весовых коэффициентов таким образом, чтобы комбинированная модель давала наименьшую возможную среднеквадратическую ожидаемую ошибку прогноза (MSFE) и в то же время удовлетворяла системе ограничений (2.9). Для достижения обозначенной цели необходимо получить аналитическое выражение для несмещенной оценки MSFE.

Начнем вывод по аналогии с разделом 2.2 диссертационного исследования с упоминания факта того, что MSFE линейной регрессионной модели состоит из дисперсии ошибок и дисперсии линии регрессии, см. например [199]. Применяя данное утверждение к комбинированной модели, MSFE для периода  $n + 1$  может быть представлена в следующем виде:

$$MSFE_{n+1} = Var(\bar{\hat{y}}_{n+1} - y_{n+1}) = Var\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_i w_i\right) + Var\left[\sum_{i=1}^M \{\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\} w_i\right]. \quad (3.1)$$

Для того, чтобы вывести выражение MSFE в явном виде представим выражение (3.1) в виде двух компонент точно так же, как это было сделано в разделе 2.2 диссертационного исследования. Первым делом рассмотрим дисперсию ошибок, которая может быть представлена в виде суммы всех элементов взвешенной дисперсионно-ковариационной матрицы истинных ошибок рассматриваемых подмоделей, см. формулу (2.18), которая также продублирована ниже.

$$Var\left(\sum_{i=1}^M \varepsilon_i w_i\right) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M cov(\varepsilon_i; \varepsilon_j) w_i w_j.$$

Далее рассмотрим дисперсию линии регрессии. В формуле (2.19) она представлена как сумма элементов дисперсионно-ковариационной матрицы полученных по подмоделям прогнозов на период  $n + 1$ . Ниже приведем данное уравнение еще раз с целью повышения легкости восприятия материала данного раздела.

$$Var\left[\sum_{i=1}^M \{\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\} w_i\right] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M cov(\hat{y}_{i(n+1)}; \hat{y}_{j(n+1)}) w_i w_j.$$

Следующим шагом в выводе окончательной формулы для несмещенной оценки MSFE является вычисление ковариации  $i$ -ого и  $j$ -ого регрессионного уравнения в явном виде.

Вывод данного выражения приведен ниже.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\hat{y}_{i(n+1)}; \hat{y}_{j(n+1)}) &= E\left\{\left(\hat{y}_{i(n+1)} - E(\hat{y}_{i(n+1)})\right)\left(\hat{y}_{j(n+1)} - E(\hat{y}_{j(n+1)})\right)\right\} \\
&= E\left\{X_{i(n+1)}(B_i - \beta_i)(B_j - \beta_j)^T X_{j(n+1)}^T\right\} \\
&= E\left\{X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \varepsilon_i \varepsilon_j^T X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T\right\} \\
&= X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} X_i^T E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) X_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \\
&= \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) X_{i(n+1)}(X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $\tilde{X}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ X_i \end{vmatrix}$ , а 0 обозначает нулевую матрицу, которая дополняет  $X_i$  таким образом,

что число строк результирующей матрицы равняется числу строк самого длинного из рассматриваемых окон данных. В случае, когда  $X_i$  является самым длинным из анализируемых окон – дополнение с помощью нулевой матрицы не производится.

Здесь дадим некоторые пояснения по поводу перехода от четвертой строчки к пятой в выражении (3.2).  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T)$  представляет собой прямоугольную матрицу размерности  $n_i \times n_j$ , где  $n_i$  – число наблюдений в  $i$ -ом окне данных. Также, предполагая выполнение предпосылки 7 об отсутствии корреляции остатков подмоделей за разные периоды времени, матрица  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T)$  состоит из вложенной диагональной матрицы размерности  $n_{\min(i,j)} \times n_{\min(i,j)}$ , расположенной в нижнем правом углу, окруженной нулевыми элементами.

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если умножить матрицу  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T)$  на матрицу  $X_j$ , получится как раз матрица  $\text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \tilde{X}_j$ .  $\text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j)$  можно вынести перед операциями матричного

умножения а матрицу  $X_i^T$  дополнить до матрицы  $\check{X}_i^T$  с целью унификации полученной формулы.

Суммируя результаты, полученные в (3.2) можно записать формулу (3.1) в следующем виде:

$$MSFE_{n+1} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}) w_i w_j \left\{ 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \right\}. \quad (3.3)$$

Для завершения процедуры вывода аналитического выражения несмещенной оценки MSFE необходимо найти несмещенную оценку для  $\text{cov}(\varepsilon_i; \varepsilon_j)$ . По аналогии с тем, как это было сделано в разделе 2.2 диссертационного исследования начнем опять с известного фактора, что для  $i$ -ой подмодели вектор-столбец значений целевой переменной может быть представлен через выборочные коэффициенты регрессии и наблюдаемые отклонения либо через истинные коэффициенты и истинные ошибки модели, см. формулу (2.22).

$$Y = X_i B_i + e_i = X_i \beta_i + \varepsilon_i.$$

Таким образом, можно выразить вектор-столбец наблюдаемых отклонений  $e_i$  для  $i$ -ой подмодели через вектор-столбец истинных ошибок как показано ниже.

$$e_i = X_i (\beta_i - B_i) + \varepsilon_i = -X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \varepsilon_i + \varepsilon_i = \left\{ I_n - X_i (X_i^T X_i)^{-1} X_i^T \right\} \varepsilon_i.$$

Далее запишем математическое ожидание суммы произведений наблюдаемых отклонений по  $i$ -ой и  $j$ -ой моделям, выраженное через их истинные ошибки и матрицы объясняющих переменных:

$$E(\tilde{e}_i^T \tilde{e}_j) = E \left[ \tilde{\varepsilon}_i^T \left\{ \tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \right\} \left\{ \tilde{I}_{nj} - \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T \right\} \tilde{\varepsilon}_j \right], \quad (3.4)$$

где  $\tilde{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ e_i \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}$  и 0 обозначает вектор-столбец нулей, который дополняет  $e_i$  и  $\varepsilon_i$  до числа строк, равного числу наблюдений в самом длинном из рассматриваемых

окон данных.  $\tilde{I}_{ni} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{ni} \end{pmatrix}$ , что является дополненной нулями единичной матрицей размерности  $n_i \times n_i$  до размерности самого длинного окна данных под рассмотрением. Мотивация использования дополнения нулями здесь такая же как и в предыдущем случае. Поскольку рассматриваемые модели построены на окнах данных различной длины, число наблюдаемых отклонений не совпадает, поэтому в расчете несмещенной оценки ковариации ошибок  $i$ -ой и  $j$ -ой моделей не учитываются отклонения той модели, которая построена на более длинном окне данных, выходящие за рамки доступных отклонений по модели, построенной на более коротком окне.

Далее, точно так же, как это было сделано в разделе 2.2 диссертации, введем следующее обозначение с целью облегчения восприятия дальнейших математических выкладок:

$$\tilde{A}_i = \tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T. \quad (3.5)$$

Поскольку мы предполагаем выполнение предпосылки 7, а именно отсутствие корреляции истинных ошибок среди моделей по разным временным периодам, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_{iq}; \varepsilon_{ju}) = 0, \forall q \neq u$ , тогда с учетом введенного обозначения (3.5) формула (3.4) может быть преобразована следующим образом:

$$E(\tilde{e}_i^T \tilde{e}_j) = E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{jt}) \text{tr}(\tilde{A}_i \tilde{A}_j) \Rightarrow E\left(\frac{\tilde{e}_i^T \tilde{e}_j}{\text{tr}(\tilde{A}_i \tilde{A}_j)}\right) = \text{cov}(\varepsilon_{it}; \varepsilon_{jt}), \quad (3.6)$$

Таким образом, из формулы (3.6) получаем, что искомая несмещенная оценка ковариаций истинных ошибок  $i$ -ой и  $j$ -ой подмоделей будет выглядеть как показано ниже:

$$\text{cov}(e_{it}; e_{jt}) = \frac{\tilde{e}_i^T \tilde{e}_j}{\text{tr}(\tilde{A}_i \tilde{A}_j)}. \quad (3.7)$$

Здесь легко показать, что  $\text{tr}(\tilde{A}_i \tilde{A}_i) = \text{tr}(\tilde{A}_i) = n - k_i$ .

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i \times \tilde{A}_i &= \left( \tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \right) \times \left( \tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \right) \\ &= \tilde{I}_{ni} - 2\tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T + \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \\ &= \tilde{I}_{ni} - 2\tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T + \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \\ &= \tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T = \tilde{A}_i, \end{aligned}$$

так как  $\tilde{X}_i^T \tilde{X}_i = X_i^T X_i$ .

Таким образом, применяя (3.7) к (3.3), можем записать окончательную формулу для несмещенной оценки среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза (MSFE):

$$MSFE_{n+1} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\tilde{e}_i^T \tilde{e}_j}{\text{tr}(\tilde{A}_i \tilde{A}_j)} w_i w_j \left\{ 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \right\}. \quad (3.8)$$

Тогда, процедура подбора вектора весовых коэффициентов осуществляется с помощью решения следующей оптимизационной задачи квадратичного программирования с системой ограничений, см. также (2.28).

$$MSFE_{n+1} \rightarrow \min$$

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M w_i = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1. \end{array} \right.$$

Здесь не будем останавливаться на детальном описании способов решения данной оптимизационной задачи. В настоящее время разработано немало стандартизованных алгоритмов решения оптимизационных задач такого класса, основанных на численных методах, а при имеющихся на сегодняшний день вычислительных мощностях, доступных как корпорациям, так и частным лицам, даже при достаточно большом количестве рассматриваемых подмоделей  $M$  возможно найти численное решение за разумное время, используя любой из существующих алгоритмов.

Далее перейдем от расчета точечного прогноза к алгоритму получения интервального с использованием комбинированной модели. Для расчета доверительного интервала для прогноза, полученного с использованием линейной регрессии, как это уже было описано в разделе 2.2 диссертационного исследования, используется  $t$ -распределение с числом степеней свободы  $n - k$ , где  $k$  – число параметров модели.

$$\hat{y} - T_{\alpha, n-k} \cdot s < y < \hat{y} + T_{\alpha, n-k} \cdot s,$$

где  $s$  – квадратный корень несмещенной оценки истинной дисперсии ошибок

модели,  $\alpha$  – уровень значимости.

В случае комбинированной модели для получения доверительных интервалов для точечного прогноза за период  $n + 1$  логично использовать точно такую же формулу, см. также (2.29).

$$\bar{\hat{y}} - T_{\alpha,r} \cdot \sqrt{MSFE_{n+1}} < y < \bar{\hat{y}} + T_{\alpha,r} \cdot \sqrt{MSFE_{n+1}},$$

где  $r$  – число степеней свободы.

В разделе 2.2 настоящего диссертационного исследования уже была выведена формула для числа степеней свободы для комбинированной модели при условии, что все подмодели были рассчитаны на окна данных одинаковой длины, см. формулу (2.45). В данном разделе адаптируем данную формулу для подмоделей, рассчитанных на окна данных различной длины. В данном случае формула (2.45) примет следующий вид:

$$r = \frac{2 \left( \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\bar{e}_i^T \bar{e}_j}{tr(\bar{A}_i \bar{A}_j)} w_i w_j \bar{\theta}_{ij} \right)^2}{\sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=1}^M w_a w_b w_c w_d \bar{\theta}_{ab} \bar{\theta}_{cd} \frac{\bar{\Theta}_{abcd} tr(\bar{A}_a \bar{A}_b) \circ tr(\bar{A}_c \bar{A}_d) + \bar{\Psi}_{abcd}}{tr(\bar{A}_a \bar{A}_b) tr(\bar{A}_c \bar{A}_d)}}, \quad (3.9)$$

$$\text{где } \bar{\theta}_{ij} = 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} \bar{X}_i^T \bar{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T,$$

$$\bar{\Theta}_{abcd} = \left\{ (I + P_{vec(UCOV)}) UCOV' \otimes UCOV' \right\}_{\langle abcd \rangle},$$

а ковариационная матрица остатков модели выглядит следующим образом:

$$UCOV' = \begin{pmatrix} \frac{e_1^T e_1}{tr(A_1)} & \frac{\tilde{e}_1^T \tilde{e}_2}{tr(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2)} & \dots & \frac{\tilde{e}_1^T \tilde{e}_M}{tr(\tilde{A}_1 \tilde{A}_M)} \\ \frac{\tilde{e}_2^T \tilde{e}_1}{tr(\tilde{A}_2 \tilde{A}_1)} & \frac{e_2^T e_2}{tr(A_2)} & \dots & \frac{\tilde{e}_2^T \tilde{e}_M}{tr(\tilde{A}_2 \tilde{A}_M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\tilde{e}_M^T \tilde{e}_1}{tr(\tilde{A}_M \tilde{A}_1)} & \frac{\tilde{e}_M^T \tilde{e}_2}{tr(\tilde{A}_M \tilde{A}_2)} & \dots & \frac{e_M^T e_M}{tr(A_M)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{abcd} = & \text{cov}(e_{at} e_{ct}) \text{cov}(e_{bt} e_{dt}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d]^T - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right] \\ & + \text{cov}(e_{at} e_{dt}) \text{cov}(e_{bt} e_{ct}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right]. \end{aligned}$$

Здесь дадим некоторые пояснения относительно того, как был осуществлен вывод малой дроби в знаменателе (3.9). Будем руководствоваться тем же принципом, который применялся при выводе выражения (2.34). Однако в данном случае будут использоваться дополненные векторы-столбцы наблюдаемых отклонений подмоделей, а также дополненные квадратные матрицы  $\tilde{A}_i$  и векторы-столбцы истинных ошибок рассматриваемых моделей для учета того факта, что регрессионные уравнения были построены на окнах данных разной длины. Вывод данного выражения представлен ниже.

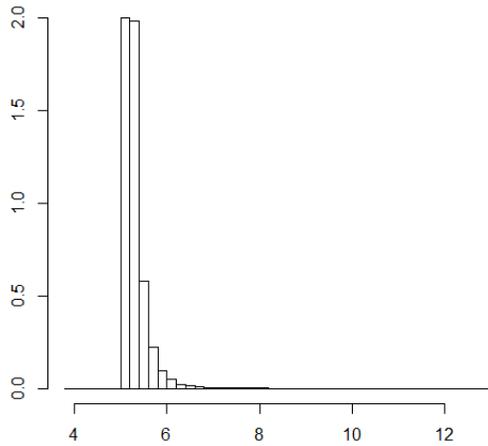
$$\begin{aligned} \text{cov}\{\tilde{e}_a^T \tilde{e}_b; \tilde{e}_c^T \tilde{e}_d\} &= E\left[\left\{\tilde{e}_a^T \tilde{e}_b - E(\tilde{e}_a^T \tilde{e}_b)\right\}\left\{\tilde{e}_c^T \tilde{e}_d - E(\tilde{e}_c^T \tilde{e}_d)\right\}\right] \\ &= E\left[\left\{\tilde{\varepsilon}_a^T \tilde{A}_a \tilde{A}_b \tilde{\varepsilon}_b - E(\tilde{\varepsilon}_a^T \tilde{A}_a \tilde{A}_b \tilde{\varepsilon}_b)\right\}\left\{\tilde{\varepsilon}_c^T \tilde{A}_c \tilde{A}_d \tilde{\varepsilon}_d - E(\tilde{\varepsilon}_c^T \tilde{A}_c \tilde{A}_d \tilde{\varepsilon}_d)\right\}\right] \\ &= \{E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt}) - E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}) E(\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\} tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \\ &+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d]^T - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right] \\ &+ E(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) E(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right] \\ &= \text{cov}\{(\varepsilon_{at} \varepsilon_{bt}); (\varepsilon_{ct} \varepsilon_{dt})\} tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \\ &+ \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{ct}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{dt}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d]^T - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right] \\ &+ \text{cov}(\varepsilon_{at} \varepsilon_{dt}) \text{cov}(\varepsilon_{bt} \varepsilon_{ct}) \left[ tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \times [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] - tr(\tilde{A}_a \tilde{A}_b) \circ [\tilde{A}_c \tilde{A}_d] \right]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что число степеней свободы для комбинированной модели, рассчитанное по формуле (2.45) или (3.9), не является точным, а в некоторой степени зависит от тех несмещенных оценок дисперсий и ковариаций истинных ошибок рассматриваемых подмоделей. Покажем данную зависимость графически. Для этого проведем имитационный эксперимент. Предположим, что взвешиваются две регрессионные модели, моделирующие  $y_t$  в зависимости от факторов  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  соответственно. Машинная генерация  $y_t$  происходит с помощью нормального распределения с нулевой средней и единичной дисперсией. Факторы  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  моделируются как  $x_{it} = y_t + N(0,1)$ . Первая подмодель строится на окне длиной  $n_1$  наблюдений, вторая – на окне длиной  $n_2$  наблюдений. В данном эксперименте рассмотрим эмпирически полученную плотность вероятности числа степеней свободы комбинированной модели при изменяющихся дисперсиях и ковариациях истинных ошибок подмоделей и неизменных остальных параметрах. Для расчета каждого графика плотности вероятности использовалось 30 000 случайных генераций несмещенной оценки дисперсионно-ковариационной матрицы истинных ошибок подмоделей.

На рисунках 3.7-3.10 представлены эмпирические плотности вероятности числа степеней свободы комбинированной модели при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$  и различных весовых коэффициентах, присвоенных каждой из анализируемых подмоделей.

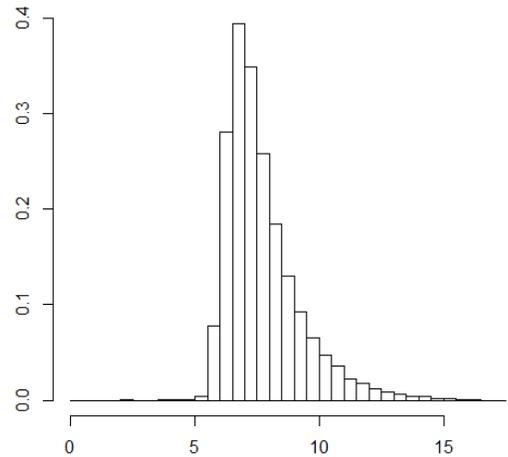
Как видно из рисунков 3.7-3.10, распределение числа степеней свободы для комбинированной модели имеет положительную асимметрию при  $w_1 = 0.2$ ,  $w_1 = 0.5$  и даже при  $w_1 = 0.7$ . Только при достаточном превосходстве весового коэффициента первой модели, рассчитанной на более длинном окне данных, над второй распределение числа степеней свободы общей модели имеет отрицательную асимметрию. Также при приближении  $w_1$  к единице распределение имеет значительно большую дисперсию, чем при значениях  $w_1$  близких к нулю. В последнем случае число степеней свободы можно рассчитать достаточно точно даже

в условиях неизвестных дисперсий и ковариаций истинных ошибок подмоделей. Однако в случае с равными весами или превосходством  $w_1$  над  $w_2$  неопределенность относительно истинного числа степеней свободы растет.

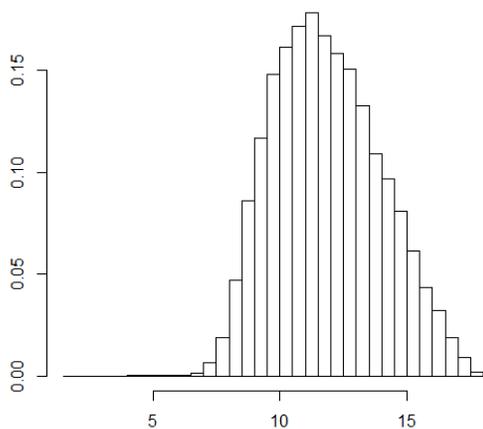


**Рисунок 3.7** – Плотность распределения числа степеней свободы при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 0.8$

Источник: составлено автором

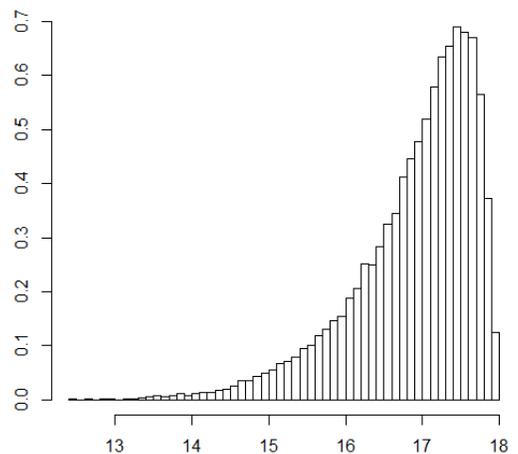


**Рисунок 3.8** – Плотность распределения числа степеней свободы при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.5$ ,  $w_2 = 0.5$



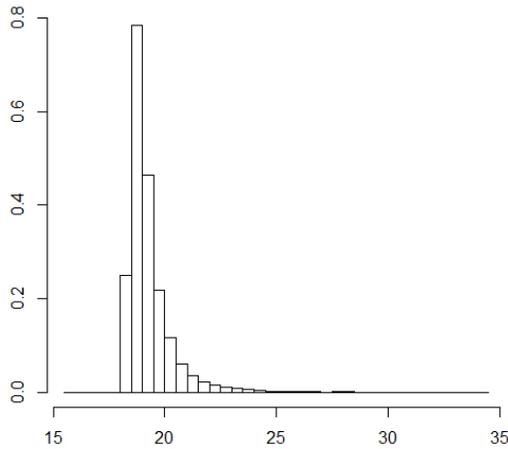
**Рисунок 3.9** – Плотность распределения числа степеней свободы при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.7$ ,  $w_2 = 0.3$

Источник: составлено автором



**Рисунок 3.10** – Плотность распределения числа степеней свободы при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.9$ ,  $w_2 = 0.1$

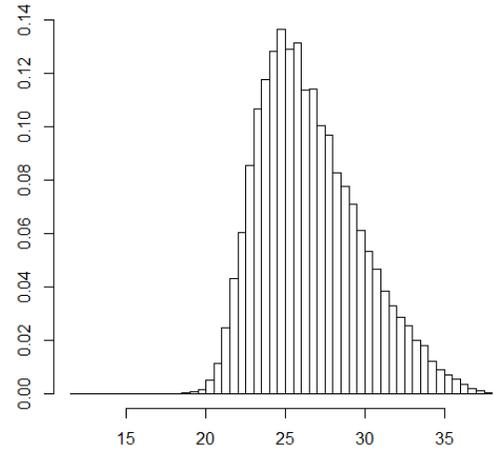
На рисунках 3.11-3.14 приведены эмпирические плотности вероятности числа степеней свободы комбинированной модели при  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 20$  и различных весовых коэффициентах, присвоенных каждой из анализируемых подмоделей.



**Рисунок 3.11** – Плотность

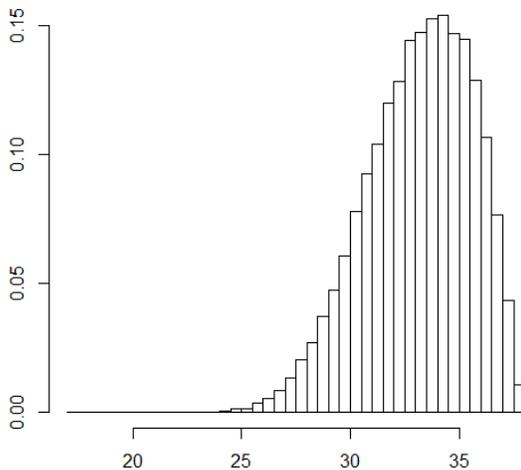
распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 20$ ,  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 0.8$

Источник: составлено автором



**Рисунок 3.12** – Плотность

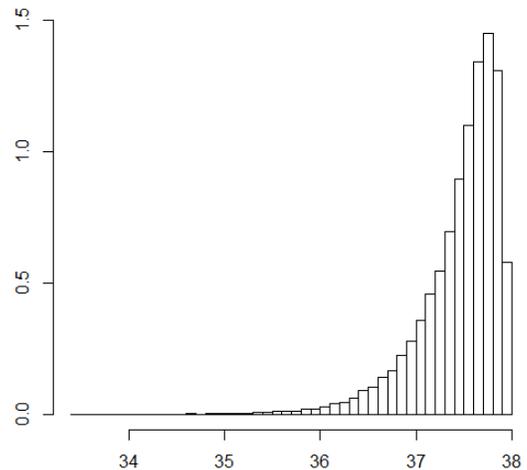
распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 20$ ,  $w_1 = 0.5$ ,  $w_2 = 0.5$



**Рисунок 3.13** – Плотность

распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 20$ ,  $w_1 = 0.7$ ,  $w_2 = 0.3$

Источник: составлено автором

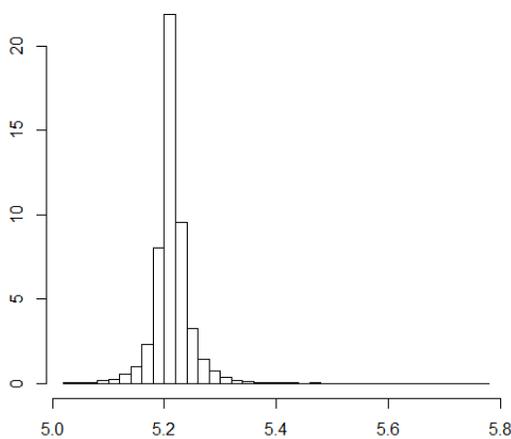


**Рисунок 3.14** – Плотность

распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 20$ ,  $w_1 = 0.9$ ,  $w_2 = 0.1$

Из рисунков 3.11-3.14 можно проследить схожую динамику плотности распределения числа степеней свободы комбинированной модели с представленной на рисунках 3.7-3.10, за исключением более ранней смены положительной асимметрии на отрицательную при  $w_1$  стремящемся к единице, что говорит о незначительном влиянии размера окон данных подмоделей на поведение и форму анализируемого распределения.

Следует также отметить, что даже, если бы была известна дисперсионно-ковариационная матрица истинных ошибок взвешиваемых подмоделей, число степеней свободы комбинированной модели все равно не являлось бы константой, а некоторым образом зависело бы от элементов  $\check{A}_i$  и  $\check{\theta}_{ij}$ . Для того чтобы проиллюстрировать данную зависимость примем некоторую дисперсионно-ковариационную матрицу ошибок моделей за истинную и сгенерируем случайным образом наборы  $\check{A}_i$  и  $\check{\theta}_{ij}$ , исходя из приведенной выше системы. Точно так же, как и в предыдущем случае для расчета каждого графика плотности вероятности использовалось 30 000 случайных генераций.

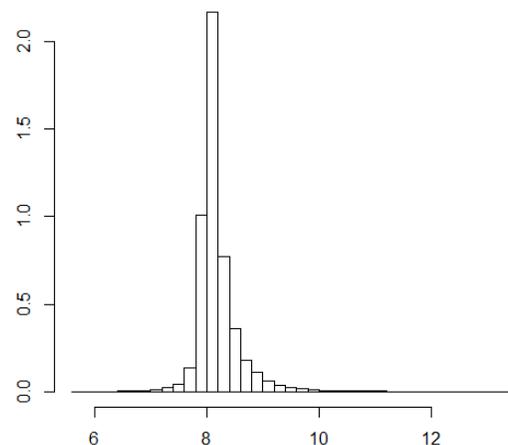


**Рисунок 3.15** – Плотность

распределения числа степеней свободы

при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 0.8$

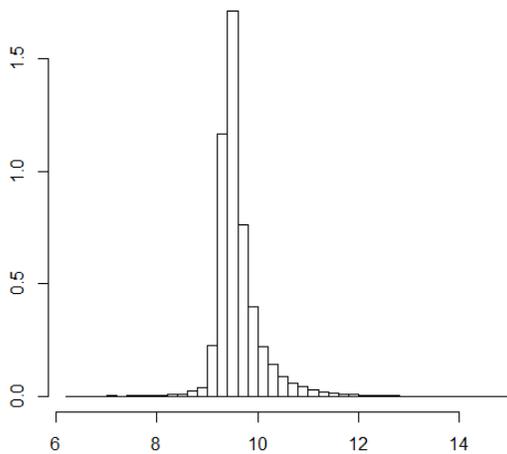
Источник: составлено автором



**Рисунок 3.16** – Плотность

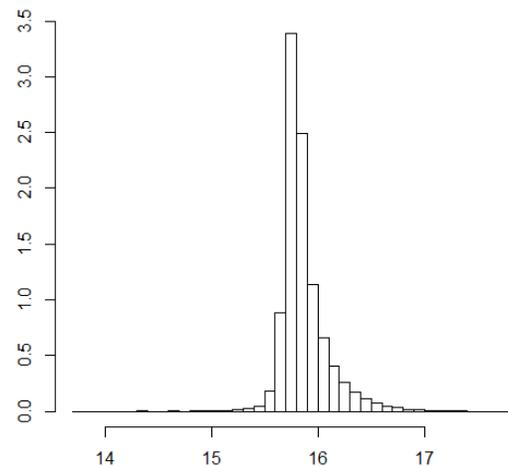
распределения числа степеней свободы

при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.5$ ,  $w_2 = 0.5$



**Рисунок 3.17 – Плотность**

распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.7$ ,  $w_2 = 0.3$



**Рисунок 3.18 – Плотность**

распределения числа степеней свободы  
при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 7$ ,  $w_1 = 0.9$ ,  $w_2 = 0.1$

Источник: составлено автором

На рисунках 3.15-3.18 приведены плотности вероятности числа степеней свободы при постоянных ковариациях и дисперсиях ошибок и меняющихся  $\check{A}_i$  и  $\check{\theta}_{ij}$ .

Как видно из рисунков 3.15-3.18 при известной дисперсионно-ковариационной матрице число степеней свободы комбинированной модели не подвергается такой волатильности как при неизвестных дисперсиях и ковариациях истинных ошибок. Плотность распределения в данном случае имеет практически симметричную форму независимо от значений весовых коэффициентов.

Таким образом, в условиях неопределенности относительно дисперсионно-ковариационной матрицы истинных ошибок относительно точный интервальный прогноз комбинированной модели можно рассчитать с помощью применения байесовской статистики. Идея заключается в том, чтобы получить маргинальное распределение плотности вероятности истинных ошибок комбинированной модели с учетом вероятностных распределений дисперсий и ковариаций истинных ошибок подмоделей. Данное маргинальное распределение может быть представлено как

показано ниже:

$$\begin{aligned}
 f(y_{n+1}|r) = & \int \cdots \int_T (y_{n+1} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2, \text{cov}_{12}, \dots, \text{cov}_{(M-1)M}) \cdot \\
 & \cdot f(\text{cov}_{12} | \sigma_1^2, \sigma_2^2) \cdots f(\text{cov}_{(M-1)M} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2, \text{cov}_{12}, \dots, \text{cov}_{(M-2)M}) \cdot \\
 & \cdot f(\sigma_1^2) \cdots f(\sigma_M^2) d\sigma_1^2 \cdots d\sigma_M^2 d\text{cov}_{12} \cdots d\text{cov}_{(M-1)M},
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где симплекс  $T := \{(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2) : \sigma_i^2 \geq 0, |\text{cov}_{ij}| \leq \sigma_i \sigma_j\}$ .

Как было сказано ранее, дисперсионно-ковариационную матрицу истинных ошибок подмоделей можно моделировать с помощью распределения Уишарта. Однако в данном случае проблема заключается в том, что при комбинировании моделей каждый элемент этой матрицы имеет свое число степеней свободы, что делает неприменимым известную функциональную форму распределения. Вероятно, имеется возможность вывести аналитическое выражение для вероятностного распределения дисперсионно-ковариационной матрицы при различном числе степеней свободы для каждого элемента, но в данном диссертационном исследовании этот вывод не производился в силу отсутствия его значимого вклада в точность и скорость производимых расчетов. Для расчета доверительного интервала для прогнозов комбинированной модели рекомендуется воспользоваться численным методом. Ниже представим пошаговый алгоритм расчета интервального прогноза с использованием этого метода.

1. Провести разложение Холецкого несмещенной оценки дисперсионно-ковариационной матрицы ошибок подмоделей  $UCOV = SS^T$ .

2. FOR  $i = 1$  TO  $T$  DO, где параметр  $T$  определяет точность рассчитываемого доверительного интервала.

3. Установить  $n = 1$

4. WHILE  $n \leq N$  DO, где  $N$  – наибольшее число степеней свободы по рассматриваемым подмоделям.

а). Сгенерировать реализацию  $COV$  с одной степенью свободы согласно следующей формуле:

$$COV = SZZ^T S^T, \quad (3.11)$$

где  $Z \sim N(0,1)$  и  $E(ZZ^T) = I$ .

б). Повторять пункт а) до тех пор, пока  $n < n_i$ , где  $n_i$  – числа степеней свободы для элементов  $COV$ , упорядоченные по возрастанию.

в). В случае, если  $n_i$  является дробным числом, умножить последнюю реализацию элемента  $COV_{kl}$ , соответствующего  $n$ , полученную в пункте а) на дробную часть  $n_i$ .

г). Перейти к рассмотрению следующего  $n_i$ , при этом для уже рассмотренных элементов  $COV_{kl}$  реализации не накапливаются.

4. ENDDO

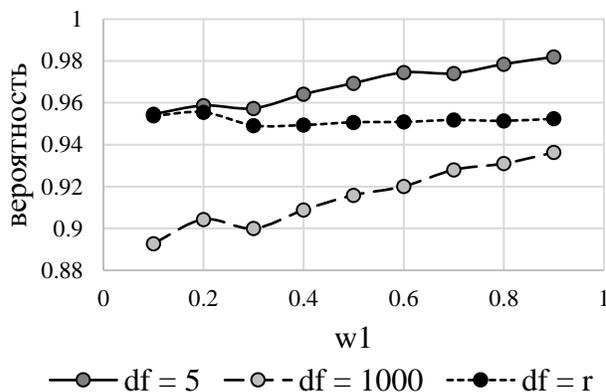
5. Просуммировать полученные реализации элементов  $COV_{kl}$  и рассчитать число степеней свободы  $r_i$  с полученной дисперсионно-ковариационной матрицей ошибок подмоделей.

6. ENDDO

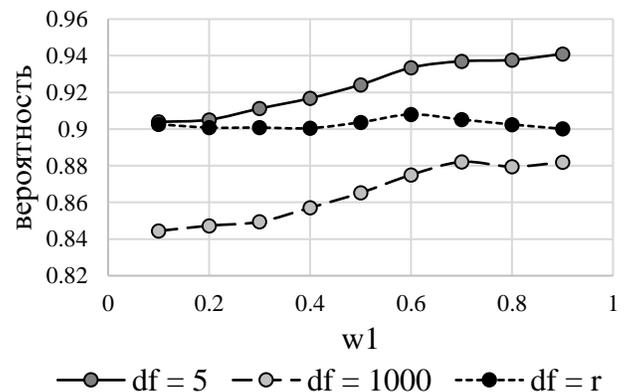
7. Искомое вероятностное распределение для прогнозируемого значения будет представлять собой простую среднюю полученных распределений масштабированных  $t$ -распределений Стьюдента с  $r_i$  степенями свободы:

$$f(y_{n+1}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T t\_scaled(MSFE, r_i). \quad (3.12)$$

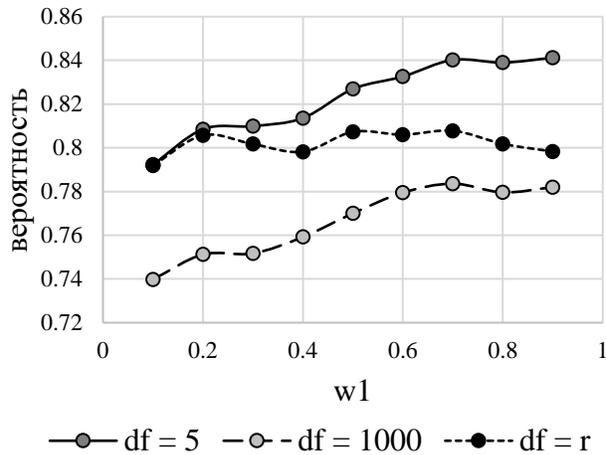
Однако следует отметить, что даже при простом расчете числа степеней свободы комбинированной модели по формуле (2.45) или (3.9) интервальный прогноз получается достаточно достоверным. Для верификации данного утверждения проведем имитационный эксперимент. Точно так же как и в предыдущем случае предположим, что взвешиваются две регрессионные модели, моделирующие  $y_t$  в зависимости от факторов  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  соответственно. Машинная генерация  $y_t$  происходит с помощью нормального распределения с нулевой средней и единичной дисперсией. Факторы  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  моделируются как  $x_{it} = y_t + N(0,1)$ . Первая подмодель строится на окне длиной  $n_1 = 20$  наблюдений, вторая – на окне длиной  $n_2 = 7$  наблюдений. В данном эксперименте рассмотрим эмпирически полученную вероятность попадания прогнозируемого значения  $y_{n+1}$  в доверительный интервал, рассчитанный по  $t$ -распределению Стьюдента с различным числом степеней свободы (df, англ. degrees of freedom). В данном случае будем рассматривать число степеней свободы, ассоциируемое с кратчайшим окном данных (df = 5), дающее распределение, близкое к нормальному (df = 1000), а также рассчитанное по формуле (3.9), предлагаемой в диссертационном исследовании (df = r).



**Рисунок 3.19** – Эмпирическая вероятность попадания  $y_{n+1}$  в 95%-ный доверительный интервал

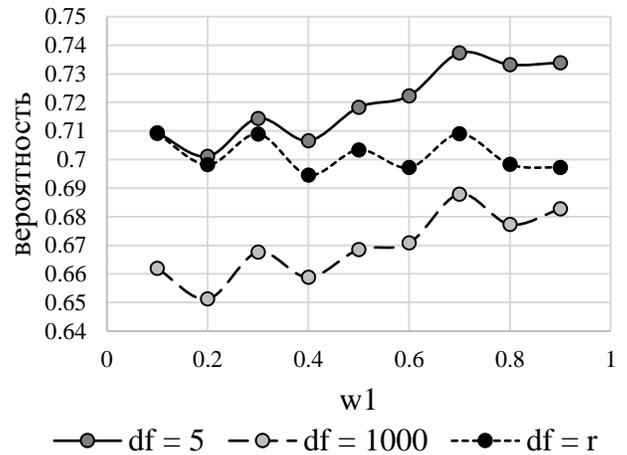


**Рисунок 3.20** – Эмпирическая вероятность попадания  $y_{n+1}$  в 90%-ный доверительный интервал



**Рисунок 3.21** – Эмпирическая  
вероятность попадания  $y_{n+1}$  в  
80%- ный доверительный интервал

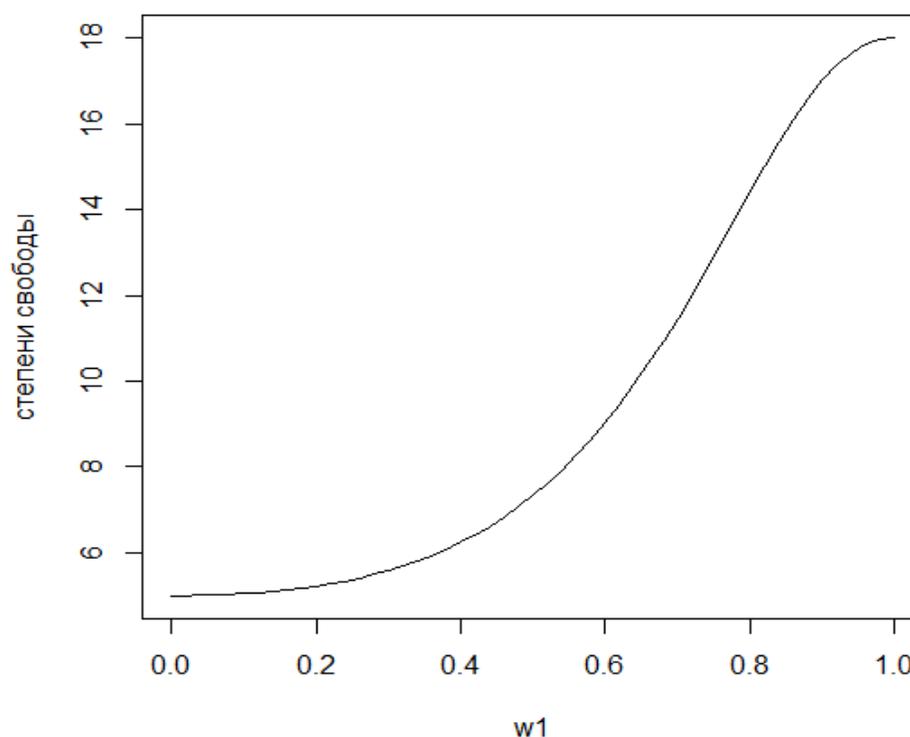
Источник: составлено автором



**Рисунок 3.22** – Эмпирическая  
вероятность попадания  $y_{n+1}$  в  
70%- ный доверительный интервал

На рисунках 3.19-3.22 представлены результаты проведенного имитационного эксперимента, а именно эмпирические вероятности попадания прогнозируемого значения  $y_{n+1}$  в 95%-ный, 90%-ный, 80%-ный и 70%-ный доверительные интервалы при рассмотренных выше системах вычисления числа степеней свободы и различных значениях весовых коэффициентов  $w_1$  и  $w_2$ . Для получения каждой точки графика использовалось 10 000 имитаций. Из рисунков 3.19-3.22 видно, что использование  $df = 5$  дает достаточно надежные доверительные интервалы при малых значениях  $w_1$ , однако с увеличением весового коэффициента первой подмодели надежность такого способа нахождения доверительного интервала прогнозируемых значений падает. Рассчитанный при  $df = 5$  доверительный интервал дает завышенные оценки истинного, то есть внутри него лежит больший процент реализованных прогнозируемых значений, чем заявлено изначально. Использование распределения, близкого к нормальному, для расчета интервального прогноза по комбинированной модели может считаться оправданным либо при значениях  $w_1$ , близких к единице, либо если окна данных, на которых были рассчитаны рассматриваемые подмодели,

являются достаточно длинными. Также из рисунков 3.10а-3.10г можно заключить, что предлагаемая формула расчета числа степеней свободы комбинированной модели позволяет получать достаточно достоверные доверительные интервалы вне зависимости от значений весовых коэффициентов и длин окон данных, на которых были рассчитаны подмодели. Таким образом, из проведенного эмпирического тестирования можно высказать обоснованное предположение о том, что необязательно использовать приведенный в данном разделе диссертации алгоритм численного расчета интервального прогноза, так как при использовании точечной оценки числа степеней свободы (см. формулу (3.9) и формулу (2.45)) полученные доверительные интервалы имеют удовлетворительную точность.



**Рисунок 3.23** – Зависимость числа степеней свободы комбинированной модели от весовых коэффициентов при двух взвешиваемых подмоделях

Источник: составлено автором

Далее перейдем к исследованию формы зависимости числа степеней свободы

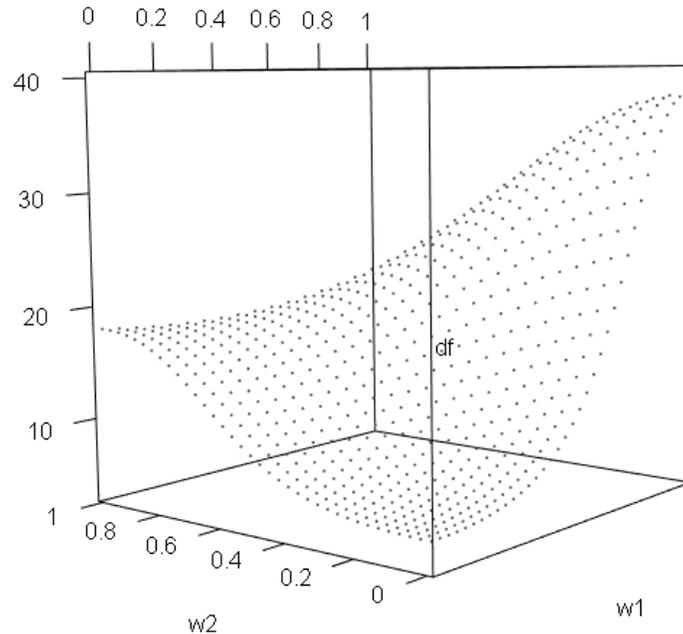
комбинированной модели от значений весовых коэффициентов. Для начала рассмотрим двумерный случай, когда взвешивание происходит только по двум подмоделям. Тогда весовой коэффициент  $w_1$  автоматически определяет величину оставшегося весового коэффициента  $w_2 = 1 - w_1$ . Исходя из этого, логично изобразить данную зависимость на двумерном графике с показателем  $w_1$  по оси абсцисс и числом степеней свободы по оси ординат.

На рисунке 3.23 приведен график зависимости числа степеней свободы комбинированной модели от  $w_1$  при  $df_1 = n_1 - 2 = 18$  и  $df_2 = n_2 - 2 = 5$ . Здесь хорошо прослеживается нелинейная асимметричная функция логистического вида. Сразу же отметим, что при  $w_1 \rightarrow 0$  число степеней свободы стремится к  $df_2$  и наоборот: при  $w_1 \rightarrow 1$  число степеней свободы стремится к  $df_1$ . Анализируя данный функциональный вид, можно также сказать, что наименьшее из двух рассматриваемых чисел степеней свободы (в данном случае  $df_2$ ) имеет больший «приоритет», то есть требуется значительное превосходство  $w_1$  над  $w_2$ , чтобы число степеней свободы стало равным хотя бы среднему из  $df_1$  и  $df_2$ . Исходя из этого, можно также заключить, что и взвешенная средняя по числам степеней свободы рассматриваемых подмоделей не будет способствовать получению достоверных доверительных интервалов.

Далее рассмотрим трехмерный случай, когда взвешиваются три подмодели. Весовые коэффициенты  $w_1$  и  $w_2$  однозначно определяют значение весового коэффициента  $w_3 = 1 - w_1 - w_2$ , поэтому в данном случае будем использовать трехмерное пространство для изображения рассматриваемой зависимости. На рисунке 3.12 представлен график зависимости числа степеней свободы комбинированной модели от  $w_1$  и  $w_2$  при  $df_1 = 38$ ,  $df_2 = 18$  и  $df_3 = 5$ .

График, приведенный на рисунке 3.24, подтверждает высказанное ранее утверждение о большем «приоритете» меньшего числа степеней свободы над большим, поскольку имеет характерную асимметричную форму. Для того, чтобы

число степеней свободы приблизилось к  $df_1 = 38$  необходимо значительное превосходство  $w_1$  над оставшимися двумя весовыми коэффициентами.



**Рисунок 3.24** – Зависимость числа степеней свободы комбинированной модели от весовых коэффициентов при трех взвешиваемых подмоделях

Источник: составлено автором

С целью подведения итогов проведенных выше расчетов и выводов, представим ниже пошаговый алгоритм для вычисления оптимального вектора весовых коэффициентов, применяемого для построения комбинированной модели, а также получения по ней точечного и интервального прогнозов.

**Шаг 1:** Специфицировать набор подмоделей, удовлетворяющих предпосылкам 1-5 и 7, которые могут быть рассчитаны на окнах данных как одинаковой, так и различной длины.

**Шаг 2:** Рассчитать вектор весовых коэффициентов посредством максимизации целевой функции (3.3) при ограничениях (2.9).

**Шаг 3:** Осуществить комбинирование подмоделей по формуле (2.6), используя

вектор весовых коэффициентов, рассчитанный на шаге 2.

**Шаг 4:** Произвести расчет точечного прогноза согласно полученной на шаге 3 комбинированной модели.

**Шаг 5:** Получить доверительный интервал для точечного прогноза согласно формуле (2.29) при числе степеней свободы, рассчитанном по формуле (3.9).

### 3.3 Апробация метода выбора оптимальной длины окна на имитационных и исторических данных

Для того, чтобы показать эффективность взвешивания моделей, построенных на окнах данных различной длины проведем тестирование на имитационных и исторических данных. В имитационном эксперименте предположим, что вектор истинных параметров регрессионной модели  $\beta$  представляет собой процесс случайных блужданий. Случайным образом сгенерируем набор данных для четырех объясняющих переменных  $\{x_{it} \sim N(2,1), i = 1, \dots, 4, t = 1, \dots, n\}$  и соответствующую им целевую переменную  $y_t$  как показано ниже:

$$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ,  $\beta_{it} = \beta_{i(t-1)} + N(0, \sigma)$ , что дает либо классическую регрессионную модель (в случае, если  $\sigma = 0$ ), либо регрессию с непостоянными во времени параметрами (в случае, если  $\sigma > 0$ ).

В данном эксперименте рассмотрим несколько значений  $\sigma$  и сравним эффективность различных методов взвешивания и выбора регрессионных уравнений. При проведении тестирования будем взвешивать пять линейных регрессионных

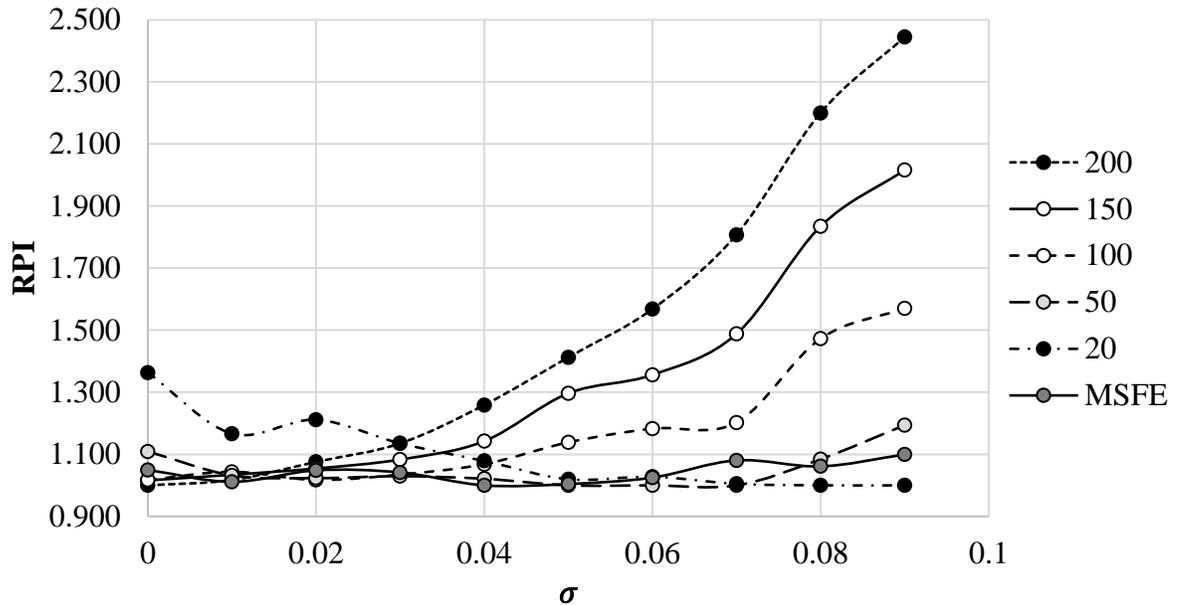
уравнений, рассчитанных на окнах данных со следующим количеством наблюдений:  $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 150$ ,  $n_3 = 100$ ,  $n_4 = 50$ ,  $n_5 = 20$ . Поскольку большинство методов взвешивания регрессионных моделей не могут быть адаптированы для взвешивания по окнам данных разной длины тривиальным способом, будем тестировать только три метода из существующих: байесовское взвешивание (BMA), простая средняя (SMA) и предлагаемый в диссертационной работе метод MSFE взвешивания. Также добавим к сравнению два метода выбора оптимального окна наблюдений: отбор по байесовскому информационному критерию (BIC) и отбор по несмещенной оценке среднеквадратической ошибке прогноза (MSE). В дополнение к уже заявленным методам добавим анализ эффективности всех пяти моделей, рассчитанных на разных окнах данных, по отдельности. Для сравнения эффективности рассматриваемых моделей запишем их среднеквадратическую реализованную ошибку прогноза для различных значений  $\sigma$  и переведем ее в индекс относительной эффективности (RPI), рассчитываемый по формуле (2.47). Для каждого значения  $\sigma$  проводилось 50 000 имитаций. Полученные по итогам имитационного эксперимента результаты представлены в таблице 3.1.

**Таблица 3.1** – Сравнение анализируемых методов, имитационный эксперимент

$\sigma$	MSFE	200	150	100	50	20	BMA	SMA	BIC	MSE
<b>0</b>	1.050	<b>1.000</b>	1.016	1.018	1.109	1.363	1.010	1.044	1.200	1.230
<b>0.01</b>	1.011	1.017	1.034	1.044	1.032	1.167	1.023	<b>1.000</b>	1.085	1.049
<b>0.02</b>	1.048	1.076	1.054	1.017	1.023	1.211	1.064	<b>1.000</b>	1.157	1.124
<b>0.03</b>	1.042	1.135	1.083	1.035	1.029	1.135	1.087	<b>1.000</b>	1.135	1.107
<b>0.04</b>	<b>1.000</b>	1.259	1.142	1.068	1.021	1.079	1.041	1.017	1.065	1.041
<b>0.05</b>	1.004	1.413	1.297	1.138	<b>1.000</b>	1.020	1.119	1.049	1.020	1.025
<b>0.06</b>	1.025	1.568	1.356	1.183	<b>1.000</b>	1.028	1.047	1.069	1.030	1.010
<b>0.07</b>	1.080	1.807	1.488	1.202	<b>1.000</b>	1.005	1.045	1.122	1.007	1.089
<b>0.08</b>	1.061	2.200	1.834	1.473	1.084	<b>1.000</b>	1.027	1.299	1.017	1.036
<b>0.09</b>	1.099	2.444	2.016	1.570	1.194	<b>1.000</b>	1.001	1.375	1.010	1.048
<b>Средняя</b>	<b>1.042</b>	1.492	1.332	1.175	1.049	1.101	1.046	1.098	1.073	1.076

Источник: составлено автором

Для иллюстрации приведенных в таблице 3.1 результатов построим динамику изменения индекса относительной эффективности в зависимости от принимаемых значений  $\sigma$  для рассматриваемых методов, см. рисунки 3.25 и 3.26.

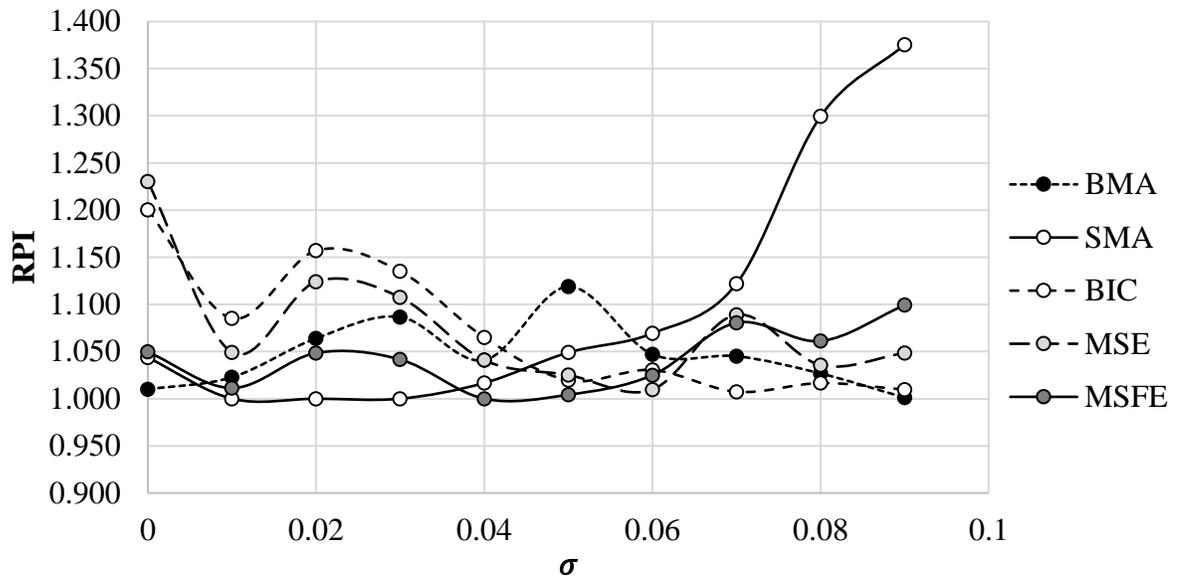


**Рисунок 3.25** – Динамика изменения RPI в зависимости от значений  $\sigma$  для анализируемых моделей

Источник: составлено автором

На рисунке 3.25 хорошо видно, что в случае, когда анализируемая модель близка к классической с постоянным вектором истинных параметров, то наилучшим выбором, естественно, является наибольшее из доступных окон данных. Работать следует именно с ним и не прибегать ни к каким методам взвешивания. Однако с ростом  $\sigma$  эффективность моделей, построенных на достаточно длинных окнах данных ( $n_1 = 200$ ,  $n_2 = 150$ ,  $n_3 = 100$ ), значительно падает, в то время как модель, построенная на окне данных  $n_5 = 20$  улучшает точность своих прогнозов. Особого внимания здесь заслуживает точность прогнозов, полученных по предлагаемому методу взвешивания. Эффективность MSFE взвешивания при любых рассматриваемых значениях  $\sigma$  является либо наилучшей, либо близкой к наилучшей

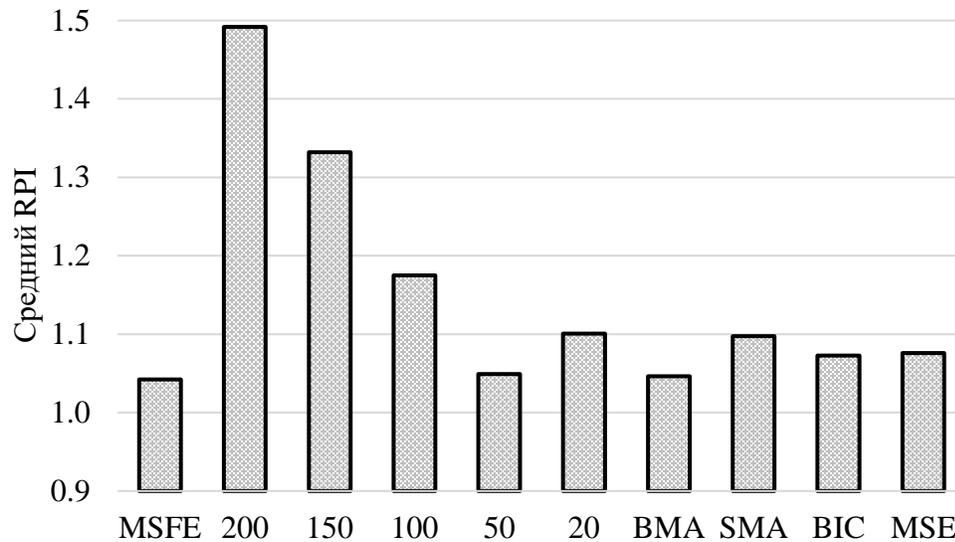
из моделей. Если предположить, что выбор наилучшей модели делается в условиях повышенной неопределенности относительно значения  $\sigma$ , то предлагаемый метод является оптимальной альтернативой, что позволяет говорить о его значительной практической пользе.



**Рисунок 3.26** – Динамика изменения RPI в зависимости от значений  $\sigma$  для анализируемых методов

Источник: составлено автором

В случае, если предпосылка классического МНК о постоянстве вектора параметров не выполняется – методы отбора и взвешивания моделей позволяют повысить надежность получаемых прогнозов. Анализируя рисунок 3.26, можно сказать, что когда волатильность истинных параметров  $\beta$  невысокая – простая средняя работает лучше остальных методов, а когда волатильность значительная, то здесь наиболее эффективными методами являются BMA и BIC. Что касается предлагаемого метода MSFE взвешивания, то он демонстрирует наилучшую эффективность при умеренной волатильности  $\beta$ , но при этом в среднем также показывает наиболее высокую точность прогнозов (см. рисунок 3.27).



**Рисунок 3.27** – Усредненный RPI для рассматриваемых методов, имитационный эксперимент

Источник: составлено автором

Как можно видеть из рисунка 3.27, MSFE взвешивание является оптимальным выбором в условиях неопределенности относительно степени волатильности вектора истинных параметров. В среднем предлагаемый в диссертационном исследовании метод взвешивания регрессионных моделей работает лучше, чем любой из рассматриваемых методов взвешивания, выбора или отдельно взятой модели под рассмотрением. При некоторых допущениях можно ожидать, что эффективность MSFE взвешивания будет в среднем на 4.2% хуже наилучшей из моделей, тогда как BMA будет хуже на 4.6%, SMA – на 9.8% и т.д.

Помимо имитационного эксперимента проведем также эмпирическое тестирование рассмотренных выше методов на реальных исторических данных. Как и в разделе 3.1 диссертационного исследования проанализируем следующие макроэкономические индикаторы различных стран: Индекс Потребительских Цен (англ. Consumer Price Index, CPI) в США (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные) – ind 1, ИПЦ в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 2, ИПЦ в

Японии (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 3, ИПЦ в России (01.1992-07.2019, месячные данные) – ind 4, денежный агрегат M2 в США (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные) – ind 5, безработица в США (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные) – ind 6, денежный агрегат M2 в Японии (Q1.1955-Q2.2019, квартальные данные) – ind 7 и безработица в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 8. Данные макроэкономические индикаторы моделировались с помощью авторегрессии четвертого порядка (для ИПЦ России был выбран двенадцатый порядок), что означает, что для предсказания каждого индикатора были построены пять моделей по разным окнам данных, после чего проводилось их взвешивание согласно рассматриваемым алгоритмам. Рассматривались окна данных следующих длин:  $n_1 = 100, n_2 = 80, n_3 = 60, n_4 = 40, n_5 = 20$ . Тот факт, что самое длинное из рассматриваемых окон данных в эмпирическом тестировании короче соответствующего при имитационном эксперименте, объясняется тем, что накопленной статистики не хватает для получения достоверных результатов при сохранении тех же размеров окон данных. Для того, чтобы данные переменные были стационарны, преобразуем показатели безработицы в разности первого порядка, а ИПЦ и M2 конвертируем в темпы прироста согласно формуле (2.48). Для сравнения точности прогнозов, полученных по разным странам и индикаторам, как и при имитационном эксперименте, прибегнем к расчету индекса относительной эффективности (RPI). В таблице 3.2 представлены результаты проведенного эмпирического тестирования рассматриваемых методов.

**Таблица 3.2** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, без спецификации

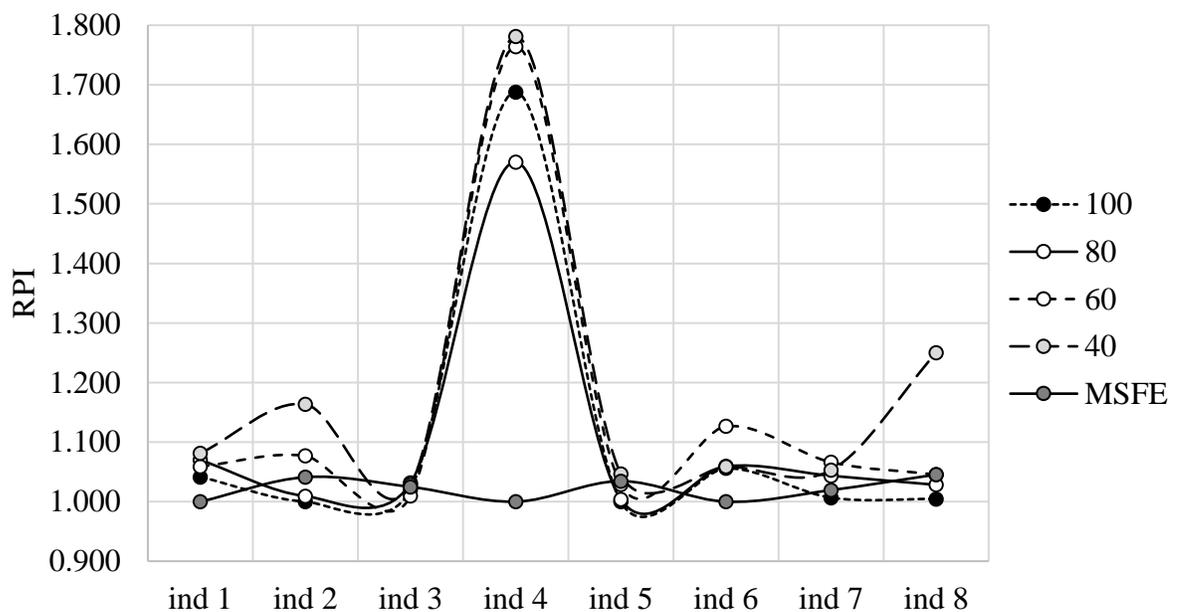
Индикатор	MSFE	100	80	60	40	20	BMA	SMA	BIC	MSE
<b>ind 1</b>	<b>1.000</b>	1.041	1.070	1.059	1.081	1.311	1.190	1.033	1.190	1.015
<b>ind 2</b>	1.041	<b>1.000</b>	1.009	1.077	1.163	1.573	1.308	1.066	1.438	1.270
<b>ind 3</b>	1.025	1.021	1.031	1.010	1.028	1.261	<b>1.000</b>	1.031	1.008	1.060
<b>ind 4</b>	<b>1.000</b>	1.688	1.570	1.764	1.781	3.900	2.171	1.415	2.193	1.314

Продолжение таблицы 3.2

<b>ind 5</b>	1.034	<b>1.000</b>	1.004	1.029	1.046	1.467	1.467	1.064	1.467	1.060
<b>ind 6</b>	<b>1.000</b>	1.056	1.059	1.127	1.059	1.344	1.063	1.012	1.063	1.260
<b>ind 7</b>	1.019	1.007	1.043	1.066	1.053	1.106	1.106	<b>1.000</b>	1.106	1.031
<b>ind 8</b>	1.045	1.005	1.028	1.045	1.250	2.000	<b>1.000</b>	1.077	<b>1.000</b>	1.305
<b>Средняя</b>	<b>1.021</b>	1.102	1.102	1.147	1.183	1.745	1.288	1.087	1.308	1.164

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

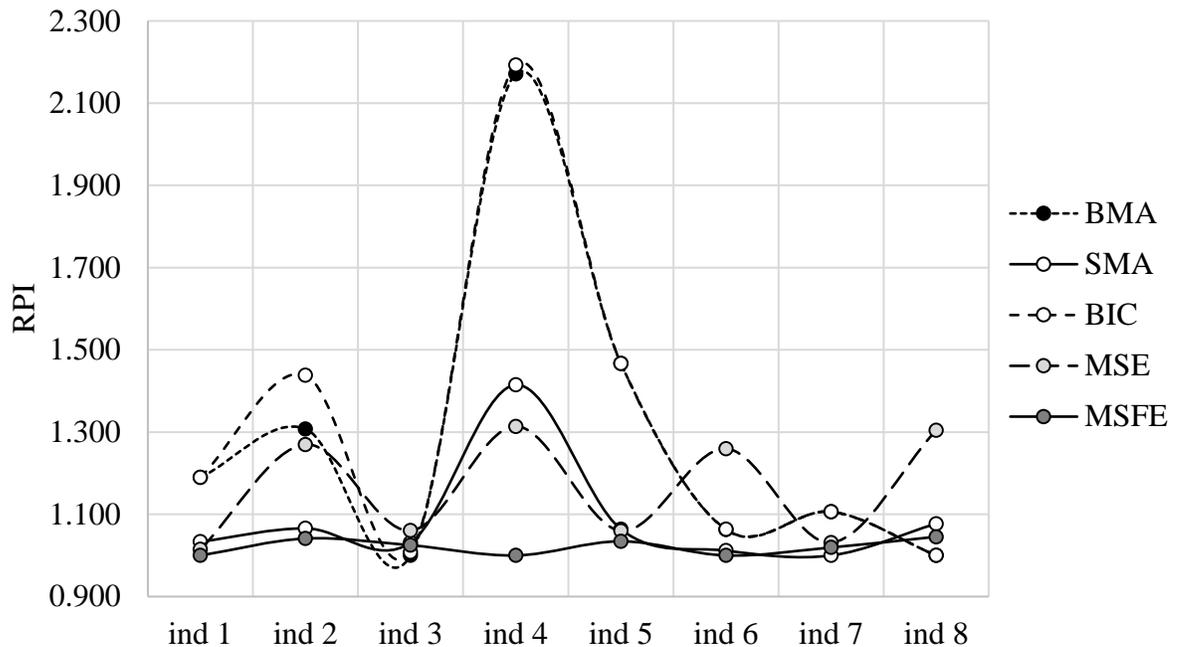
Проиллюстрируем представленные в таблице 3.2 результаты для легкости восприятия данных. На рисунках 3.28, 3.29 представлены значения RPI для рассматриваемых моделей и методов по каждому из макроэкономических индикаторов, на которых проводилось эмпирическое тестирование.



**Рисунок 3.28** – Сравнение анализируемых моделей, эмпирический эксперимент, без спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Из рисунка 3.28 видно, что предлагаемый метод взвешивания моделей в среднем показывает более высокую точность получаемых прогнозов, чем любая из отдельно взятых моделей, участвующая в создании комбинированной регрессии.



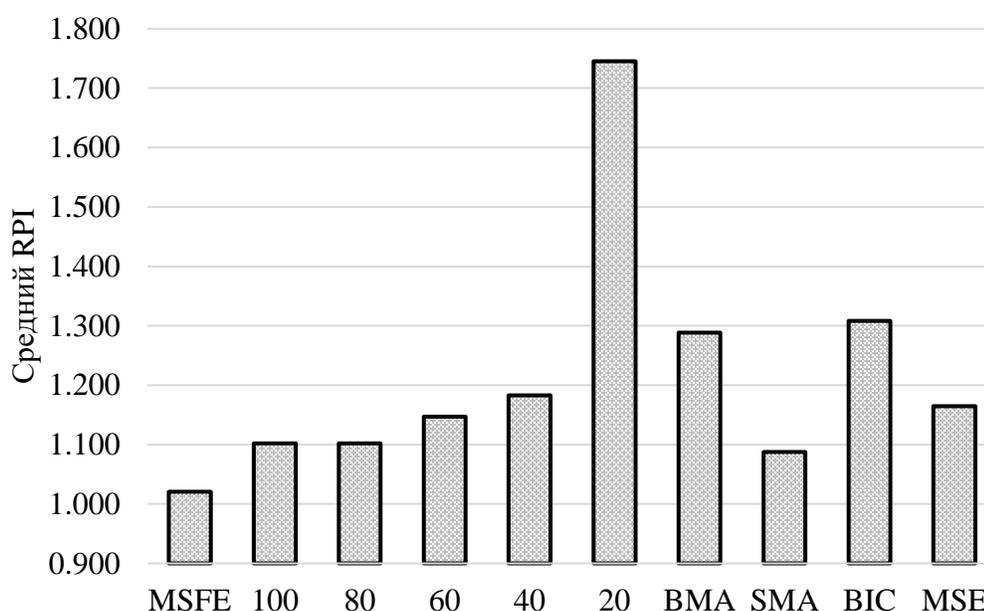
**Рисунок 3.29** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, без спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Анализируя рисунок 3.29, можно заключить, что MSFE взвешивание при моделировании практически любого из рассматриваемых макроэкономических индикаторов демонстрирует наилучшую эффективность среди рассматриваемых методов. Особенно превосходство предлагаемого метода заметно на примере прогнозирования индекса потребительских цен в России, поскольку модели тестировались на переходном периоде развития экономики РФ, характеризующимся постоянно меняющимися зависимостями макроэкономических индикаторов как друг

от друга, так и от собственной динамики. В данном случае ВМА и ВИС проявили себя не с лучшей стороны, показав более чем двукратное превосходство среднеквадратической реализованной ошибки прогноза над аналогичным показателем, полученным в результате применения MSFE взвешивания.

На рисунке 3.30 представлено сравнение усредненного индекса относительной эффективности рассматриваемых моделей при анализе вышеупомянутых макроэкономических показателей без проведения предварительной спецификации.



**Рисунок 3.30** – Усредненный RPI для рассматриваемых методов, эмпирический эксперимент, без спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Рисунок 3.30 наглядно демонстрирует превосходство предлагаемого в диссертационном исследовании метода взвешивания регрессионных моделей над каждой из подмоделей, а также над каждым из рассмотренных методов взвешивания

или выбора наилучшей модели в условиях прогнозирования реальных исторических данных макроэкономических процессов.

В рамках проводимого эмпирического эксперимента протестируем эффективность рассматриваемых методов взвешивания в условиях предварительной спецификации моделей. В начале данного раздела диссертации говорилось об использовании авторегрессий четвертого порядка (для ИПЦ России двенадцатого порядка) с обязательным включением всех лаговых переменных. Расширим данный эксперимент, предварительно отобрав переменные в каждое из взвешиваемых уравнений согласно методу обратного исключения, подробно рассмотренному в разделе 1.2 диссертационного исследования, с критерием оптимальности MSE.

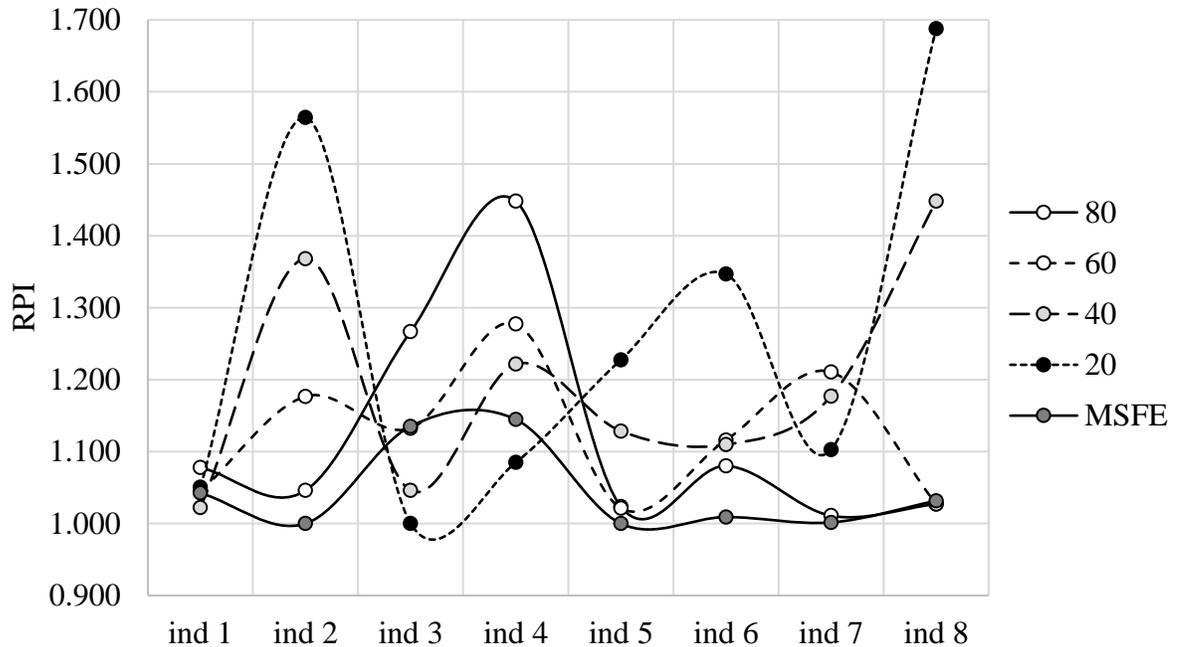
В таблице 3.3 представлены результаты эффективности анализируемых методов и моделей при проведении процедуры предварительной спецификации каждой из подмоделей, что означает, что данные подмодели могут отличаться по составу предикторов.

**Таблица 3.3** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, с применением спецификации

Индикатор	MSFE	100	80	60	40	20	BMA	SMA	BIC	MSE
<b>ind 1</b>	1.042	1.032	1.078	1.044	1.022	1.051	1.060	<b>1.000</b>	1.034	1.056
<b>ind 2</b>	<b>1.000</b>	1.035	1.046	1.177	1.368	1.564	1.282	1.095	1.277	1.224
<b>ind 3</b>	1.135	1.290	1.267	1.132	1.046	<b>1.000</b>	1.267	1.071	1.253	1.152
<b>ind 4</b>	1.145	2.402	1.448	1.277	1.222	1.085	1.260	1.101	1.260	<b>1.000</b>
<b>ind 5</b>	<b>1.000</b>	1.021	1.024	1.021	1.129	1.227	1.153	1.019	1.209	1.036
<b>ind 6</b>	1.009	1.121	1.080	1.116	1.110	1.347	1.080	<b>1.000</b>	1.080	1.025
<b>ind 7</b>	1.002	<b>1.000</b>	1.011	1.211	1.177	1.103	1.104	1.021	1.103	1.013
<b>ind 8</b>	1.032	1.014	1.027	1.027	1.448	1.688	<b>1.000</b>	1.063	<b>1.000</b>	1.113
<b>Средняя</b>	<b>1.046</b>	1.239	1.123	1.126	1.190	1.258	1.151	<b>1.046</b>	1.152	1.077

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

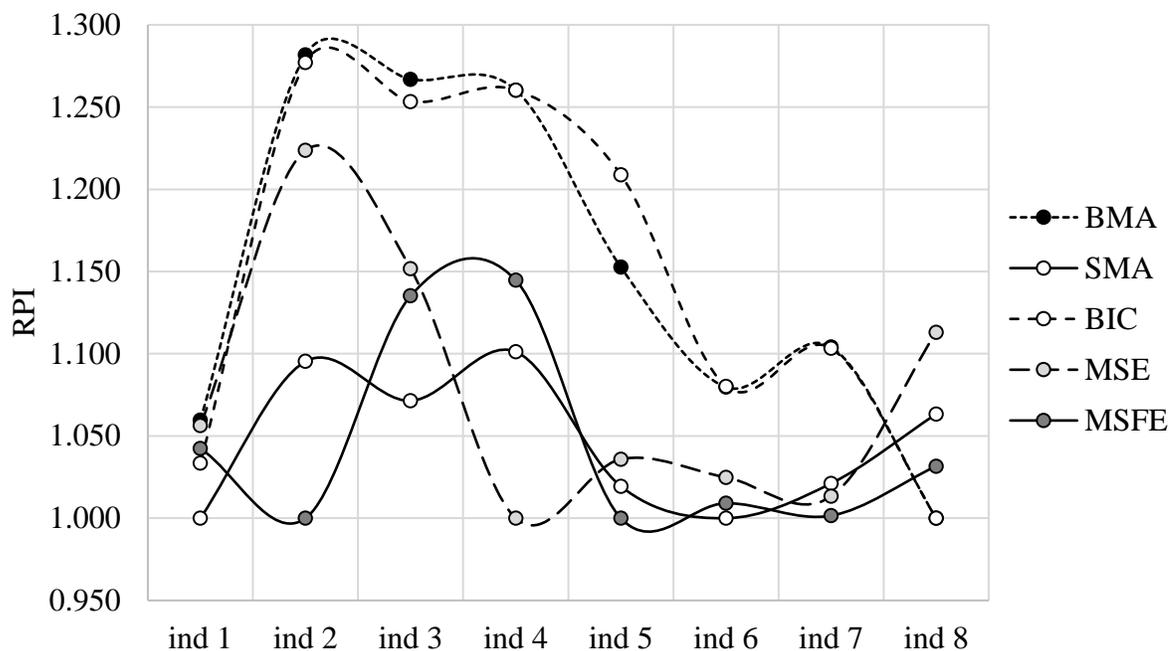
Как это было сделано в предыдущем случае, проиллюстрируем результаты, приведенные в таблице 3.3 с помощью графических методов, см. рисунки 3.19, 3.20.



**Рисунок 3.31** – Сравнение анализируемых моделей, эмпирический эксперимент, с применением спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Сравнивая рисунки 3.31 и 3.28, можно заключить, что значения относительной эффективности рассматриваемых моделей, построенных на окнах данных различной длины, претерпели разительные изменения при проведении процедуры предварительной их спецификации. Предлагаемый метод взвешивания в основном работает лучше каждой из рассматриваемых подмоделей за исключением тех случаев, когда моделировались ИПЦ Японии и ИПЦ России. При анализе этих временных рядов незначительно более высокую эффективность показали модели, построенные на коротких окнах данных ( $n_4 = 40$ ,  $n_5 = 20$ ).



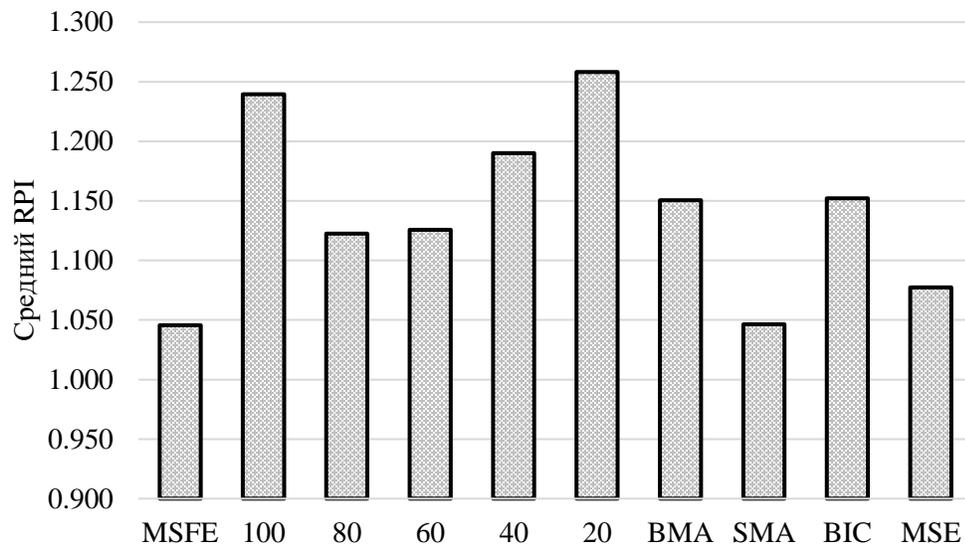
**Рисунок 3.32** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, с применением спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Рисунок 3.32 демонстрирует, что при проведении спецификации MSFE взвешивание по большей части является более предпочтительным. Исключение составляют ИПЦ Японии и ИПЦ России, где предлагаемый метод незначительно уступает по эффективности простоя средней и выбранной по критерию MSE модели. На рисунке 3.33 так же, как это было сделано выше, представим сравнение усредненного индекса относительной эффективности рассматриваемых моделей при анализе вышеупомянутых макроэкономических показателей при проведении предварительной спецификации взвешиваемых моделей.

Анализируя результаты, представленные на рисунке 3.21, можно заключить, что в условиях предварительной спецификации взвешиваемых регрессионных уравнений MSFE взвешивание в среднем превосходит остальные рассматриваемые модели и

методы. Однако в данном случае простая средняя также демонстрирует схожую эффективность вследствие того, что как уже было упомянуто ранее, SMA взвешивание хорошо работает при взвешивании качественно отобранных моделей, близких по своим характеристикам.



**Рисунок 3.33** – Усредненный RPI для рассматриваемых методов, эмпирический эксперимент, с применением спецификации

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Результаты проведенных в данном разделе диссертации экспериментов в целом подтверждают гипотезу о том, что взвешивание набора моделей зачастую демонстрирует более высокую точность прогнозов, чем выбор только одной из них. К примеру, простая средняя также, как и MSFE взвешивание работает лучше, чем любая отдельно взятая подмодель. BMA хоть и незначительно, но превосходит по точности метод отбора моделей на основе байесовского информационного критерия. Соответственно предлагаемый метод взвешивания также показывает более высокую эффективность в сравнении с выбором модели по критерию MSE. На рисунке 3.33

можно отчетливо наблюдать параболическую форму зависимости точности прогноза от длины окна наблюдений, что не произошло бы в случае выполнения всех классических предпосылок МНК. Таким образом, можем утверждать, что, во-первых, экономические процессы могут характеризоваться волатильностью вектора истинных параметров, а во-вторых, имеется возможность получить более точные предсказания этих процессов путем взвешивания по набору моделей, рассчитанных на окнах данных разной длины, в частности, с помощью предлагаемого в диссертационном исследовании MSFE взвешивания.

В данной главе диссертации эмпирически показывается невыполнимость одной из предпосылок классического метода наименьших квадратов (МНК), а именно неизменность вектора истинных параметров модели во времени при моделировании экономических процессов. В этой связи встает проблема выбора оптимального окна наблюдений, которая может быть решена либо путем выбора наилучшей согласно определенным критериям модели, либо посредством взвешивания по всему рассматриваемому набору моделей, рассчитанных на окнах данных разной длины. В данной главе разрабатывается расширение предложенного в главе 2 метода MSFE взвешивания регрессионных уравнений с целью получения возможности взвешивать модели, построенные на окнах данных разной длины. Данный метод основан на минимизации несмещенной оценки среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза. MSFE взвешивание помогает не только получить более адекватный точечный прогноз экономических показателей, но также получить доверительные интервалы для рассчитанных прогнозов с заданным уровнем значимости. Проведенные имитационные и эмпирические эксперименты подтверждают эффективность предлагаемого метода взвешивания линейных регрессионных уравнений и его применимость на практике. Главное отличие MSFE взвешивания от других анализируемых в главе 2 и 3 методов заключается в том, что данный метод принимает во внимание корреляции ошибок взвешиваемых подмоделей, а также

корреляции их прогнозов. Таким образом, принимая во внимание вышесказанное, можно заключить, что предлагаемый в диссертационном исследовании метод взвешивания регрессионных уравнений является самостоятельной единицей регрессионного анализа и заслуживает внимания исследователей, занимающихся прогнозированием временных рядов социально-экономических процессов.

## ГЛАВА 4 ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПРОГНОЗА РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ<sup>6</sup>

### 4.1 Проблема систематической недооценки доверительных интервалов при динамическом взвешивании регрессионных уравнений

В предыдущих главах диссертационного исследования были представлены методы спецификации и взвешивания регрессионных моделей, которые сравнивались между собой согласно величине среднеквадратической реализованной ошибки прогноза, напрямую характеризующей степень точности того или иного метода. Традиционно данный показатель играет главную роль в процессе принятия решения относительно того, какой метод использовать при моделировании рассматриваемого процесса, см. [11, 14, 17]. Несомненно, при выборе метода прогнозирования временных рядов особое внимание должно уделяться критерию точности разрабатываемых моделей, но также важно не забывать о возможности расчета достоверных доверительных интервалов, несущих в себе информацию как о волатильности самого моделируемого процесса, так и о степени неопределенности получаемых прогнозов, см. [58, 270, 179]. Особо отметим тот факт, что сам по себе точечный прогноз несет достаточно мало информации о будущем состоянии моделируемой системы, поскольку является лишь математическим ожиданием прогнозируемой случайной величины. Для возможности сделать значимые выводы относительно моделируемого процесса необходимо добавить к рассмотрению также дисперсию прогнозируемой величины, а еще лучше – функцию распределения вероятности, поскольку только комбинация из математического ожидания и

---

<sup>6</sup> Глава составлена по материалам работы автора [196]

доверительного интервала с заданным уровнем надежности дает существенную и интерпретируемую информацию о будущем состоянии моделируемого процесса, см. [59, 115, 107]. Вследствие вышесказанного представляется особо актуальным разработка методики расчета достоверных доверительных интервалов при динамическом прогнозировании макроэкономических процессов.

В данном разделе диссертационного исследования рассмотрим классический метод расчета интервальных прогнозов для регрессионных моделей и покажем его несостоятельность при динамическом моделировании временных рядов. Пусть имеется целевая переменная  $y_t$  и набор потенциальных объясняющих переменных  $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}$ , причем истинная структура модели неизвестна. Также предположим, что выбирается окно данных длиной  $n$  и целевая переменная прогнозируется на один период вперед ( $\hat{y}_{n+1}$ ) согласно специфицированному регрессионному уравнению, построенному по отобранным из изначального набора объясняющим переменным. Здесь не так важен тот факт, каким именно способом осуществляется процесс спецификации модели. Важно лишь то, что такая процедура проводится. После получения прогнозного значения  $\hat{y}_{n+1}$  окно данных сдвигается на одно наблюдение и заново проводится процедура спецификации регрессионного уравнения, по которому строится следующий прогноз ( $\hat{y}_{n+2}$ ). Если данная процедура повторяется снова и снова, то такой процесс будем называть динамическим прогнозированием временного ряда, на каждом шаге которого заново строится регрессионная модель для предсказания целевой переменной на один период вперед. Мотивация динамического прогнозирования вполне рациональна – такой подход к моделированию временных рядов макроэкономических процессов позволяет существенно сократить ошибку прогноза. Действительно, если провести спецификацию регрессионного уравнения всего один раз и по мере пополнения статистических данных с течением времени просто пересчитывать ее коэффициенты, то точность таких предсказаний будет значительно уступать точности моделей с динамической спецификацией модели, т.е.

с изменяющейся структурой по мере добавления новых статистических данных. Для доказательства данного утверждения проведем эмпирический эксперимент.

Как и в главе 3 диссертационного исследования проанализируем следующие макроэкономические индикаторы различных стран: Индекс Потребительских Цен (англ. Consumer Price Index, CPI) в США (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные) – ind 1, ИПЦ в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 2, ИПЦ в Японии (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 3, ИПЦ в России (01.1992-07.2019, месячные данные) – ind 4, денежный агрегат M2 в США (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные) – ind 5, безработица в США (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные) – ind 6, денежный агрегат M2 в Японии (Q1.1955-Q2.2019, квартальные данные) – ind 7 и безработица в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 8. Будем моделировать данные макроэкономические индикаторы с помощью модели линейной авторегрессии. В данном эксперименте тестировалась так называемая полная модель  $\dot{y}_{(n)}$ , представляющая собой авторегрессию двенадцатого порядка, против регрессионной модели  $y_{(n)}$ , специфицированной с помощью метода обратного исключения с критерием оптимальности MSE, детально рассмотренного в разделе 1.2 диссертационного исследования. Рассматривались окна данных следующих длин:  $n_1 = 100$ ,  $n_2 = 80$ ,  $n_3 = 60$ ,  $n_4 = 40$ ,  $n_5 = 20$ .

В таблице 4.1 представлен индекс сравнительной эффективности (RPI) для противопоставляемых моделей  $\dot{y}_{(n)}$  и  $y_{(n)}$ , рассчитанных на окнах данных с различным числом наблюдений.

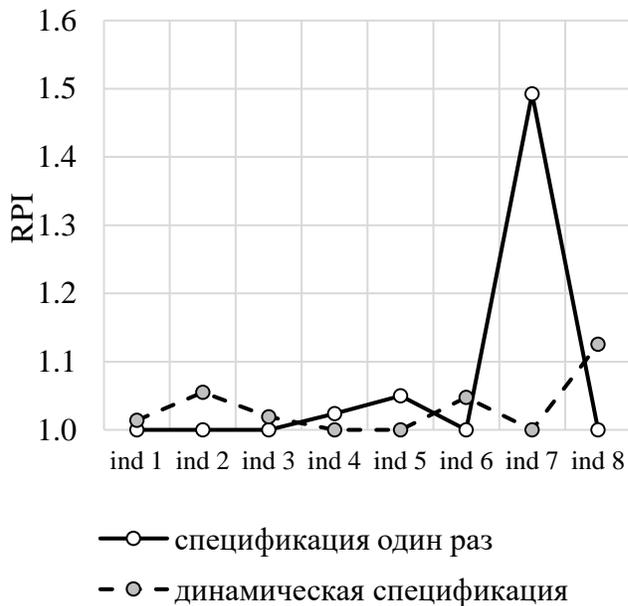
**Таблица 4.1** – Сравнение полной и специфицированной моделей для окон данных различной длины, эмпирический эксперимент

Индикатор	$\dot{y}_{(100)}$	$y_{(100)}$	$\dot{y}_{(80)}$	$y_{(80)}$	$\dot{y}_{(60)}$	$y_{(60)}$	$\dot{y}_{(40)}$	$y_{(40)}$	$\dot{y}_{(20)}$	$y_{(20)}$
ind 1	<b>1.000</b>	1.014	<b>1.000</b>	1.022	1.010	<b>1.000</b>	1.180	<b>1.000</b>	2.904	<b>1.000</b>
ind 2	<b>1.000</b>	1.055	<b>1.000</b>	1.060	1.040	<b>1.000</b>	1.227	<b>1.000</b>	2.896	<b>1.000</b>
ind 3	<b>1.000</b>	1.019	1.046	<b>1.000</b>	1.148	<b>1.000</b>	1.414	<b>1.000</b>	2.017	<b>1.000</b>

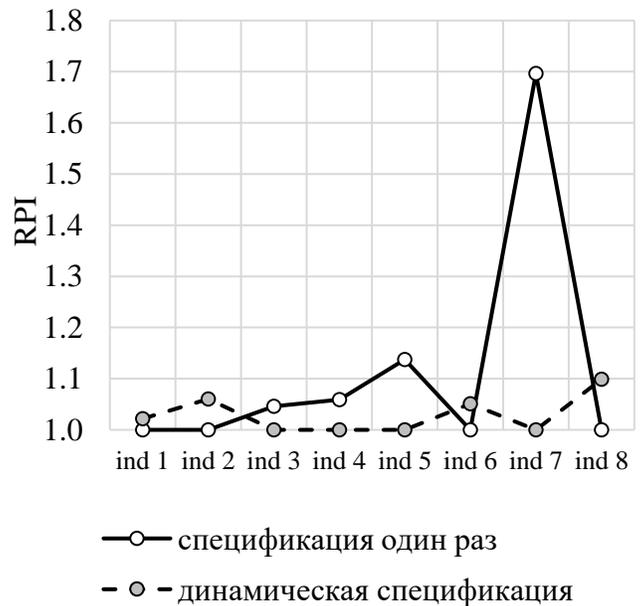
Продолжение таблицы 4.1

<b>ind 4</b>	1.024	<b>1.000</b>	1.059	<b>1.000</b>	1.117	<b>1.000</b>	1.047	<b>1.000</b>	2.289	<b>1.000</b>
<b>ind 5</b>	1.050	<b>1.000</b>	1.138	<b>1.000</b>	1.182	<b>1.000</b>	1.248	<b>1.000</b>	1.716	<b>1.000</b>
<b>ind 6</b>	<b>1.000</b>	1.048	<b>1.000</b>	1.051	<b>1.000</b>	1.010	<b>1.000</b>	1.051	1.872	<b>1.000</b>
<b>ind 7</b>	1.493	<b>1.000</b>	1.697	<b>1.000</b>	1.883	<b>1.000</b>	1.903	<b>1.000</b>	5.428	<b>1.000</b>
<b>ind 8</b>	<b>1.000</b>	1.125	<b>1.000</b>	1.099	<b>1.000</b>	1.037	1.358	<b>1.000</b>	1.476	<b>1.000</b>
<b>Средняя</b>	1.071	<b>1.033</b>	1.117	<b>1.029</b>	1.173	<b>1.006</b>	1.297	<b>1.006</b>	2.575	<b>1.000</b>

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США



**Рисунок 4.1** – Значения RPI для окна данных  $n = 100$



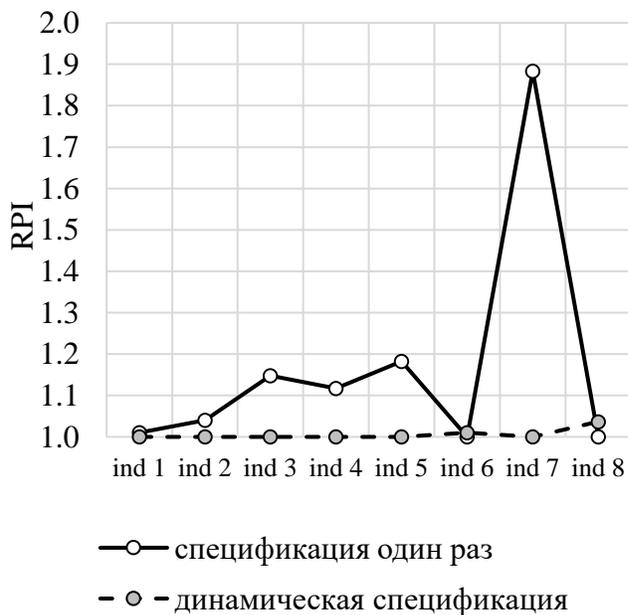
**Рисунок 4.2** – Значения RPI для окна данных  $n = 80$

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

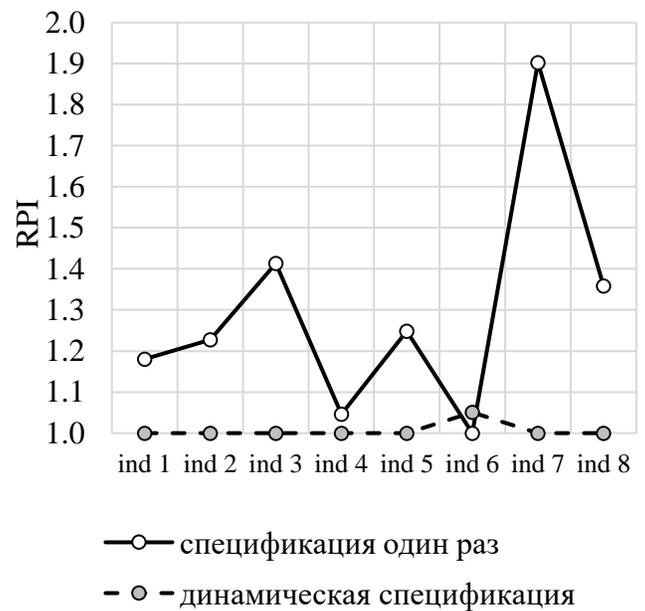
В качестве пояснения к числам, представленным в таблице 4.1, скажем, что модели сравнивались попарно для заданного окна данных; значение 1.000 говорит о превосходстве модели над противопоставляемой по критерию точности, а тысячные

доли после единицы – о том, на какую долю среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза по данной модели превышает аналогичный показатель для противопоставляемой модели. Таким образом, из таблицы 4.1 видно, что, в общем и целом, та модель, которая подвергалась процедуре динамической спецификации, представляется более эффективной, чем полная модель, специфицированная в начале эксперимента и имевшая неизменную структуру.

Для наглядного представления результатов проведенного эмпирического эксперимента изобразим на рисунках 4.1-4.6 графики, сравнивающие показатели относительной эффективности для рассматриваемых моделей при различном числе наблюдений в окне данных.

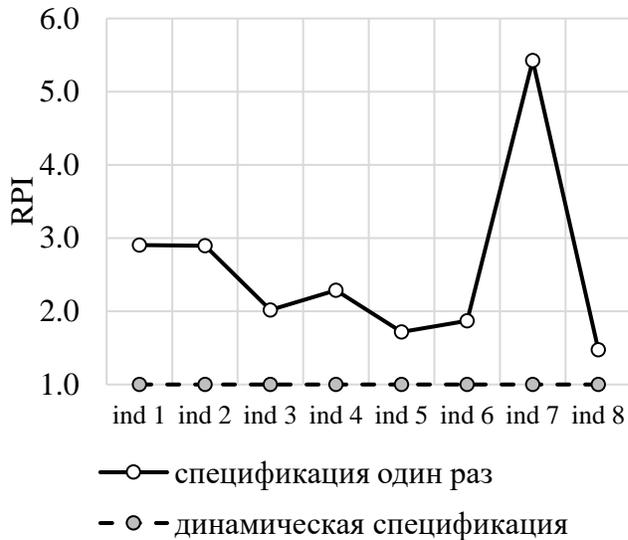


**Рисунок 4.3** – Значения RPI для окна данных  $n = 60$

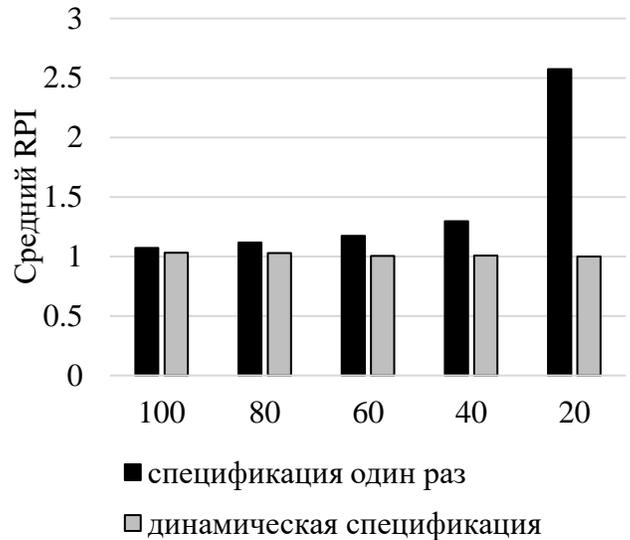


**Рисунок 4.4** – Значения RPI для окна данных  $n = 40$

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США



**Рисунок 4.5** – Значения RPI для окна данных  $n = 20$



**Рисунок 4.6** – Средние значения RPI для окон данных различной длины

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда, Федеральной службы государственной статистики РФ и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Анализируя рисунки 4.1-4.5, можно заключить, что с уменьшением числа наблюдений в окне данных модель, подвергаемая процедуре динамической спецификации, все более явно превосходит по точности полную модель, специфицированную только на первом шаге. Если при окне данных в 100 наблюдений модель  $y_{(100)}$  демонстрирует более высокую эффективность, чем модель  $\dot{y}_{(100)}$  лишь в трех случаях из восьми (см. рисунок 4.1), то при  $n = 80$  динамически специфицируемая регрессия  $y_{(80)}$  лучше модели  $\dot{y}_{(80)}$  в четырех случаях из восьми (см. рисунок 4.2), при  $n = 60$  – уже в шести из восьми (см. рисунок 4.3), при  $n = 40$  – в семи из восьми (рисунок 4.4) и, наконец, при  $n = 20$  модель  $y_{(20)}$  работает лучше противопоставляемой для любого из анализируемых макроэкономических индикаторов (рисунок 4.5). На рисунке 4.6 представлена гистограмма, сравнивающая среднюю эффективность двух противопоставляемых моделей по рассматриваемым

индикаторам при различной длине окна данных. По данной гистограмме можно отчетливо проследить экспоненциально увеличивающийся разрыв между среднеквадратическими реализованными ошибками прогноза сопоставляемых моделей по мере сокращения числа наблюдений в окне данных. Таким образом, по результатам проведенного эмпирического эксперимента можно заключить, что высказанное ранее утверждение о целесообразности применения процедуры динамической спецификации регрессионных моделей при моделировании временных рядов макроэкономических процессов с большой долей вероятности является верным. Действительно, экономические системы непрерывно эволюционируют, что подразумевает постоянно меняющиеся зависимости между числовыми характеристиками таких систем. В случае единоразовой спецификации регрессионного уравнения всегда присутствует некоторая вероятность неверного выбора его структуры, в то время как при динамической спецификации данный риск в некоторой степени нивелируется. Динамическая спецификация будет проигрывать единоразовой только в случае, когда изначально структура модели была выбрана верно, что является маловероятным в условиях большого числа потенциальных объясняющих переменных и короткого окна данных. Более того, даже при достаточно длинном окне данных при моделировании макроэкономических процессов изначально верно выбранная спецификация регрессионного уравнения не гарантирует превосходства над моделью с динамической спецификацией по причине возможности происхождения структурных сдвигов в анализируемой экономической системе, что сделает изначально верную спецификацию нерелевантной.

Однако при всей кажущейся предпочтительности динамической спецификации регрессионной модели с ней все же сопряжены некоторые сложности. Речь идет о том, что при постоянной перестройке структуры регрессионного уравнения традиционный метод расчета доверительных интервалов для прогнозируемых значений дает их систематически заниженные оценки. Напомним, что интервальный прогноз согласно

классическому методу наименьших квадратов рассчитывается с помощью распределения Стьюдента при малом числе наблюдений

$$\hat{y} - T_{\alpha, n-k} \cdot s < y < \hat{y} + T_{\alpha, n-k} \cdot s$$

и может быть вычислен с помощью квантилей нормального распределения в случае, если число наблюдений в окне данных достаточно велико.

$$\hat{y} - \Phi_{\alpha} \cdot s < y < \hat{y} + \Phi_{\alpha} \cdot s,$$

где  $s = \sqrt{s^2}$  является выборочной оценкой ожидаемого среднеквадратического отклонения ошибки прогноза.

В случае с постоянной структурой регрессионного уравнения данный метод вычисления интервального прогноза дает достоверные доверительные интервалы. Эмпирически это означает, что при заданном уровне значимости  $\alpha$  доля попадающих в рассчитанные доверительные интервалы прогнозируемых значений стремится к  $1 - \alpha$  при числе опытов, стремящемся к бесконечности. Однако в случае с динамически изменяющейся структурой регрессионного уравнения данный метод будет систематически недооценивать ширину истинных доверительных интервалов. Все дело в смещенности оценки истинной дисперсии ожидаемой ошибки прогноза, возникающей за счет проведения процедуры выбора структуры регрессионной модели. Для доказательства высказанного утверждения проведем следующий имитационный эксперимент.

Пусть моделируется целевая переменная  $y_t$  посредством набора потенциальных объясняющих переменных  $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}$ . Также в данном эксперименте будем полагать, что объясняющие переменные подчиняются нормальному распределению с нулевой средней и единичной дисперсией, а именно

$x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm} \sim N[E(x_{ti}) = 0, D(x_{ti}) = 1]$ . Помимо этого установим, что объясняющие переменные не мультиколлинеарны, то есть являются линейно независимыми друг от друга. Определим, что целевая переменная зависит от всех предикторов из сгенерированного набора данных с гиперболически убывающими значениями истинных параметров. Таким образом,  $y_t$  будет генерироваться как:

$$y_t = 2 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} x_{ti} + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  – «белый» шум, 2 – произвольно выбранная константа модели,  $\beta_i = 1/i$  – истинные коэффициенты модели, убывающие пропорционально порядковому номеру объясняющей переменной.

В данном эксперименте примем  $m = 6$  и проведем процедуру прогнозирования на один шаг вперед посредством динамической спецификации регрессионной модели согласно методу отбора по всем возможным комбинациям. Отбор переменных в уравнение проводился с использованием следующих критериев качества модели: несмещенная оценка дисперсии ошибок прогноза (MSE), F- статистика и Байесовский информационный критерий (BIC), которые были детально рассмотрены в разделе 1.2 диссертации. По каждой из рассчитанных регрессионных моделей записывались расчетные квадратические ошибки прогноза (MSE, BIC, F), определяемые по формуле (1.5), а также реализованные квадратические ошибки (MSE<sub>real</sub>, BIC<sub>real</sub>, F<sub>real</sub>), определяемые как квадрат разности между предсказанным и реализованным значениями целевой переменной. По итогам проведения 10 000 имитаций по каждой модели накопленные значения расчетных и реализованных квадратических ошибок усреднялись для дальнейшего сравнения и анализа. Для получения более полной информации о различиях в расчетных и реализованных ошибках тестирование проводилось для окон данных различной длины (см. таблицу 4.2).

**Таблица 4.2** – Сравнение реализованных и расчетных среднеквадратических ошибок прогноза

<b>n</b>	<b>MSE<sub>real</sub></b>	<b>MSE</b>	<b>BIC<sub>real</sub></b>	<b>BIC</b>	<b>F<sub>real</sub></b>	<b>F</b>
<b>20</b>	1.5681	1.1311	1.6041	1.1381	1.6397	1.1559
<b>30</b>	1.3538	1.1239	1.4351	1.1268	1.5635	1.1879
<b>40</b>	1.2001	1.1097	1.3669	1.1279	1.4589	1.1899
<b>50</b>	1.2373	1.0825	1.2571	1.1222	1.4101	1.2007
<b>60</b>	1.1983	1.0765	1.2773	1.1222	1.3398	1.2164
<b>70</b>	1.2098	1.0718	1.2435	1.1089	1.3213	1.2085
<b>80</b>	1.1314	1.0694	1.1835	1.1044	1.2812	1.2211
<b>90</b>	1.1206	1.0642	1.1797	1.0912	1.3195	1.2343
<b>100</b>	1.1278	1.0574	1.1623	1.0895	1.2899	1.2291
<b>110</b>	1.1021	1.0551	1.1552	1.0835	1.2781	1.2299
<b>120</b>	1.0823	1.0486	1.1435	1.0726	1.2667	1.2305

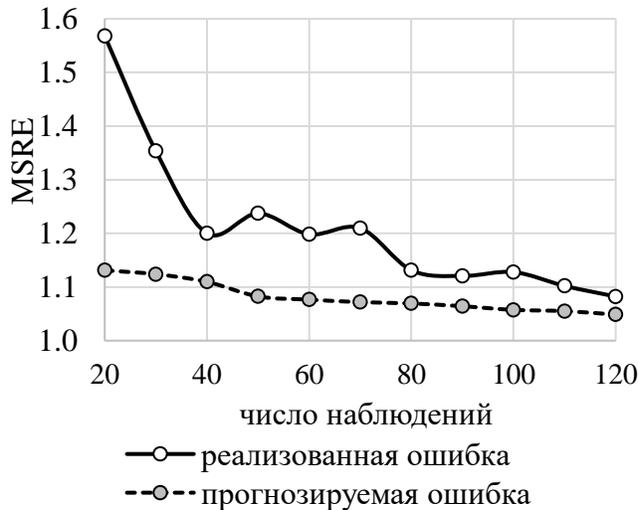
Источник: составлено автором

Как видно из таблицы 4.2, независимо от критерия качества, выбранного для спецификации регрессионного уравнения, расчетное значение дисперсии ошибки прогноза систематически недооценивает истинную дисперсию для любого количества наблюдений в окне данных из рассматриваемых.

Для графической иллюстрации результатов имитационного эксперимента, представленных в таблице 4.2, приведены графики динамики расчетной и реализованной дисперсии ошибок для рассматриваемых критериев качества уравнения регрессии, полученных при различных длинах окна наблюдений (см. рисунки 4.7-4.9). На рисунке 4.10 представлено сравнение расчетных среднеквадратических ошибок прогноза для моделей, динамически специфицируемых согласно критерию MSE, BIC и F-статистика. Данное сравнение проведено так же, как и в предыдущих случаях при различном числе наблюдений в окне данных.

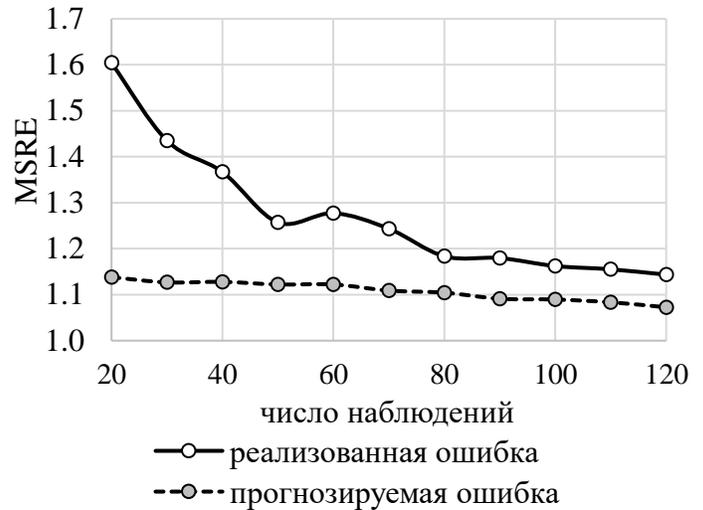
Анализируя рисунки 4.7-4.10, можно сказать, что при спецификации по различным критериям качества уравнения регрессии расчетная дисперсия ошибки

прогноза, хотя и недооценивает истинную во всех анализируемых случаях, тем не менее демонстрирует различное поведение.

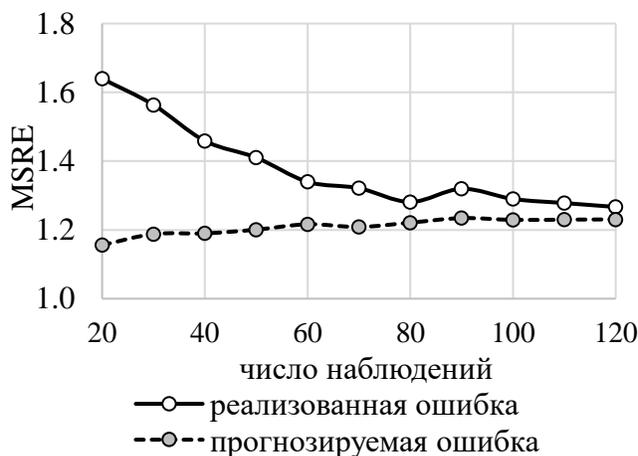


**Рисунок 4.7** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка (спецификация по критерию MSE)

Источник: составлено автором

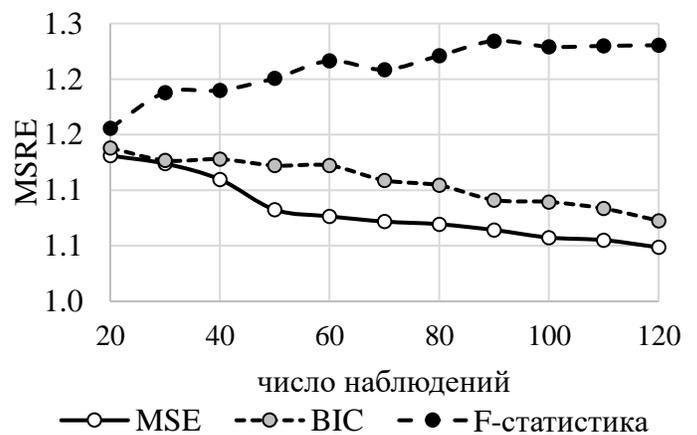


**Рисунок 4.8** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка (спецификация по критерию BIC)



**Рисунок 4.9** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка (спецификация по критерию F-стат.)

Источник: составлено автором



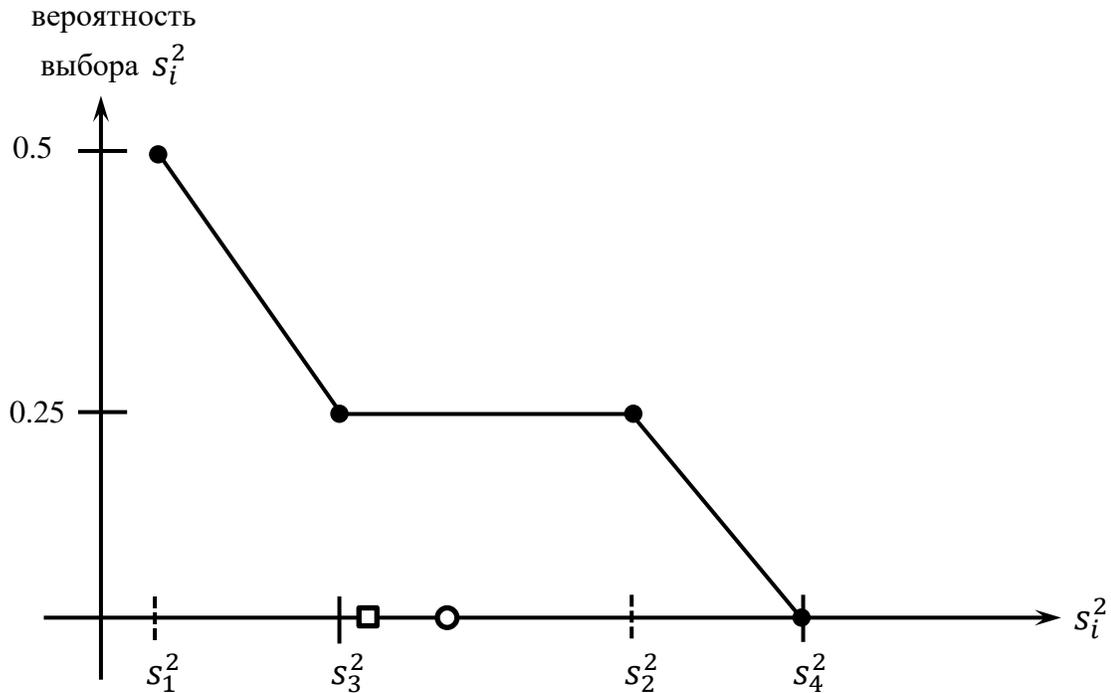
**Рисунок 4.10** – Сравнение расчетных среднеквадратических ошибок по различным критериям спецификации

Так, расчетная ошибка прогноза при спецификации по критерию MSE демонстрирует более крутую нисходящую динамику, нежели расчетная ошибка по критерию ВИС; в то время как расчетная ошибка по критерию F-статистика имеет восходящую тенденцию и движется навстречу реализованной среднеквадратической ошибке прогноза по мере увеличения числа наблюдений в окне данных.

Для того чтобы более детально разобраться в феномене смещенности оценки истинной дисперсии ошибки прогноза при проведении процедуры динамической спецификации, рассмотрим следующий абстрактный пример. Предположим, что имеются две регрессионные модели  $\hat{y}_1$  и  $\hat{y}_2$ , между которыми осуществляется выбор для дальнейшего моделирования. Представим, что по каждой из моделей по выборке возможно получение только двух вариантов значений несмещенных оценок истинных дисперсий ошибки прогноза, а именно по регрессии  $\hat{y}_1$  возможны варианты  $s_1^2$  и  $s_2^2$  с истинной дисперсией ошибок  $\sigma_1^2 = (s_1^2 + s_2^2)/2$ , а по регрессии  $\hat{y}_2$  – варианты  $s_3^2$  и  $s_4^2$  с истинной дисперсией ошибок  $\sigma_2^2 = (s_3^2 + s_4^2)/2$ . По каждой из моделей оба исхода получения того или иного значения  $s_i^2$  являются равновероятными. Следовательно, при использовании критерия минимальной среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза (MSE) при проведении динамической спецификации выбор модели осуществляется в пользу той, у которой этот показатель ниже, например, если в результате расчетов по выборке были получены значения  $s_2^2$  и  $s_3^2$ , выбирается модель  $\hat{y}_2$ . Таким образом, в рамках данного примера можно составить функцию плотности вероятности выбора определенного значения несмещенной оценки  $s_i^2$ , на которое мы будем полагаться при расчете истинной дисперсии ошибки прогноза (см. рисунок 4.11).

Как видно из рисунка 4.11, в случае выполнения описанных выше предпосылок значение  $s_1^2$  будет выбираться в пятидесяти процентах случаев, поскольку неважно какое значение несмещенной оценки истинной дисперсии ошибки прогноза по модели

$\hat{y}_2$  будет получено вместе с ним,  $s_3^2$  или  $s_4^2$ ; по критерию MSE выбор осуществляется в пользу  $s_1^2$ , то есть в пользу модели  $\hat{y}_1$ .



**Рисунок 4.11** – Функция плотности вероятности для значений  $s_i^2$

Источник: составлено автором

Значение  $s_3^2$  выбирается в двадцати пяти процентах случаев, поскольку оно классифицируется как предпочтительное только в случае совместного появления со значением  $s_2^2$ . Аналогично, значение  $s_2^2$  также имеет вероятность, равную двадцати пяти процентам, поскольку оно является предпочтительным при появлении вместе со значением  $s_4^2$ . У значения  $s_4^2$  шансы быть выбранным равны нулю, поскольку оно является максимальным из возможных и, следовательно, при выборе модели согласно минимизации критерия MSE никогда не выбирается. Таким образом, в трех случаях из четырех будет выбрана модель  $\hat{y}_1$  с истинной дисперсией ошибок, равной  $\sigma_1^2$  и в одном случае – модель  $\hat{y}_2$  с дисперсией ошибок  $\sigma_2^2$ . Отсюда получаем, что истинная

дисперсия ошибок прогноза при проведении такой процедуры выбора регрессионного уравнения равна  $0.75\sigma_1^2 + 0.25\sigma_2^2$  (окружность с заливкой белым на рисунке 4.3), в то время как в процессе непосредственного проведения расчетов прогнозируемая дисперсия ошибок будет вычисляться как  $0.5s_1^2 + 0.25s_2^2 + 0.25s_3^2$  (квадрат с заливкой белым на рисунке 4.3), что является заниженной оценкой истинной дисперсии. Действительно, так как  $s_1^2 < \sigma_1^2$  и  $s_1^2 < s_2^2$ , то можно показать, что  $0.5s_1^2 + 0.25s_2^2 < 0.75\sigma_1^2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1^2 < s_2^2 &\Rightarrow 0.5s_1^2 < 0.5s_2^2 \Rightarrow \\ 2s_1^2 + s_2^2 &< 1.5s_1^2 + 1.5s_2^2 \Rightarrow \\ 2s_1^2 + s_2^2 &< 3\sigma_1^2 \Rightarrow \\ 0.5s_1^2 + 0.25s_2^2 &< 0.75\sigma_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку  $s_3^2 < \sigma_2^2$ , то можно сделать вывод о том, что  $0.5s_1^2 + 0.25s_2^2 + 0.25s_3^2 < 0.75\sigma_1^2 + 0.25\sigma_2^2$ . Таким образом, на этом простом примере может быть наглядно показано, что при проведении процедуры динамической спецификации регрессионных моделей традиционные методы оценки дисперсии ошибки прогноза систематически дают ее заниженное значение.

Здесь следует отметить, что аналогичные выводы можно сделать также касаясь процедуры взвешивания регрессионных уравнений, которая имеет ту же самую сущность, что и процедура выбора моделей. Обоснуем данное утверждение с помощью простого имитационного эксперимента. Пусть проводится процедура взвешивания двух однофакторных регрессионных моделей, рассчитываемых на окнах данных длиной  $n_1$  и  $n_2$ , причем  $n_1 < n_2$ , т.е. моделируется целевая переменная  $y_t$  посредством одной объясняющей переменной, подчиняющейся нормальному распределению с нулевым матожиданием и единичной дисперсией

$x_t \sim N[E(x_t) = 0, D(x_t) = 1]$ . Определим, что моделируемая целевая переменная зависит от предиктора  $x_t$  следующим образом:

$$y_t = 2 + x_t + \varepsilon_t, \quad (4.2)$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  – «белый» шум, 2 – произвольно выбранная константа модели.

В таблице 4.3 представлено сравнение реализованной и расчетной среднеквадратической ошибки прогноза, полученных в результате взвешивания моделей с различным сочетанием длин окон наблюдений  $n_1$  и  $n_2$  согласно предложенному в главе 3 диссертационного исследования методу расчета весовых коэффициентов посредством минимизации ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза.

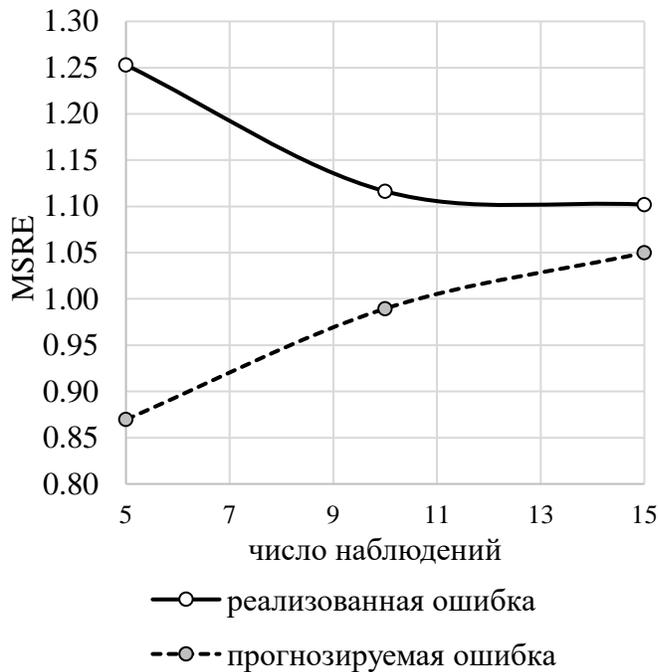
**Таблица 4.3** – Сравнение реализованных и расчетных среднеквадратических ошибок прогноза при взвешивании моделей

$n_1$	$n_2$	Реализованная ошибка	Прогнозируемая ошибка
5	20	1.2529	0.8697
10	20	1.1164	0.9895
15	20	1.1319	1.0499
10	50	1.1377	0.8858
20	50	1.0594	0.9454
35	50	1.0486	0.9922
20	100	1.0919	0.9125
40	100	1.0271	0.9661
60	100	1.0102	0.9811

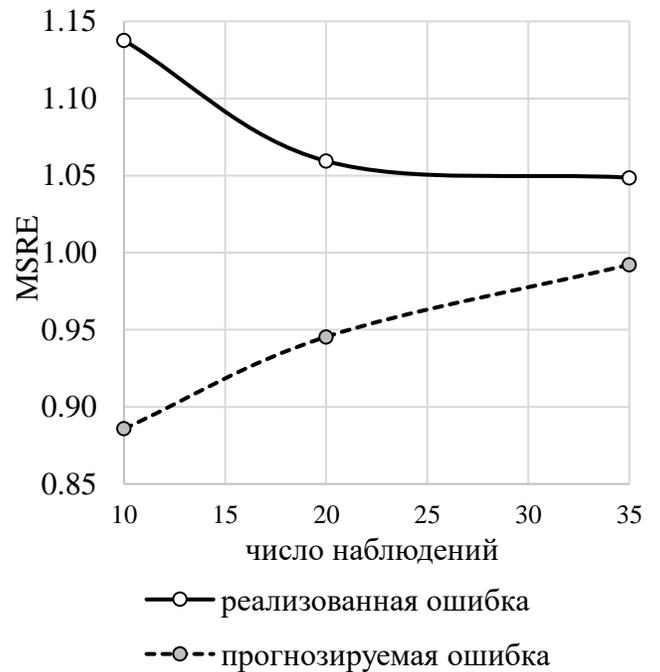
Источник: составлено автором

Из таблицы 4.3 можно заметить, что независимо от сочетания длин окон данных, расчетное значение дисперсии ошибки прогноза систематически недооценивает истинную дисперсию точно так же, как и в случае с динамической спецификацией регрессионного уравнения.

Для графической иллюстрации результатов проведенного имитационного эксперимента, представленных в таблице 4.3, на рисунках 4.12-4.14 приведены графики динамики расчетной и реализованной среднеквадратической ошибки прогноза для рассматриваемых различных сочетаний длин окон наблюдений.



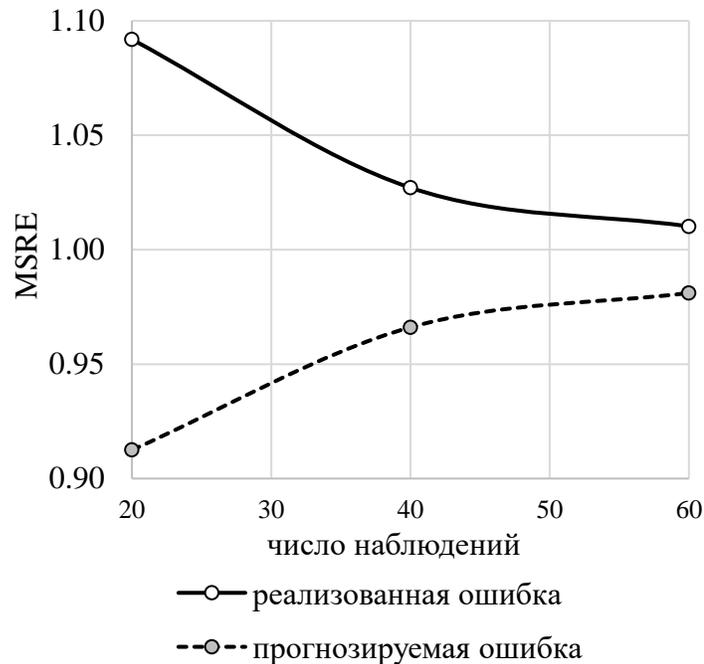
**Рисунок 4.12** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка при  $n_2 = 20$



**Рисунок 4.13** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка при  $n_2 = 50$

Источник: составлено автором

Анализируя рисунки 4.12-4.14, можно сказать, что при проведении процедуры динамического взвешивания регрессионных моделей наблюдается такой же феномен заниженной оценки дисперсии прогноза, как и в случае проведения динамической спецификации. Из представленных графиков можно заключить, что при приближении  $n_1$  к  $n_2$  расчетная и реализованная среднеквадратические ошибки прогноза движутся навстречу друг другу и полностью совпадают при  $n_1 = n_2$ .



**Рисунок 4.14** – Реализованная и расчетная среднеквадратическая ошибка при  $n_2 = 100$

Источник: составлено автором

Таким образом, представленные в данном разделе диссертации эксперименты явно свидетельствуют в пользу следующих двух утверждений: при прогнозировании временных рядов макроэкономических процессов процедура динамической спецификации и взвешивания регрессионных моделей демонстрирует более высокую эффективность, чем одноразовая спецификация и одноразовое взвешивание; при проведении динамической спецификации или взвешивания регрессионных моделей традиционные методы расчета доверительных интервалов для полученных прогнозов дают систематически заниженные значения ширины данных интервалов. Вследствие этого возникает дилемма выбора в пользу либо более точного прогноза, либо в пользу более надежных доверительных интервалов. Для разрешения данной дилеммы в следующем разделе диссертационного исследования была предпринята попытка разработки метода, дающего более надежные доверительные интервалы при

проведении процедуры динамического взвешивания регрессионных моделей согласно предложенному в главе 2 и 3 методу.

#### 4.2 Численный метод корректировок доверительных интервалов

Как было показано в предыдущем разделе диссертации, процедура взвешивания регрессионных уравнений во многом схожа по сущности с процедурой спецификации, поскольку она является своего рода категоричной формой взвешивания вследствие того, что одной спецификации присваивается весовой коэффициент, равный единице, и нулевые коэффициенты всем оставшимся спецификациям. Так как по результатам исследований, представленных в главах 2 и 3, можно сделать вывод о более высокой эффективности методов взвешивания по сравнению с методами спецификации, в данном разделе диссертационного исследования сконцентрируемся на разработке метода корректировок интервального прогноза при проведении процедуры динамического взвешивания регрессионных моделей.

При взвешивании моделей методом минимизации ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза, предложенным в главе 2 диссертационного исследования, вычисляется оценка истинной среднеквадратической ошибки прогноза (MSFE) согласно формулам (2.27) или (3.8). При этом истинная ошибка интегральной модели  $\bar{\sigma}^2$  является неизвестной величиной. Как было показано в предыдущем разделе оценка MSFE является несмещенной только в случае статической модели, при которой однажды рассчитанные веса не подвергаются изменениям в процессе моделирования рассматриваемого временного ряда. В случае с динамическим взвешиванием MSFE является смещенной оценкой  $\bar{\sigma}^2$  и дает систематически заниженные значения истинной дисперсии ошибок. Поскольку оптимизация весовых

коэффициентов является нелинейной процедурой, для которой недоступно аналитическое решение при количестве взвешиваемых моделей, превышающем три, вывод несмещенной оценки истинной дисперсии в явном виде представляется невозможным. Таким образом, при неизвестном значении  $\bar{\sigma}^2$  основной задачей является вычисления математического ожидания величины смещения оценки MSFE, на которое впоследствии она будет корректироваться. Здесь следует особо отметить, что такой подход также не дает абсолютно несмещенной оценки истинной среднеквадратической ошибки прогноза, а лишь позволяет уменьшить величину изначального смещения до приемлемого уровня. Для доказательства данного утверждения рассмотрим ситуацию, когда предполагается возможность точного вычисления коэффициента смещения оценки MSFE. Если бы имелась возможность вычислить данный коэффициент на каждом шаге прогнозирования, то согласно приведенной ниже формуле, поставленная задача была бы легко решена.

$$E\left( MSFE \frac{\bar{\sigma}^2}{MSFE} \right) = \bar{\sigma}^2 .$$

Однако для того чтобы вычислять коэффициент смещения на каждом шаге прогнозирования, необходимо знать значение  $\bar{\sigma}^2$ , которое является неизвестным. В таком случае наилучшим выбором будет вычисление математического ожидания коэффициента смещения. При таком подходе полученная оценка среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза будет также смещенной, что легко показать следующим образом:

$$E\left( MSFE \cdot E\left( \frac{\bar{\sigma}^2}{MSFE} \right) \right) = E(MSFE) \cdot E\left( \frac{\bar{\sigma}^2}{MSFE} \right) = E(MSFE) \cdot E\left( \frac{1}{MSFE} \right) \cdot \bar{\sigma}^2 \neq \bar{\sigma}^2 .$$

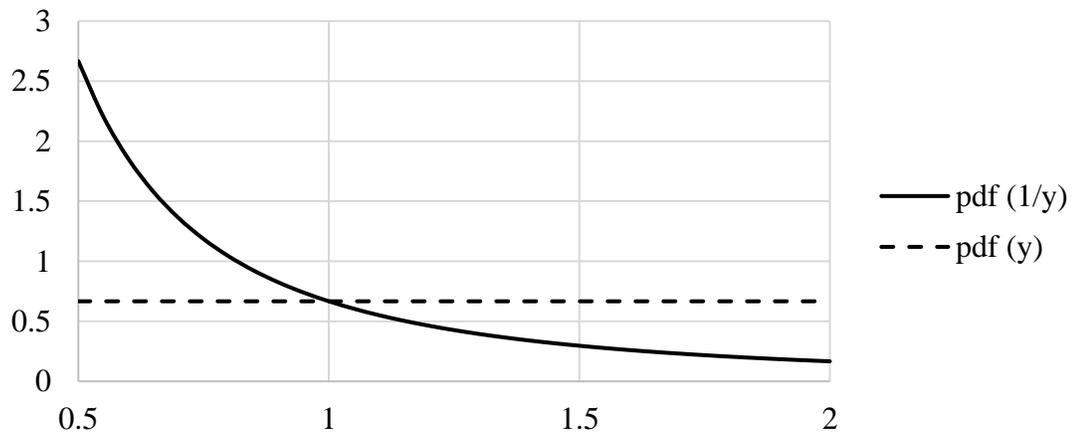
Отсюда следует, что при таком подходе приблизиться к несмещенной оценке можно только в случае, когда  $E(MSFE) \approx E(MSFE^{-1})$ , что выполняется далеко не всегда.

С целью доказательства данного утверждения рассмотрим равномерное распределение. Пусть случайная величина  $Y \sim U(a, b)$ , а другая случайная величина  $X = 1/Y$ . Тогда функция и плотность распределения  $X$  выводятся как показано ниже:

$$cdf(x) = P(X < x) = P\left(\frac{1}{Y} < x\right) = P\left(Y > \frac{1}{x}\right) = 1 - F_y\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \int_a^{1/x} f_y(t) dt .$$

$$pdf(x) = \left(1 - F_y\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x^2} .$$

На рисунке 4.15 представлены функции плотности вероятности для случайной величины  $Y$ , подчиняющейся равномерному закону распределения с параметрами  $a = 0.5$  и  $b = 2$ , и для величины  $X = 1/Y$ , область определения которой находится в промежутке от  $\frac{1}{b} = 0.5$  до  $\frac{1}{a} = 2$ .



**Рисунок 4.15** – Функция плотности вероятности для  $Y \sim U(0.5, 2)$  и  $X = 1/Y$

Источник: составлено автором

Таким образом, математическое ожидание случайной величины  $X$  вычисляется как показано ниже:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{b-a} \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{b-a} \ln x \Big|_{1/b}^{1/a} = \frac{\ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{b}}{b-a} \\
 &= \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} \neq \frac{2}{a+b}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.3) можно сделать вывод, что в случае равномерного распределения  $1/E(Y) \neq E(1/Y)$ , однако в предельном случае при  $a \rightarrow b$  данное равенство выполняется. Доказательство этого утверждения представлено ниже.

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{\left( \ln \frac{b}{a} \right)'}{(b-a)'} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{-\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a^2}}{-1} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{a} = \frac{1}{b}.$$

Здесь отметим, что не в предельных случаях математическое ожидание  $1/Y$  имеет большие значения, чем  $1/E(Y)$  (см. таблицу 4.4).

**Таблица 4.4** – Значения  $1/E(Y)$  и  $E(1/Y)$  при разных значениях параметров  $a$  и  $b$

$a$	$b$	$1/E(Y)$	$E(1/Y)$
1	2	0.667	0.693
1	3	0.500	0.549
1	4	0.400	0.462
1	10	0.182	0.256
5	6	0.182	0.182
5	9	0.143	0.147
5	20	0.080	0.092
0.1	0.2	6.667	6.931

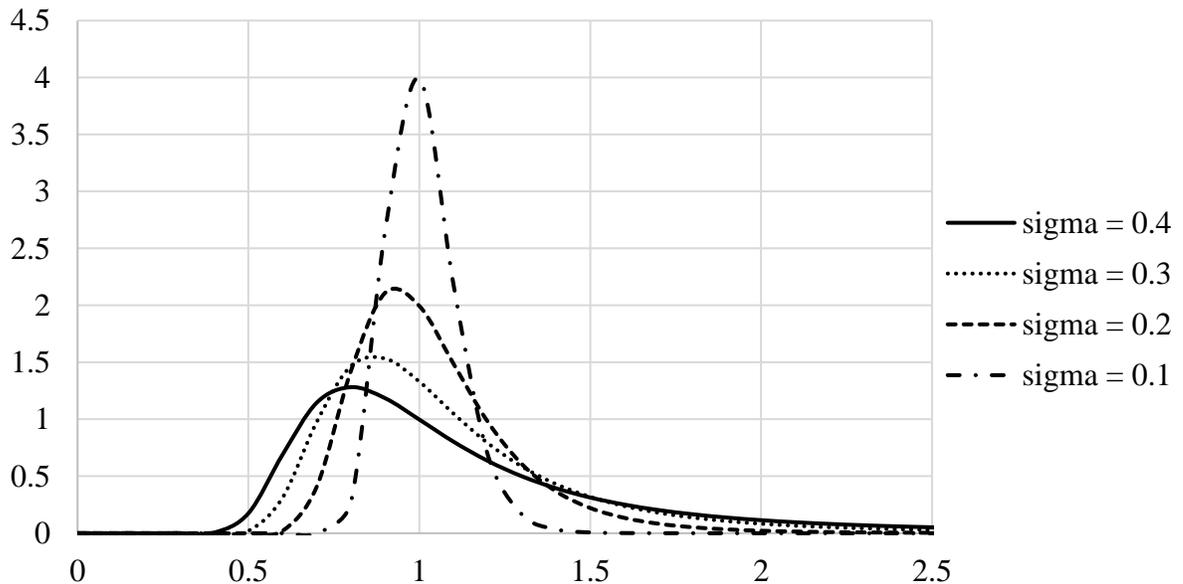
Источник: составлено автором

Далее рассмотрим случай, когда случайная величина подчиняется нормальному распределению, которое является предельным случаем для величины MSFE при числе наблюдений в окне данных, стремящемся к бесконечности. Пусть случайная величина  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ , а случайная величина  $X = 1/Y$ . Тогда функция распределения для  $X$  выводится следующим образом:

$$cdf(x) = P(X < x) = P\left(\frac{1}{Y} < x\right) = P\left(Y > \frac{1}{x}\right) = 1 - F_y\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{1/x} f_y(t) dt .$$

Отсюда легко получить функцию плотности вероятности.

$$pdf(x) = \left(1 - F_y\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(1/x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y x^2} e^{-\frac{(1/x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} .$$



**Рисунок 4.16** – Функция плотности вероятности для  $X = 1/Y$ , если  $Y \sim N(1, \sigma_y)$

Источник: составлено автором

На рисунке 4.16 представлены графики функций плотности вероятности для случайных величин, являющихся обратными к нормальным случайным величинам с единичным матожиданием и различной дисперсией. Из данного рисунка видно, что при увеличении превосходства математического ожидания  $Y$  над ее среднеквадратическим отклонением функция плотности вероятности случайной величины  $1/Y$  имеет все меньшую степень положительной асимметрии и сводится к нормальному закону распределения.

Математическое ожидание случайной величины, обратной к нормальной выводится как показано ниже:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot pdf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{(1/x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{(1/x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} dx .$$

Здесь отметим, что в данном случае значения  $1/E(Y)$  и  $E(1/Y)$  также не совпадают, как и при равномерном законе распределения. Однако, если параметр  $\mu_y$  значительно превосходит  $\sigma_y$ , то  $1/E(Y) \approx E(1/Y)$  (см. таблицу 4.5).

**Таблица 4.5** – Значения  $1/E(Y)$  и  $E(1/Y)$  при различных значениях параметров  $\mu_y$  и  $\sigma_y$

$\mu_y$	$\sigma_y$	$1/E(Y)$	$E(1/Y)$
1	0.4	1.000	1.168
1	0.3	1.000	1.115
1	0.2	1.000	1.046
1	0.1	1.000	1.010
2	0.4	0.500	0.523
2	0.3	0.500	0.512
3	0.4	0.333	0.340
3	0.3	0.333	0.337

Источник: составлено автором

Наконец рассмотрим масштабированное хи-квадрат распределение, которое напрямую связано с показателем MSFE при выполнении предпосылки о нормальности истинных ошибок взвешиваемых моделей. Пусть случайная величина  $Y \sim \chi^2(n)$ , а случайная величина  $X = \tau^2 Y/n$ , что может представлять собой случайную реализацию оценки истинной дисперсии ошибки регрессионной модели. Тогда функция распределения для  $X$  будет вычисляться следующим образом:

$$cdf(x) = P(X < x) = P\left(\frac{\tau^2 Y}{n} < x\right) = P\left(Y < \frac{xn}{\tau^2}\right) = \int_0^{xn/\tau^2} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} t^{n/2-1} e^{-t/2} dt,$$

а функция плотности вероятности как показано ниже.

$$pdf(x) = F_y\left(\frac{xn}{\tau^2}\right)' = \frac{\left(\frac{n}{2\tau^2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-\frac{xn}{2\tau^2}}. \quad (4.4)$$

Здесь  $n$  – число степеней свободы, а  $\tau^2$  – параметр, характеризующий значение истинной дисперсии. Далее несложно показать, что  $E(X) = \tau^2$ , так как

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^\infty x \frac{\left(\frac{n}{2\tau^2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-\frac{xn}{2\tau^2}} dx = \int_0^\infty \frac{\tau^2 y}{n} \frac{\left(\frac{n}{2\tau^2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{\tau^2 y}{n}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{y}{2}} d\frac{\tau^2 y}{n} \\ &= \frac{\tau^2}{n} \int_0^\infty y \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{\tau^2}{n} \cdot n = \tau^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $1/E(X) = 1/\tau^2$ , в то время как случайная величина, обратная к  $X$  подчиняется масштабированному обратному хи-квадрат распределению.

$$scale - inv - \chi^2 = \frac{(\gamma^2 n/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{e^{-\frac{n\gamma^2}{2x}}}{x^{1+n/2}}, \quad (4.5)$$

где  $\gamma^2 = 1/\tau^2$ . Это означает, что  $E(1/X) = \frac{n}{(n-2)\tau^2} \neq \frac{1}{\tau^2}$ , однако при достаточно большом числе наблюдений  $\frac{n}{(n-2)\tau^2} \approx \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow 1/E(X) \approx E(1/X)$ .

Исходя из вышеописанных примеров, можно заключить, что высказанная идея проведения поправок показателя MSFE может давать устойчивую коррекцию получаемого смещения при относительно длинных окнах данных. Исправленное значение для MSFE в случае динамического взвешивания регрессионных моделей предлагается вычислять следующим образом:

**Шаг 1.** Получить несмещенную оценку дисперсионно-ковариационной матрицы истинных ошибок  $\Sigma$  по взвешиваемым подмоделям согласно формуле (2.26).

**Шаг 2.** Положить, что полученная на предыдущем шаге матрица  $\Sigma$  является истинной и выполнить  $N$  раз следующий цикл:

- а). Сгенерировать по истинной дисперсионно-ковариационной матрице согласно распределению Уишарта случайную ее реализацию  $\Omega$ ;
- б). Провести оптимизацию весовых коэффициентов для вновь сгенерированной дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Omega$  согласно оптимизационной задаче (2.28);
- в). Рассчитать показатель MSFE согласно формулам (2.27) или (3.8) по оптимизированным весовым коэффициентам и сгенерированной дисперсионно-ковариационной матрице ошибок рассматриваемых подмоделей  $\Omega$ ;
- г). Рассчитать показатель MSFE по оптимизированным весовым коэффициентам и истинной дисперсионно-ковариационной матрице ошибок рассматриваемых подмоделей  $\Sigma$ ;

д). Рассчитать отношение показателя MSFE, полученного на предыдущем шаге и показателя MSFE, вычисленного в пункте в);

**Шаг 3.** Усреднить полученные в пункте д) отношения, что даст окончательный поправочный коэффициент.

**Шаг 4.** Умножить показатель MSFE для исходной модели на полученный на предыдущем шаге поправочный коэффициент.

Согласно данному алгоритму вычисления поправок для показателя MSFE предполагается, что получаемая выборочная дисперсионно-ковариационная матрица ошибок рассматриваемых подмоделей  $\Sigma$  равняется истинной, из которой впоследствии с помощью распределения Уишарта генерируются ее случайные реализации  $\Omega$  для вычисления величины смещения. Естественно полагать, что при таком подходе результаты работы предлагаемого метода будут отличаться от рассмотренных выше, поскольку, во-первых, выборочная дисперсионно-ковариационная матрица ошибок подмоделей, принятая за истинную, может сильно отличаться от настоящей истинной, а во-вторых, даже если выборочная и истинная матрицы достаточно близки, вычисляемое математическое ожидание отношения MSFE при взятой за истинную дисперсионно-ковариационной матрице  $\Sigma$  и MSFE при сгенерированной матрице  $\Omega$  зависит от получаемых в результате оптимизации весовых коэффициентов. Это означает что

$$E\left(\frac{\bar{\sigma}^2|w_1, w_2, \dots, w_M}{MSFE|w_1, w_2, \dots, w_M|\Omega}\right) \neq E(\bar{\sigma}^2|w_1, w_2, \dots, w_M) \cdot E\left(\frac{1}{MSFE|w_1, w_2, \dots, w_M|\Omega}\right) \quad (4.6)$$

вследствие того, что  $\bar{\sigma}^2|w_1, w_2, \dots, w_M$  не является константой и зависит от оптимизируемых весовых коэффициентов по случайной реализации дисперсионно-ковариационной матрицы ошибок подмоделей  $\Omega$ . Поскольку и  $\bar{\sigma}^2|w_1, w_2, \dots, w_M$ , и MSFE зависят от весовых коэффициентов, которые в свою очередь зависят от

матрицы  $\Omega$ , то  $\bar{\sigma}^2|w_1, w_2, \dots, w_M$  и  $MSFE|w_1, w_2, \dots, w_M|\Omega$  являются зависимыми величинами, что объясняет невыполнимость равенства (4.6). Тем не менее, как будет показано в следующем разделе диссертационного исследования, несмотря на данные неточности в вычислении несмещенной оценки дисперсии ошибок комбинированной модели при динамическом взвешивании предлагаемый алгоритм помогает существенно приблизиться к истинной дисперсии ошибок.

Следует особо отметить тот факт, что при взвешивании регрессионных моделей согласно предлагаемому методу, получаемая выборочная дисперсионно-ковариационная матрица ошибок моделей может оказаться вырожденной вследствие различающегося числа степеней свободы для каждого уникального элемента, что выражается в том, что представляется затруднительным ее использование для последующих случайных генераций. В таком случае представляется возможным вычислить верхнюю границу для несмещенной оценки дисперсии ошибок прогноза путем введения предположения о том, что  $\Omega$  является диагональной матрицей. При принятии данной гипотезы дисперсии ошибок каждой подмодели генерируются независимо друг от друга, что создает максимальную энтропию показателя, рассчитываемого в пункте в) Шага 2.

Если взвешиваются подмодели, рассчитанные на окнах данных разной длины, но при этом одинаковые по составу, то число степеней свободы для дисперсии ошибок  $j$ -ой модели и для ковариации ошибок  $i$ -ой и  $j$ -ой моделей совпадают при том, что окно  $i$ -ой модели длиннее окна  $j$ -ой. Действительно:

$$\begin{aligned}
 tr(\tilde{A}_i \tilde{A}_j) &= tr\left[\left(\tilde{I}_{ni} - \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T\right) \left(\tilde{I}_{nj} - \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T\right)\right] \\
 &= tr\left(\tilde{I}_{nj} - \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T - \tilde{X}_j (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_j^T + \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T\right) \\
 &= tr\left(\tilde{I}_{nj} - \tilde{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T - \tilde{X}_j (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_j^T + \tilde{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T\right) \\
 &= tr(\tilde{I}_{nj}) - tr\left((X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T \tilde{X}_j\right) - tr\left((X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_j^T \tilde{X}_j\right) + tr\left((X_i^T X_i)^{-1} \tilde{X}_i^T \tilde{X}_i\right) \\
 &= tr(\tilde{I}_{nj}) - tr\left((X_j^T X_j)^{-1} \tilde{X}_j^T \tilde{X}_j\right) = tr(\tilde{A}_j).
 \end{aligned}$$

Следовательно, матрица числа степеней свободы выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} n_1 - k & n_2 - k & \cdots & n_M - k \\ n_2 - k & n_2 - k & \cdots & n_M - k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_M - k & n_M - k & \cdots & n_M - k \end{vmatrix}, \quad (4.7)$$

где  $n_1 > n_2 > \cdots > n_M$  – числа наблюдений в рассматриваемых окнах данных, а  $k$  – количество параметров каждого из взвешиваемых уравнений.

Помимо этого, сумма квадратов ошибок  $j$ -ой модели и сумма произведений  $i$ -ой и  $j$ -ой моделей также совпадают при условии, что окно  $i$ -ой модели имеет большую длину, чем окно  $j$ -ой модели. Данное утверждение легко доказать с помощью следующих выкладок.

$$\begin{aligned} \check{e}_i^T \check{e}_j &= (\check{Y}_i - \check{X}_i B_i)^T (\check{Y}_j - \check{X}_j B_j) = \\ &= (\check{Y}_i - \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T \check{Y}_i)^T (\check{Y}_j - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_j^T \check{Y}_j) \\ &= \check{Y}_i^T (\check{I}_{n_i} - \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T) (\check{I}_{n_j} - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_j^T) \check{Y}_j \\ &= \check{Y}_i^T (\check{I}_{n_i} - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_i^T - \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T + \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_j^T) \check{Y}_j \\ &= \check{Y}_i^T (\check{I}_{n_i} - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_i^T - \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T + \check{X}_i (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T) \check{Y}_j \\ &= \check{Y}_i^T (\check{I}_{n_i} - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_i^T) \check{Y}_j = \check{Y}_i^T \check{Y}_j - \check{Y}_i^T \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_i^T \check{Y}_j \\ &= \check{Y}_j^T \check{Y}_j - \check{Y}_i^T \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_j^T \check{Y}_j = \check{Y}_j^T (\check{I}_{n_j} - \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} \check{X}_j^T) \check{Y}_j \\ &= (\check{Y}_j - \check{X}_j B_j)^T (\check{Y}_j - \check{X}_j B_j) = \check{e}_j^T \check{e}_j. \end{aligned}$$

Исходя из приведенного доказательства и вида матрицы (4.7), можно говорить о том, что выборочная дисперсионно-ковариационная матрица ошибок взвешиваемых моделей выглядит как показано ниже:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_M^2 \\ s_2^2 & s_2^2 & \cdots & s_M^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_M^2 & s_M^2 & \cdots & s_M^2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где  $s_i^2 = \frac{\check{e}_i^T \check{e}_i}{n_i - k}$  – несмещенная оценка дисперсии ошибок  $i$ -ой модели.

Таким образом, для случайной генерации  $\Omega$  из матрицы  $\Sigma$  достаточно сгенерировать  $M$  уникальных элементов, которыми являются несмещенные оценки дисперсий каждой из взвешиваемых подмоделей. Данные элементы генерируются исходя из распределения хи-квадрат с числом степеней свободы  $n_i - k$ . Также следует отметить, что при взвешивании моделей одинакового состава, рассчитанных на окна данных разной длины, элементы  $\check{\theta}_{ij} = \check{\theta}_{ii} \quad \forall i \geq j$ , что доказывается как показано ниже:

$$\begin{aligned} \check{\theta}_{ij} &= 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} \check{X}_i^T \check{X}_j (X_j^T X_j)^{-1} X_{j(n+1)}^T \\ &= 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} X_{j(n+1)}^T = 1 + X_{i(n+1)} (X_i^T X_i)^{-1} X_{i(n+1)}^T = \check{\theta}_{ii}. \end{aligned}$$

Таким образом, для получения более надежной оценки истинной дисперсии ошибки прогноза в условиях вырожденности матрицы  $\Omega$  рекомендуется использовать среднюю арифметическую изначально полученной оценки MSFE и MSFE, рассчитанного согласно предлагаемому методу при предположении о том, что  $\Omega$  является диагональной матрицей. Предлагаемый поправочный коэффициент позволяет в некоторой степени нивелировать заниженную оценку среднеквадратической ошибки прогноза при проведении процедуры динамического взвешивания, получаемую в результате применения классического метода оценки дисперсии ошибки прогноза. Вследствие этого можно заключить, что в результате

применения предлагаемого метода разрешается дилемма выбора в пользу точности прогнозирования (динамического взвешивания) или в пользу надежности доверительных интервалов (статического взвешивания), поскольку он позволяет получать более достоверные доверительные интервалы при динамическом взвешивании регрессионных уравнений.

В данной диссертационной работе рассматриваются в основном методы параметрической эконометрики, где, в частности, предполагается нормальное распределение ошибок модели. Однако при моделировании макроэкономических процессов зачастую распределение ошибок характеризуется «толстыми» хвостами и не в полной мере описывается гауссовским законом. В связи с этим для получения более надежных доверительных интервалов можно воспользоваться неравенством Чебышева, которое не накладывает ограничений на форму распределения случайной величины.

#### **4.3 Апробация метода повышения достоверности интервального прогноза на имитационных и исторических данных**

В данном разделе диссертационного исследования проведем тестирование разработанного численного метода расчета поправочного коэффициента для классической оценки дисперсии ошибки прогноза при динамическом взвешивании моделей. Начнем с имитационного эксперимента. В данном эксперименте предположим, что целевая переменная  $y_t$  зависит только от одной объясняющей переменной  $\{x_t \sim N(1,1), t = 1, \dots, n\}$  и генерируется согласно указанной ниже формуле:

$$y_t = x_t + \varepsilon_t,$$

где  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .

Далее получаемая выборка разбивалась на несколько окон данных различной длины, по которым строились и впоследствии взвешивались регрессионные модели одинакового состава. Динамическое взвешивание моделей осуществлялось согласно методу минимизации несмещенной оценки ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза, разработанному в главе 3 диссертационного исследования, после чего рассчитывался поправочный коэффициент по численному методу, представленному в предыдущем разделе, на который умножалась получаемая классическая оценка дисперсии ошибки прогноза. Для проверки эффективности работы поправочного коэффициента сравним реализованную, исправленную в соответствии с предлагаемым методом и классическую среднеквадратическую ошибку прогноза.

В таблице 4.6 представлены результаты имитационного эксперимента при взвешивании двух регрессионных уравнений, рассчитанных на окнах длины  $n_1$  и  $n_2$ . Для получения реализованной среднеквадратической ошибки прогноза, исправленной и классической оценок дисперсии ошибок при каждом сочетании значений  $n_1$  и  $n_2$  использовалось по 10 000 имитаций. Жирным шрифтом для каждой комбинации значений  $n_1$  и  $n_2$  выделена та оценка средней дисперсии ошибки прогноза, которая оказалась ближе к реализованной среднеквадратической ошибке прогноза.

**Таблица 4.6** – Реализованная, классическая и исправленная среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 2-х уравнений, имитационный эксперимент

$n_1$	$n_2$	реализованная	исправленная	классическая
10	15	1.1829	<b>1.2693</b>	1.0405
10	20	1.1422	<b>1.1661</b>	0.9758
10	40	1.1036	<b>1.0489</b>	0.9041
10	80	1.0683	<b>1.0049</b>	0.8779
20	30	1.0885	<b>1.1503</b>	0.9981
20	60	1.0680	<b>1.0544</b>	0.9414

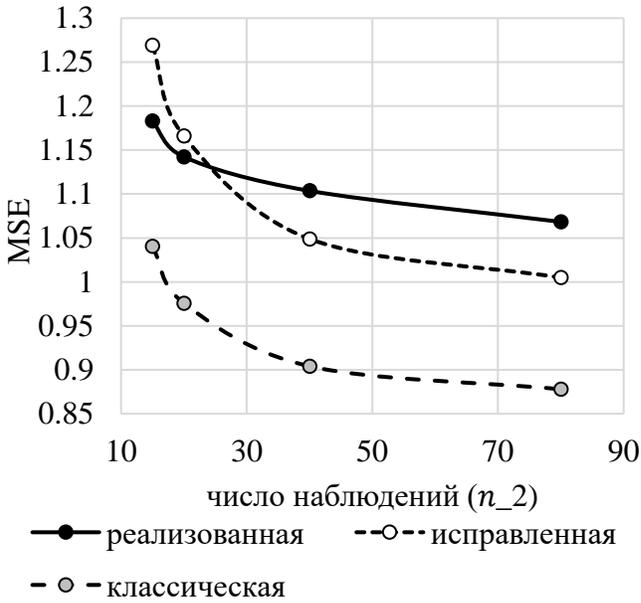
Продолжение таблицы 4.6

20	80	1.0522	<b>1.0308</b>	0.9266
20	100	1.0511	<b>1.0229</b>	0.9233
50	80	1.0461	<b>1.0663</b>	0.9765
50	100	1.0167	<b>1.0495</b>	0.9669
50	150	1.0101	<b>1.0252</b>	0.9534
50	200	1.0005	<b>1.0155</b>	0.9487
<b>Средняя</b>		1.0692	<b>1.0753</b>	0.9528

Источник: составлено автором

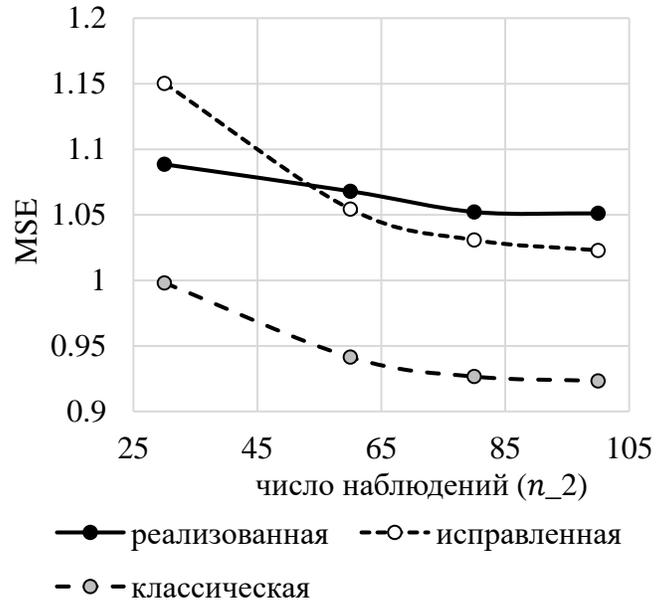
Как видно из таблицы 4.6, в случае динамического взвешивания двух регрессионных моделей при всех рассматриваемых сочетаниях  $n_1$  и  $n_2$  исправленная оценка дисперсии ошибок показывает более близкие значения к реализованной, чем классическая, которая во всех случаях ее недооценивает. Для иллюстрации полученных результатов имитационного эксперимента на рисунках 4.17-4.19 представлены сравнения реализованной, исправленной и классической дисперсий ошибок прогноза. Рисунок 4.17 отражает динамику взаимного изменения трех рассматриваемых показателей при фиксированном значении числа наблюдений в одном из окон данных ( $n_1 = 10$ ) и изменяющемся числе наблюдений в другом. На рисунке 4.18 представлена аналогичная динамика, но уже при фиксированном значении числа наблюдений  $n_1 = 20$  и, наконец, рисунок 4.19 показывает изменения анализируемых показателей при фиксированной длине окна наблюдений  $n_1 = 50$ .

Как видно из рисунка 4.17, реализованная среднеквадратическая ошибка прогноза (MSRE) показывает зависимость гиперболического типа от числа наблюдений во втором окне данных  $n_2$  при  $n_1 = 10$ . Классический расчет ожидаемой среднеквадратической ошибки прогноза (MSFE) согласно формуле (3.8) также демонстрирует схожую гиперболическую связь с  $n_2$ , но при этом, как и было предположено в разделе 4.1 диссертационного исследования, дает систематически заниженные оценки истинной дисперсии ошибок.

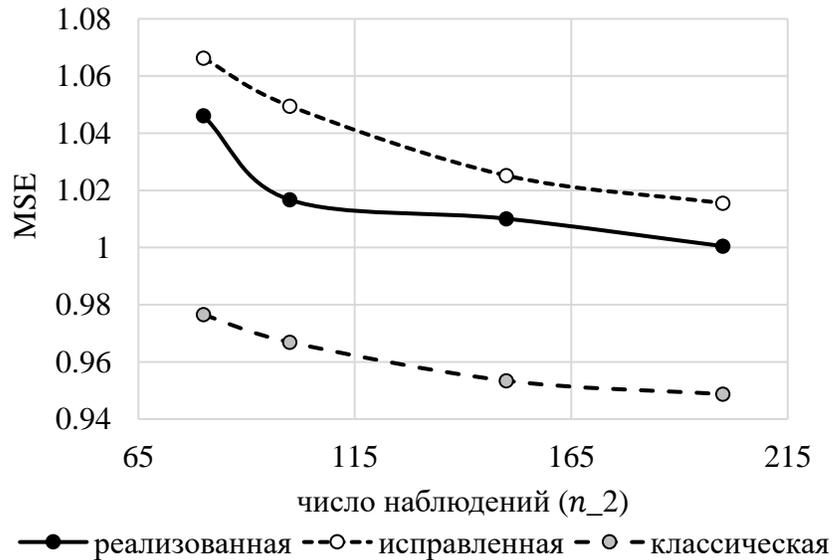


**Рисунок 4.17** – Точность исправленной оценки дисперсии ошибок по сравнению с классической при  $n_1 = 10$

Источник: составлено автором



**Рисунок 4.18** – Точность исправленной оценки дисперсии ошибок по сравнению с классической при  $n_1 = 20$



**Рисунок 4.19** – Точность исправленной оценки дисперсии ошибок по сравнению с классической при  $n_1 = 50$

Источник: составлено автором

Предлагаемый метод исправленной MSFE путем умножения классической MSFE на поправочный коэффициент дает несколько завышенные оценки истинной дисперсии ошибок при  $n_2$ , относительно близком к  $n_1$ , и несколько заниженные – при  $n_2$ , существенно превышающем  $n_1$ . Схожая картина в условиях более пологой гиперболической формы наблюдается и на рисунке 4.18 при  $n_1 = 20$ . Классическая оценка истинной дисперсии ошибок при любом значении  $n_2$  примерно на 10% недооценивает реализованную среднеквадратическую ошибку прогноза, а исправленная оценка при коротком окне данных второй модели несколько завышает оценку реализованной MSFE, при длинном – занижает. Рисунок 4.19 также демонстрирует гиперболическую связь рассчитанных среднеквадратических ошибок прогноза и числа наблюдений во втором окне данных, однако в данном случае исправленная MSFE при всех рассматриваемых значениях  $n_2$  слегка переоценивает истинную дисперсию ошибок прогноза, постепенно приближаясь к ней по мере роста  $n_2$ . Анализируя рисунки 4.17-4.19 можно также сделать общий вывод о том, что при увеличении длины рассматриваемых окон данных  $n_1$  и  $n_2$  разница между сравниваемыми оценками и реализованной дисперсией ошибки прогноза уменьшается, что естественно, так как оценка дисперсии ошибок по каждой из взвешиваемых моделей с ростом числа наблюдений стремится к истинной.

В качестве продолжения имитационного эксперимента приведем в таблице 4.7 результаты применения предлагаемого поправочного коэффициента при взвешивании трех регрессионных уравнений, рассчитанных на окнах данных длины  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ .

**Таблица 4.7** – Реализованная, классическая и исправленная среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 3-х уравнений, имитационный эксперимент

$n_1$	$n_2$	$n_3$	реализованная	исправленная	классическая
10	15	20	1.1540	<b>1.2177</b>	0.9674
10	20	40	1.0949	<b>1.0880</b>	0.8970
10	40	80	1.0708	<b>1.0238</b>	0.8702

Продолжение таблицы 4.7

20	30	40	1.0841	<b>1.1387</b>	0.9620
20	50	80	1.0605	<b>1.0559</b>	0.9197
20	60	100	1.0346	<b>1.0378</b>	0.9099
40	60	80	1.0207	1.0857	<b>0.9600</b>
40	80	120	1.0511	<b>1.0537</b>	0.9456
40	100	150	1.0329	<b>1.0377</b>	0.9377
<b>Средняя</b>			1.0671	<b>1.0821</b>	0.9299

Источник: составлено автором

По данным таблицы 4.7 можно видеть, что в подавляющем большинстве сочетаний  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  исправленная оценка дисперсии ошибок показывает более близкие значения к реализованной, чем классическая оценка. Исключение составляет только случай, когда  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 60$  и  $n_3 = 80$ , при котором разница между исправленной дисперсией и реализованной составляет 0.065, а между классической и реализованной – 0.0607. Здесь также следует отметить, что при взвешивании моделей, рассчитанных на окнах данных с незначительной разницей в длине, исправленная оценка MSFE склонна переоценивать реализованную, а со значительной разницей – недооценивать. Классическая оценка дисперсии ошибки прогноза при всех рассматриваемых сочетаниях значений  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  систематически недооценивает реализованную среднеквадратическую ошибку.

Таблица 4.8 представляет результаты имитационного эксперимента при взвешивании четырех регрессионных уравнений, рассчитанных на окнах данных различной длины  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  и  $n_4$ .

**Таблица 4.8** – Реализованная, классическая и исправленная среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 4-х уравнений, имитационный эксперимент

$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	реализованная	исправленная	классическая
10	15	20	25	1.1076	<b>1.2098</b>	0.9224
10	30	50	70	1.1042	<b>1.0480</b>	0.8532
10	40	80	120	1.0979	<b>1.0118</b>	0.8397
20	30	40	50	1.0582	<b>1.1328</b>	0.9302
20	40	60	80	1.0328	<b>1.0736</b>	0.9042

Продолжение таблицы 4.8

20	50	90	120	1.0416	<b>1.0473</b>	0.8972
40	50	60	70	1.0554	<b>1.1312</b>	0.9632
40	60	80	100	1.0307	<b>1.0847</b>	0.9408
40	70	100	120	1.0493	<b>1.0706</b>	0.9373
<b>Средняя</b>				1.0642	<b>1.0900</b>	0.9098

Источник: составлено автором

Как видно из таблицы 4.8, в случае взвешивания четырех моделей исправленная оценка дисперсии ошибки прогноза при любых анализируемых сочетаниях значений  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  и  $n_4$  является более точной оценкой реализованной среднеквадратической ошибки прогноза, чем классический расчет дисперсии ошибок. Как и в предыдущем случае взвешивания по трем уравнениям можно сделать вывод о том, что исправленная оценка MSFE несколько завышает реализованную дисперсию ошибок при плотном расположении значений длин рассматриваемых окон данных и несколько занижает при разреженном расположении  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  и  $n_4$ . Также можно отметить тот факт, что при увеличении длин окон наблюдений классическая и исправленная оценки MSFE стремятся к реализованной среднеквадратической ошибке прогноза. При достаточно длинных окнах данные отклонения являются несущественными, однако, как было показано в главе 3 диссертационного исследования, при моделировании временных рядов макроэкономических процессов выбор в пользу длинного окна далеко не всегда является целесообразным в силу изменчивости зависимостей между анализируемыми переменными. Вследствие этого вычисление более точной оценки дисперсии ошибки прогноза в условиях присутствия коротких окон данных представляется достаточно актуальным для получения более точных прогнозов и одновременно с этим более надежных доверительных интервалов.

В качестве заключительного этапа имитационного эксперимента рассмотрим случай, когда взвешивание происходит по пяти регрессионным уравнениям с числом наблюдений в окнах данных  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$  и  $n_5$ . Результаты представлены в таблице 4.9.

**Таблица 4.9** – Реализованная, классическая и исправленная среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 5-ти уравнений, имитационный эксперимент

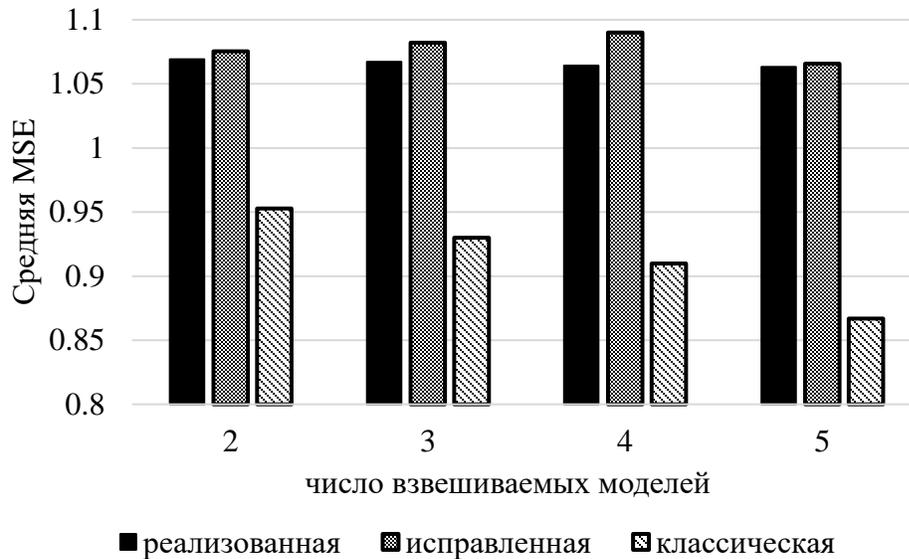
$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	реализованная	исправленная	классическая
10	20	30	40	50	1.1115	<b>1.1024</b>	0.8543
10	30	50	70	90	1.0826	<b>1.0373</b>	0.8339
10	40	70	100	130	1.0388	<b>1.0102</b>	0.8248
20	30	40	50	60	1.0634	<b>1.1250</b>	0.9092
20	40	60	80	100	1.0385	<b>1.0771</b>	0.8960
20	50	80	110	140	1.0451	<b>1.0426</b>	0.8825
<b>Средняя</b>					1.0633	<b>1.0658</b>	0.8668

Источник: составлено автором

Таблица 4.9 подтверждает эффективность предлагаемого поправочного коэффициента, поскольку исправленная оценка дисперсии ошибки прогноза во всех анализируемых случаях располагается ближе к реализованной среднеквадратической ошибке, чем классическая оценка, которая систематически занижает дисперсию ошибки прогноза. Предлагаемая исправленная оценка, как и во всех предыдущих планах имитационного эксперимента, дает завышенную оценку MSFE при плотно расположенных значениях  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$  и  $n_5$ , а при разреженных значениях – заниженную.

Для графического изображения результатов проведенного имитационного тестирования приведем гистограмму средних по показателям MSE для каждого плана эксперимента, т.е. для 2-х, 3-х, 4-х и 5-ти взвешиваемых уравнений, которую можно видеть на рисунке 4.20.

Основным выводом, который можно сделать из рисунка 4.20, является увеличивающаяся разница между реализованной среднеквадратической ошибкой прогноза и классической оценкой дисперсии ошибок при добавлении подмоделей в пул взвешиваемых. При двух подмоделях классическая оценка MSFE отличалась от реализованной на 11%, при трех – на 13%, при четырех – на 14.5%, а при пяти – уже на 18.5%.



**Рисунок 4.20** – Средние реализованная, исправленная и классическая среднеквадратические ошибки прогноза, имитационный эксперимент

Источник: составлено автором

Таким образом, уже при пяти альтернативных моделях классическая оценка дисперсии ошибки прогноза будет недооценивать истинную примерно на двадцать процентов, что негативным образом отразится на надежности доверительных интервалов. К примеру, 5%-ные доверительные интервалы будут пробиваться в 8% случаев. Следовательно, предлагаемый метод поправок классической оценки дисперсии ошибки прогноза позволяет существенно повысить надежность рассчитываемых доверительных интервалов, поскольку исправленная оценка при любом рассматриваемом количестве подмоделей находится в районе реализованной.

Далее перейдем к эмпирическому тестированию эффективности предлагаемого поправочного коэффициента. Как и в предыдущих разделах диссертационного исследования проанализируем следующие макроэкономические индикаторы различных стран: Индекс Потребительских Цен (англ. Consumer Price Index, CPI) в США (Q1.1913-Q2.2019, квартальные данные) – ind 1, ИПЦ в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 2, ИПЦ в Японии (Q1.1956-Q2.2019,

квартальные данные) – ind 3, денежный агрегат M2 в США (Q4.1959-Q2.2019, квартальные данные) – ind 4, безработица в США (Q3.1948-Q2.2019, квартальные данные) – ind 5, денежный агрегат M2 в Японии (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 6 и безработица в Великобритании (Q1.1956-Q2.2019, квартальные данные) – ind 7. Данные макроэкономические индикаторы моделировались с помощью авторегрессии четвертого порядка. По аналогии с рассмотренным ранее имитационным экспериментом будем рассматривать четыре плана эксперимента, при первом из которых взвешиваются две регрессионные модели, рассчитанные по различным сочетаниям  $n_1$  и  $n_2$ , при втором взвешиваются три уравнения по сочетаниям окон данных длины  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ , при третьем – четыре регрессионных модели по комбинациям  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$  и, наконец при четвертом взвешивание происходит по пяти регрессионным уравнениям с длинами окон данных  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$  и  $n_5$ . Для того, чтобы данные переменные были приближены к стационарным, преобразуем показатели безработицы в разности первого порядка, а ИПЦ и M2 конвертируем в темпы прироста согласно формуле (2.48).

Для проверки эффективности работы поправочного коэффициента сравним относительную реализованную, относительную исправленную в соответствии с предлагаемым методом и относительную классическую среднеквадратическую ошибку прогноза.

В таблице 4.10 представлены результаты эмпирического тестирования согласно первому плану эксперимента, в котором взвешивание происходит по двум регрессионным моделям одинакового состава, рассчитанным на окнах данных различной длины. Для вычисления относительных оценок дисперсии ошибок они нормировались на реализованную среднеквадратическую ошибку прогноза. Следовательно, в графе реализованной ошибки всегда стоят единицы, а располагающиеся в двух других графах числа говорят о доле, которую составляют соответствующие оценки дисперсии ошибки прогноза в реализованной MSFE.

**Таблица 4.10** – Реализованная, классическая и исправленная относительные среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 2-х уравнений

Наименование индикатора	$n_1$	$n_2$	реализованная	исправленная	классическая
ind 1	20	40	1.000	1.059	<b>0.988</b>
	20	60	1.000	<b>0.932</b>	0.888
	40	80	1.000	1.086	<b>1.036</b>
	40	100	1.000	<b>0.990</b>	0.956
ind 2	20	40	1.000	<b>0.736</b>	0.684
	20	60	1.000	<b>0.631</b>	0.606
	40	80	1.000	<b>0.960</b>	0.936
	40	100	1.000	1.700	<b>1.645</b>
ind 3	20	40	1.000	<b>0.844</b>	0.774
	20	60	1.000	<b>0.901</b>	0.841
	40	80	1.000	1.516	<b>1.447</b>
	40	100	1.000	1.478	<b>1.420</b>
ind 4	20	40	1.000	<b>0.917</b>	0.853
	20	60	1.000	<b>0.777</b>	0.737
	40	80	1.000	<b>0.721</b>	0.687
	40	100	1.000	<b>0.664</b>	0.641
ind 5	20	40	1.000	<b>1.032</b>	0.943
	20	60	1.000	<b>0.952</b>	0.883
	40	80	1.000	1.084	<b>1.008</b>
	40	100	1.000	1.064	<b>0.995</b>
ind 6	20	40	1.000	<b>0.847</b>	0.781
	20	60	1.000	<b>0.708</b>	0.668
	40	80	1.000	<b>0.856</b>	0.808
	40	100	1.000	<b>0.824</b>	0.787
ind 7	20	40	1.000	<b>0.785</b>	0.724
	20	60	1.000	<b>0.759</b>	0.717
	40	80	1.000	<b>0.924</b>	0.867
	40	100	1.000	1.082	<b>1.013</b>
<b>Средняя</b>			1.000	<b>0.958</b>	0.905

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Анализируя таблицу 4.10, можно заключить, что в отличие от имитационного эксперимента при моделировании реальных статистических данных временных рядов макроэкономических процессов и исправленная, и классическая оценки дисперсии

ошибок дают как завышенные, так и заниженные оценки реализованной среднеквадратической ошибки прогноза. Тем не менее в абсолютном большинстве случаев исправленная оценка располагается ближе к реализованной, чем классическая. Из двадцати восьми тестируемых планов эксперимента в двадцати исправленная оценка оказалась ближе к реализованной и лишь в восьми – классическая. При прогнозировании денежного агрегата M2 в США и денежного агрегата M2 в Японии исправленная оценка была лучше классической во всех четырех сочетаниях значений  $n_1$  и  $n_2$ . При моделировании Индекса Потребительских Цен и безработицы в Великобритании исправленная дисперсия ошибок оказалась ближе к реализованной в трех случаях из четырех, и своеобразная «ничья» образовалась при анализе ИПЦ в США, ИПЦ в Японии и безработицы в США. Следует также отметить, что в среднем исправленная оценка недооценила реализованную дисперсию ошибок на 4.2%, в то время как классическая оценка недооценила ее на 9.5%.

Таблица 4.11 посвящена результатам эмпирического эксперимента при взвешивании трех регрессионных уравнений, где для каждого индикатора рассматриваются по три сочетания длин окон данных. По аналогии с предыдущим планом в таблице приведены относительные реализованные, исправленные и классические среднеквадратические ошибки прогноза.

**Таблица 4.11** – Реализованная, классическая и исправленная относительные среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 3-х уравнений

Наименование индикатора	$n_1$	$n_2$	$n_3$	реализованная	исправленная	классическая
ind 1	20	40	60	1.000	<b>0.934</b>	0.837
	20	60	100	1.000	<b>0.870</b>	0.796
	40	70	100	1.000	<b>0.985</b>	0.909
ind 2	20	40	60	1.000	<b>0.650</b>	0.591
	20	60	100	1.000	1.197	<b>1.102</b>
	40	70	100	1.000	1.727	<b>1.616</b>
ind 3	20	40	60	1.000	<b>0.906</b>	0.799
	20	60	100	1.000	1.139	<b>1.041</b>
	40	70	100	1.000	1.497	<b>1.396</b>

Продолжение таблицы 4.11

<b>ind 4</b>	20	40	60	1.000	<b>0.824</b>	0.736
	20	60	100	1.000	<b>0.658</b>	0.610
	40	70	100	1.000	<b>0.694</b>	0.641
<b>ind 5</b>	20	40	60	1.000	<b>0.968</b>	0.846
	20	60	100	1.000	<b>1.001</b>	0.880
	40	70	100	1.000	1.075	<b>0.967</b>
<b>ind 6</b>	20	40	60	1.000	<b>0.746</b>	0.658
	20	60	100	1.000	<b>0.657</b>	0.602
	40	70	100	1.000	<b>0.851</b>	0.777
<b>ind 7</b>	20	40	60	1.000	<b>0.789</b>	0.697
	20	60	100	1.000	<b>0.948</b>	0.861
	40	70	100	1.000	1.078	<b>0.978</b>
<b>Средняя</b>				1.000	<b>0.962</b>	0.873

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Из таблицы 4.11 видно, что в среднем исправленная оценка дисперсии ошибок недооценила реализованную на 3.8%, в то время как классическая недооценила на 12.7%, что является существенной разницей в пользу предлагаемого метода. Из двадцати одного плана эксперимента исправленная оценка была ближе к реализованной в пятнадцати случаях и только в шести – классическая. При моделировании ИПЦ в США, денежного агрегата M2 в США и M2 в Японии исправленная оценка была лучше во всех трех рассматриваемых сочетаниях  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ . При анализе безработицы в США и безработицы в Великобритании она была ближе к реализованной в двух случаях из трех, а при прогнозировании ИПЦ в Великобритании и ИПЦ в Японии исправленная оценка была лучше классической только в одном случае.

Таблица 4.12 представляет результаты прогнозирования временных рядов рассматриваемых макроэкономических процессов при взвешивании четырех регрессионных уравнений, рассчитанных на окнах данных различной длины. В данном случае для каждого индикатора были рассчитаны реализованная,

исправленная и классическая MSFE по двум сочетаниям  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ . Максимальная длина окна составляет сто наблюдений, выбор в пользу которой обуславливается недостатком статистических данных.

**Таблица 4.12** – Реализованная, классическая и исправленная относительные среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 4-х уравнений

Наименование индикатора	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	реализованная	исправленная	классическая
ind 1	20	40	60	80	1.000	<b>0.990</b>	0.881
	20	50	75	100	1.000	<b>0.870</b>	0.778
ind 2	20	40	60	80	1.000	<b>0.790</b>	0.711
	20	50	75	100	1.000	1.197	<b>1.102</b>
ind 3	20	40	60	80	1.000	1.303	<b>1.138</b>
	20	50	75	100	1.000	1.138	<b>1.027</b>
ind 4	20	40	60	80	1.000	<b>0.735</b>	0.640
	20	50	75	100	1.000	<b>0.674</b>	0.603
ind 5	20	40	60	80	1.000	<b>0.985</b>	0.838
	20	50	75	100	1.000	<b>1.029</b>	0.881
ind 6	20	40	60	80	1.000	<b>0.713</b>	0.625
	20	50	75	100	1.000	<b>0.662</b>	0.581
ind 7	20	40	60	80	1.000	<b>0.882</b>	0.760
	20	50	75	100	1.000	<b>0.982</b>	0.860
<b>Средняя</b>					1.000	<b>0.925</b>	0.816

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Из таблицы 4.12 можно видеть, что из четырнадцати планов эксперимента в одиннадцати случаях исправленная оценка дисперсии ошибки прогноза показывает более близкие значения к реализованной, чем классическая оценка. В среднем исправленная оценка недооценивает реализованную на 7.5%, в то время как классическая дает заниженную на 18.4% оценку. При моделировании таких макроэкономических индикаторов как ИПЦ в США, М2 в США, безработица в США, М2 в Японии и безработица в Великобритании исправленная оценка была лучше классической в двух случаях из двух, при анализе ИПЦ в Великобритании – в одном

из двух, а при прогнозировании ИПЦ в Японии классическая оценка оказалась безоговорочным лидером. Следовательно, можно сделать вывод об эффективности разработанного метода вычисления поправочного коэффициента в данных условиях эмпирического эксперимента.

Завершает эмпирическое тестирование план эксперимента, когда взвешиваются пять регрессионных моделей для каждого из рассматриваемых макроэкономических индикаторов, рассчитанные на окна данных различной длины. В таблице 4.13 приводятся относительные реализованная, исправленная и классическая среднеквадратические ошибки прогноза.

**Таблица 4.13** – Реализованная, классическая и исправленная относительные среднеквадратические ошибки прогноза при взвешивании 5-ти уравнений

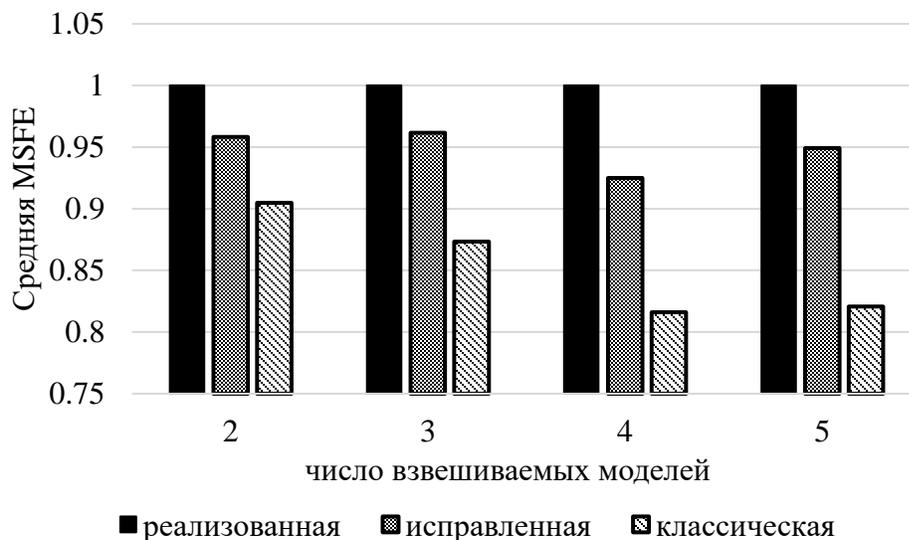
Наименование индикатора	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	реализованная	исправленная	классическая
ind 1						1.000	<b>0.886</b>	0.770
ind 2						1.000	1.242	<b>1.101</b>
ind 3						1.000	1.154	<b>0.996</b>
ind 4	20	40	60	80	100	1.000	<b>0.683</b>	0.599
ind 5						1.000	<b>1.024</b>	0.865
ind 6						1.000	<b>0.664</b>	0.574
ind 7						1.000	<b>0.991</b>	0.841
<b>Средняя</b>						1.000	<b>0.949</b>	0.821

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Как видно из таблицы 4.13, в среднем исправленная оценка MSFE недооценивает реализованную среднеквадратическую ошибку прогноза на 5.1%, в то время как классическая оценка отстает на 17.9%. При моделировании пяти из семи рассматриваемых индикаторов предлагаемый метод позволяет добиться более близкой оценки дисперсии ошибки прогноза к реализованной MSFE. Классическая оценка оказалась лучше только при прогнозировании ИПЦ в Великобритании и ИПЦ

в Японии. Отсюда следует, что можно с определенной степенью уверенности говорить о существенном увеличении эффективности оценки истинной среднеквадратической ошибки прогноза и, как следствие, повышении надежности доверительных интервалов для получаемых прогнозных значений при моделировании временных рядов макроэкономических процессов.

Для графического изображения результатов проведенного эмпирического тестирования приведем гистограмму средних по показателям среднеквадратической ошибки прогноза для каждого плана эксперимента, т.е. для 2-х, 3-х, 4-х и 5-ти динамически взвешиваемых регрессионных уравнений, которую можно видеть на рисунке 4.21.



**Рисунок 4.21** – Средние относительные реализованная, исправленная и классическая ошибки прогноза, эмпирический эксперимент

Источник: составлено автором на основе данных Бюро трудовой статистики США, Организации экономического сотрудничества и развития, Мирового валютного фонда и Совета управляющих Федеральной резервной системы США

Анализируя рисунок 4.21, можно сделать выводы аналогичные тем, которые были сделаны при проведении имитационного тестирования. При добавлении

подмоделей в пул взвешиваемых увеличивается разница между реализованной среднеквадратической ошибкой прогноза и классической оценкой дисперсии ошибок. При двух подмоделях классическая оценка MSFE отличалась от реализованной на 9.5%, при трех – на 12.7%, при четырех – уже на 18.4%. Таким образом, уже при четырех альтернативных моделях классическая оценка дисперсии ошибки прогноза будет недооценивать истинную примерно на двадцать процентов, что делает доверительные интервалы для точечных прогнозов временных рядов макроэкономических процессов намного менее надежными. Исправленная оценка MSFE также несколько недооценивает реализованную среднеквадратическую ошибку прогноза, однако данное смещение является намного менее значительным, что позволяет существенно повысить надежность рассчитываемых доверительных интервалов.

Таким образом, по результатам проведенного имитационного и эмпирического тестирования предлагаемого метода расчета поправочного коэффициента можно говорить о получении более надежной оценки истинной среднеквадратической ошибки прогноза, чем при использовании классической оценки. Как было показано в разделе 4.1 диссертационного исследования, при проведении процедуры динамической спецификации или динамического взвешивания регрессионных моделей для прогнозирования временных рядов макроэкономических процессов классическая так называемая несмещенная оценка дисперсии ошибок систематически занижает истинную, причем с добавлением новых подмоделей данная недооценка увеличивается. При этом динамическое взвешивание позволяет существенно сократить реализованную среднеквадратическую ошибку прогноза и повысить надежность используемой модели. Следовательно, перед исследователем стоит проблема выбора либо в пользу точности прогноза, либо в пользу надежности доверительных интервалов. В данной главе диссертационного исследования была сделана попытка решить данную проблему, а именно при сохранении повышенной

точности рассчитать более надежные доверительные интервалы для прогнозируемых значений. Предложенное решение неидеально и также не дает точной оценки реализованной среднеквадратической ошибки прогноза, но тем не менее позволяет существенно повысить адекватность рассчитываемых доверительных интервалов.

## ГЛАВА 5 ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ <sup>7</sup>

### 5.1 Модель взаимосвязей макроэкономических процессов

При построении комплексных прогностических систем макроэкономических процессов исследователи зачастую прибегают к использованию регрессионного инструментария. Данный подход является одним из наиболее распространенных и позволяет получать не только точечные оценки значений прогнозируемых показателей, но и находить доверительные интервалы для данных значений с заданным уровнем надежности. Однако в большинстве случаев каждый из рассматриваемых показателей моделируется и предсказывается согласно построенной специально для него модели отдельно от других. Таким образом, прогнозируемые индикаторы зачастую получаются либо несогласованными друг с другом, либо один из функционально связанных показателей прогнозируется через предсказания, полученные по остальным индикаторам. Например, при предсказании индексов Валового Внутреннего Продукта (ВВП), дефлятора ВВП и ВВП, выраженного в постоянных ценах, используется известная функциональная связь, а именно что индекс ВВП равен произведению индекса дефлятора ВВП на индекс реального ВВП. В связи с этим обычно строятся модели только для двух из данных показателей, а прогноз для третьего получается посредством выражения его значения через предсказания этих моделей. Однако при таком подходе теряется информация, которая могла бы быть получена из результатов работы модели для третьего показателя, что можно охарактеризовать как существенное упущение, так как данная

---

<sup>7</sup> Глава составлена по материалам работ автора [34, 119, 191, 193, 197]

информация могла бы улучшить полученные прогнозы.

В данной главе диссертационного исследования высказывается идея того, что существует возможность повысить точность прогнозов функционально и корреляционно зависимых показателей, если после прогнозирования каждого из них по отдельности провести процедуру поправок полученных предсказаний посредством учета взаимосвязей между ними. Так как система статистического учета процессов, происходящих в экономике на макроуровне, предполагает множество функциональных и корреляционных взаимосвязей между измеряемыми характеристиками экономической структуры, предлагаемый метод поправок предсказаний регрессионных моделей имеет достаточно широкую сферу применения.

Взаимосвязи макроэкономических показателей имеют как линейную (например, балансовые индикаторы), так и нелинейную форму (например, приведенная выше зависимость индекса ВВП от индекса цен и индекса товаров). В данном разделе диссертации рассмотрим несколько концептуальных комплексных моделей, основанных на функциональных и корреляционных взаимосвязях макроэкономических индикаторов. Начнем с широко известного уравнения обмена, связывающего денежную массу, скорость денежного обращения и ВВП.

$$MV = PQ \text{ или } MV = ВВП, \quad (5.1)$$

где  $M$  – агрегат денежной массы,  $V$  – скорость денежного обращения,  $P$  – уровень цен на товары и услуги и  $Q$  – количество проданных товаров и услуг.

Если рассматривать индексы роста каждого из данных индикаторов, то уравнение (5.1) преобразуется в следующее равенство:

$$\frac{M_t}{M_{t-1}} \cdot \frac{V_t}{V_{t-1}} = \frac{ВВП_t}{ВВП_{t-1}} \Rightarrow I_M \cdot I_V = I_{ВВП}. \quad (5.2)$$

Таким образом, уравнение (5.2) представляет собой первую из рассматриваемых в данном разделе комплексную модель функциональной взаимосвязи трех макроэкономических индикаторов. Вторая модель также является трехфакторной и представляет собой функциональную зависимость Реального ВВП (РВВП), дефлятора ВВП и номинального ВВП.

$$\frac{P_t Q_t}{P_{t-1} Q_t} \cdot \frac{P_{t-1} Q_t}{P_{t-1} Q_{t-1}} = \frac{P_t Q_t}{P_{t-1} Q_{t-1}} \Rightarrow I_p \cdot I_q = I_{pq} \text{ или } I_p \cdot I_{РВВП} = I_{ВВП}, \quad (5.3)$$

где первый множитель является индексом Пааше, а второй – индексом Ласпейреса.

Инкорпорируя модель (5.3) в модель (5.2), получим третью концептуальную модель, включающую в себя уже пять факторов.

$$2 \cdot I_M \cdot I_V = 2 \cdot I_{ВВП} \Rightarrow I_M \cdot I_V = \frac{I_{ВВП} + I_{РВВП} \cdot I_p}{2}. \quad (5.4)$$

Если перейти от индексов роста к номинальным показателям, то можно построить еще более сложные модели функционально зависимых макропоказателей. Рассмотрим подробнее показатель номинальный ВВП, который согласно работе [22] представляет собой общую рыночную стоимость всех готовых товаров и услуг, произведенных и реализованных на территории страны в течение года, в текущих рыночных ценах. Из расчета ВВП исключаются все непроизводственные сделки, а именно:

- финансовые сделки:

- государственные трансфертные платежи, в том числе выплаты социального страхования, пособия по безработице, пенсии и выплаты, которые государство предоставляет отдельным домохозяйствам;

- частные трансфертные платежи, в том числе материальная помощь, студенческие стипендии, разовые дары от богатых родственников, не связаны с производством, а просто представляют собой передачу средств от одного частного лица к другому;
- сделки с ценными бумагами, в том числе все сделки купли-продажи акций и облигаций.

- продажа подержанных товаров, стоимость которых были включены в расчёт в предыдущие периоды.

Существует несколько способов расчета ВВП, один из которых базируется на учете расходов. Согласно методу по расходам показатель ВВП может быть представлен следующим образом:

$$ВВП = C + In + G + Ex - Im, \quad (5.5)$$

где  $C$  – совокупное конечное потребление,  $In$  – валовое накопление капитала (инвестиции в бизнес),  $G$  – государственные расходы,  $Ex$  – совокупный экспорт и  $Im$  – совокупный импорт.

Конечное потребление включает в себя расходы на удовлетворение конечных потребностей индивидов или общества, произведённые следующими институциональными секторами: сектор домашних хозяйств, сектор органов государственной власти (госсектор), сектор частных некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства. Валовое накопление капитала измеряется общей стоимостью валового накопления основного капитала, изменениями в запасах материальных оборотных средств и чистым приобретением ценностей единицей или сектором.

Если применить рассмотренный метод расчета ВВП к формуле (5.1), то путем тривиальных математических операций можно получить следующую

концептуальную модель взаимосвязи макроэкономических индикаторов, включающую в себя уже десять показателей:

$$MV = \frac{PBBП \cdot I_p + BBП + C + In + G + Ex - Im}{3}. \quad (5.6)$$

Далее рассмотрим показатель ВВП на душу населения, который является одним из основных показателей материального благосостояния и качества жизни в стране или регионе. Данный индикатор рассчитывается следующим образом:

$$BBП_{\text{ндн}} = \frac{BBП}{P}, \quad (5.7)$$

где  $P$  – население страны или региона.

Тогда, если инкорпорировать показатель ВВП на душу населения в модель (5.6), можно получить следующую концептуальную модель взаимосвязи макропоказателей:

$$MV = \frac{PBBП \cdot I_p + BBП + C + In + G + Ex - Im + BBП_{\text{ндн}} \cdot P}{4}. \quad (5.8)$$

Далее перейдем ко второму методу расчета ВВП, который основывается на учете доходов. Согласно данному способу показатель ВВП вычисляется как:

$$BBП = Y + A + T - S + Z, \quad (5.9)$$

где  $Y$  – национальный доход,  $A$  – амортизация,  $T$  – косвенные налоги,  $S$  – субсидии и  $Z$  – чистый доход от иностранных факторов производства.

Национальный доход в свою очередь состоит из следующих компонент:

$$Y = W + R + Int + O, \quad (5.10)$$

где  $W$  – заработная плата до выплаты налогов,  $R$  – арендные платежи,  $Int$  – начисленные проценты и  $O$  – прибыль корпораций до вычета налогов.

В показатель «заработная плата до выплаты налогов» включается не только сама заработная плата, но и всевозможные премии и поощрения. Также в данном показателе учитываются все социальные выплаты, которые осуществляются как самим работником, так и его работодателем. Данный показатель является самой крупной категорией доходов. Начисленные проценты представляют собой доход на денежные фонды, размещенные в кредитных организациях, однако процентные платежи, производимые государством, исключаются из процентных доходов. Прибыль корпораций до вычета налогов является доходом от предпринимательской деятельности, в рамках которого выделяют прибыль малого и среднего бизнеса (доходы от собственности) и прибыль корпораций (акционерных обществ). Косвенные налоги представляют собой особую форму налогов, которые закладываются в цену реализованных товаров и услуг и впоследствии перечисляются в государственный бюджет.

Таким образом, если ввести рассмотренный метод расчета ВВП в модель (5.8), то можно построить более всеобъемлющее макроэкономическое уравнение.

$$5 \cdot MV = PBVP \cdot I_p + BVP + C + In + G + Ex - Im + BVP_{ндн} \cdot P + W + R + Int + O + A + T - S + Z. \quad (5.11)$$

Данная модель включает в себя уже двадцать различных макроэкономических показателей, увязанных в одном уравнении. Следовательно, делаем вывод, что система статистического учета индикаторов функционирования экономики построена таким образом, что существует возможность сформировать такую модель экономики,

которая включает в себя основные макроэкономические показатели, устанавливая между ними функциональные связи. При некоторых незначительных модификациях модель (5.11) может охватить следующий список макроэкономических показателей:

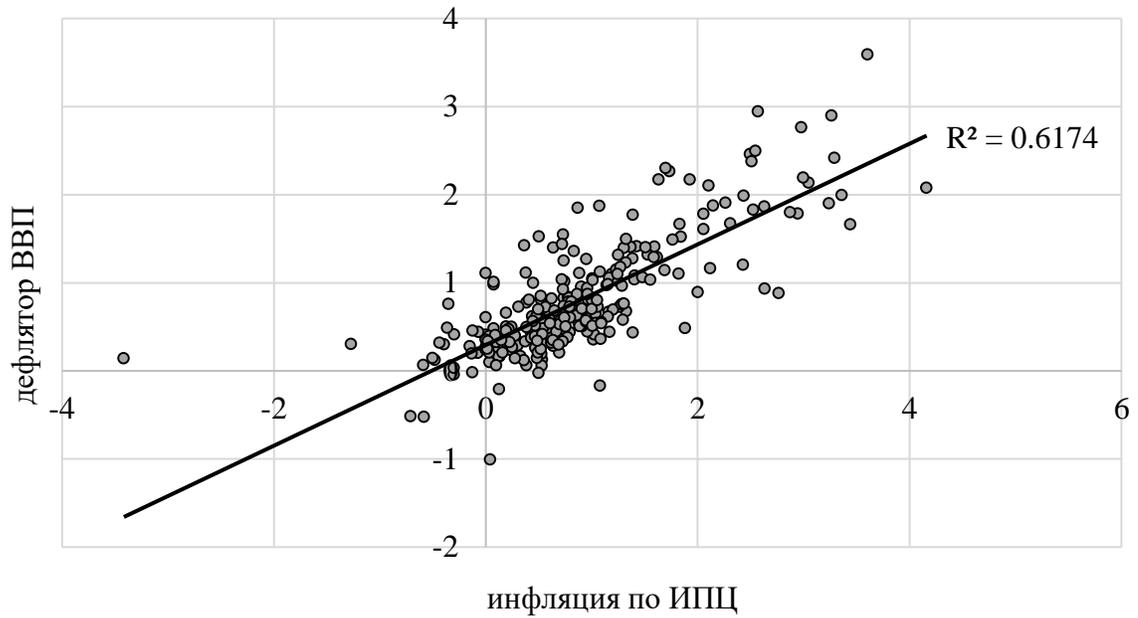
- Валовой внутренний продукт в текущих ценах;
- Валовой внутренний продукт в постоянных ценах;
- Валовой внутренний продукт на душу населения;
- Агрегаты денежной массы;
- Скорость денежного обращения;
- Дефлятор ВВП;
- Конечное потребление;
- Инвестиции;
- Государственные расходы;
- Экспорт;
- Импорт;
- Население;
- Занятость и безработица;
- Номинальная и реальная заработная плата;
- Арендные платежи;
- Начисленные проценты на финансовый капитал;
- Прибыль организаций;
- Амортизация;
- Налоговые выплаты;
- Субсидии;
- Чистый доход от иностранных факторов производства.

Таким образом, на основе предложенной модели возможно создать комплексную систему прогнозирования основных макроэкономических индикаторов страны или региона, которая позволяет получать согласованные предсказания

моделируемых показателей.

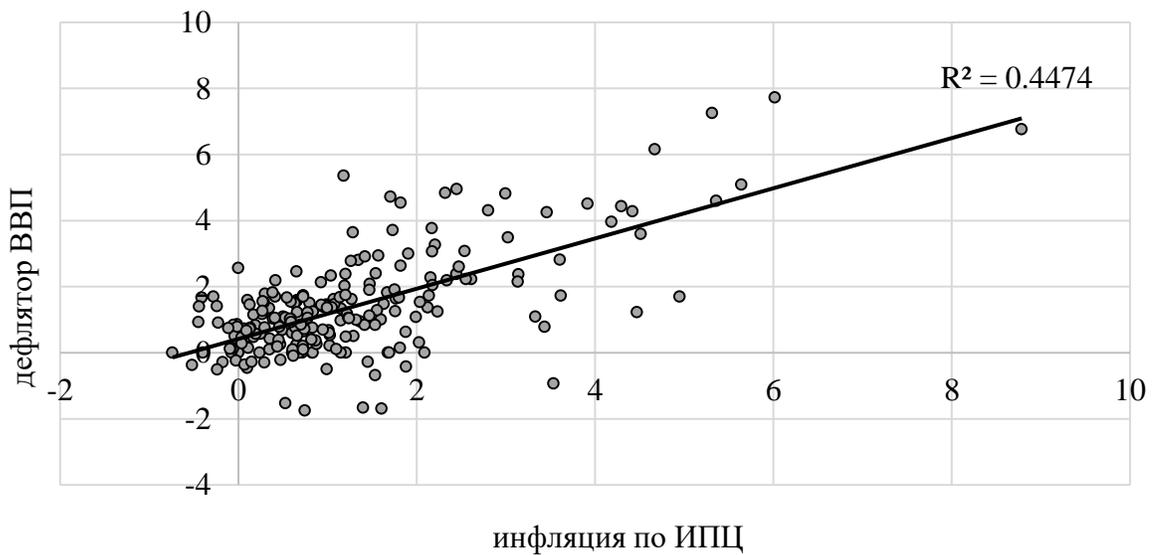
Следует отметить, что помимо строгих функциональных связей макроэкономические показатели зачастую имеют относительно тесную корреляционную зависимость, что также может помочь улучшить качество получаемых прогнозов. Первым ярким примером таких показателей служат дефлятор ВВП и инфляция по индексу потребительских цен (ИПЦ). Оба эти показателя характеризуют темп роста цен в экономике, но рассчитываются по различной базе товаров и услуг. Если дефлятор ВВП учитывает повышение цен на все реализованные товары и услуги, включаемые в расчет ВВП за определенный период, то индекс потребительских цен рассчитывается по установленному набору благ, входящих в потребительскую корзину. Еще одно отличие данных индексов заключается в том, что дефлятор ВВП рассчитывается по индексу Пааше (набор товаров и услуг текущего периода является базовым), а ИПЦ – по индексу Ласпейреса (используется потребительская корзина базового года). Помимо этого, в ИПЦ учитываются также импортные товары, в то время как дефлятор ВВП отражает изменения цен только на товары и услуги, произведенные на территории рассматриваемого государства. Считается, что индекс потребительских цен более объективно отражает темпы роста цен для наиболее широкого круга граждан, поскольку включает в основном товары и услуги широкого потребления. На рисунках 5.1 и 5.2 приведены диаграммы рассеяния, построенные по квартальным данным дефлятора ВВП и ИПЦ для США и Великобритании с 1947 по 2017 гг. и с 1960 по 2017 гг. соответственно.

Как видно из рисунка 5.1, дефлятор ВВП и ИПЦ США достаточно тесно связаны (коэффициент детерминации равен 0.62, а коэффициент корреляции – 0.79). Здесь особо важным является тот факт, что инфляция по ИПЦ прогнозируется с помощью дефлятора ВВП за тот же период значительно лучше, чем с помощью модели авторегрессии первого порядка, причем симметричный вывод можно сделать и про дефлятор ВВП.



**Рисунок 5.1** – Диаграмма рассеяния квартальной инфляции по дефлятору ВВП и ИПЦ США

Источник: составлено автором на основе данных Бюро экономического анализа США (англ. U.S. Bureau of Economic Analysis) и Бюро трудовой статистики США



**Рисунок 5.2** – Диаграмма рассеяния квартальной инфляции по дефлятору ВВП и ИПЦ Великобритании

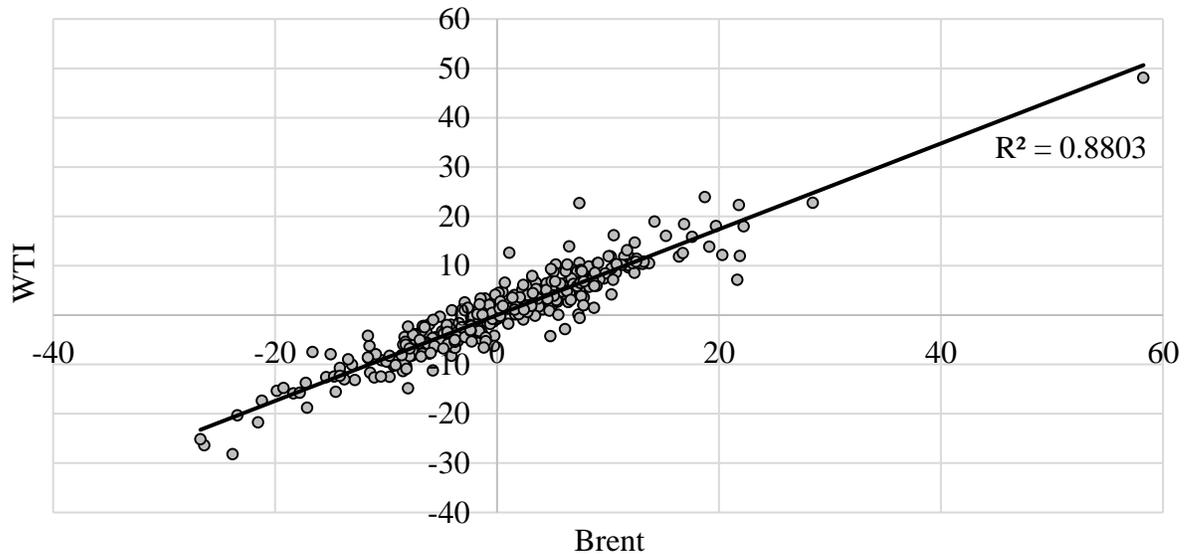
Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития

Следовательно, резонно полагать, что посредством учета данной корреляционной зависимости в модели векторной регрессии с участием данных показателей в качестве целевых переменных можно повысить надежность получаемых прогнозов. Что касается связи дефлятора ВВП и ИПЦ для Великобритании (см. рисунок 5.2), то в данном случае зависимость этих показателей несколько слабее, чем для экономики США (коэффициент детерминации равен 0.45, а коэффициент корреляции – 0.67). Тем не менее, несмотря на такие показатели тесноты связи, прогнозы, получаемые с помощью авторегрессии первого порядка и по ИПЦ и по дефлятору получаются еще менее точными. В силу этого, как и в предыдущем случае можно заключить, что имеет смысл учитывать данную взаимосвязь при построении комплексных моделей с участием дефлятора ВВП и ИПЦ в качестве целевых переменных. Отметим также, что в США индекс потребительских цен в среднем дает более высокую оценку квартальной инфляции, чем дефлятор ВВП (0.86% против 0.79% соответственно), в то время как в Великобритании наблюдается обратная ситуация: дефлятор ВВП дает более высокую оценку квартальной инфляции, чем ИПЦ (1.35% против 1.23% соответственно). Таким образом, не представляется возможным однозначно судить о том, что распространенное мнение о завышении инфляции индексом потребительских цен и занижении дефлятором ВВП является верным для всех экономик мира.

Далее рассмотрим корреляционную зависимость цен на нефть марки Brent и WTI. Данные временные ряды имеют достаточно тесную связь в силу того, что оба товара представляют собой энергоносители, достаточно близкие по своим характеристикам. Разница в их ценах объясняется по большей части стоимостью поставок в тот или иной регион спроса, а также различиями в поставочных условиях контрактов. На рисунке 5.3 изображена диаграмма рассеяния месячных индексов прироста цен на нефть данных марок с 1987 по 2017 гг.

Данные, представленные на рисунке 5.3 свидетельствуют о наличии весьма

тесной линейной зависимости изменений цен на нефть марок Brent и WTI (коэффициент детерминации составляет 0.88, а коэффициент корреляции равен 0.94).



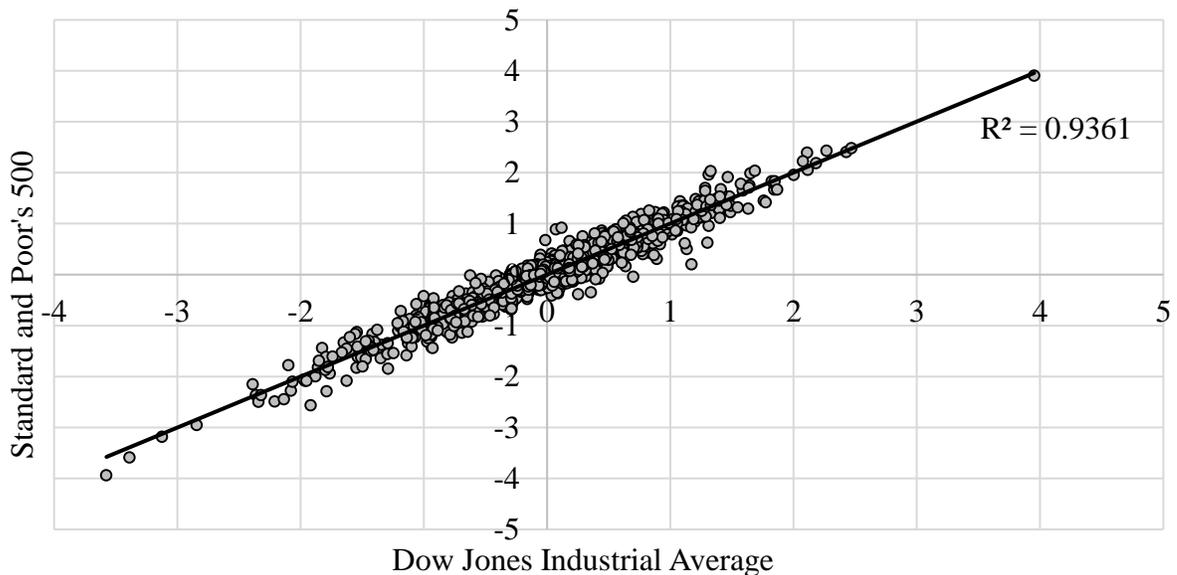
**Рисунок 5.3** – Диаграмма рассеяния месячных данных прироста цен на нефть марок Brent и WTI

Источник: составлено автором на основе данных Управления энергетической информации США (англ. U.S. Energy Information Administration)

В связи с этим даже несмотря на то, что цена на нефть практически является мартингальным процессом, существует возможность повысить надежность получаемых прогнозов посредством учета корреляционной связи между данными временными рядами при построении системы эконометрических моделей.

Еще одним примером тесной корреляционной взаимосвязи двух временных рядов является связь между двумя основными фондовыми индексами США, а именно Dow Jones Industrial Average и Standard and Poor's 500. Индекс Dow Jones является старейшим среди существующих американских рыночных индексов и первоначально был создан для отслеживания развития промышленной составляющей фондового рынка США. Он охватывает 30 крупнейших американских корпораций, причем на сегодня многие из них уже не принадлежат к категории промышленных. Изначально

индекс рассчитывался по средней арифметической цене на акции входящих в него компаний. Однако в настоящее время применяют масштабируемое среднее, т.е. сумма цен нормируется на делитель, который пересчитывается в случае сплита или объединения входящих в него акций. Индекс S&P 500 включает в себя 500 публичных компаний США, имеющих наибольшую капитализацию и является взвешенной по капитализации средней ценой входящих в него акций. На рисунке 5.4 представлена диаграмма рассеяния дневных приростов по рассматриваемым индексам.



**Рисунок 5.4** – Диаграмма рассеяния дневных данных прироста фондовых индексов США DJIA и S&P 500

Источник: составлено автором на основе данных S&P Dow Jones Indices LLC

Из рисунка 5.4 можно видеть, что DJIA и S&P 500 имеют практически линейную взаимосвязь (коэффициент детерминации равен 0.936, а коэффициент корреляции – 0.967). Фондовые индексы являются достаточно сложно прогнозируемыми индикаторами, по своей структуре близкими к мартингалам. Однако использование данной корреляционной зависимости может повысить качество получаемых прогнозов. Отметим, что приведенный список тесных корреляционных зависимостей макроэкономических индикаторов является далеко не полным и может быть

значительно расширен. В данном разделе приводятся лишь малая доля примеров таких взаимосвязей с целью обоснованно подтвердить существование показателей такого класса.

Исходя из вышесказанного, можно заключить, что при комплексном одновременном прогнозировании временных рядов макроэкономических индикаторов можно ввести в разрабатываемую систему моделей функциональные и корреляционные взаимосвязи между моделируемыми показателями. Таким образом, получаемые прогнозы приводятся в соответствие друг с другом, что оказывает положительное влияние на точность предсказаний. В данном разделе диссертационного исследования представлены концептуальные модели функциональных взаимосвязей макроэкономических показателей, включающие в себя до двадцати переменных, что позволяет создавать комплексные модели, охватывающие основные макроиндикаторы государства.

## **5.2 Метод учета функциональных и корреляционных зависимостей между макроэкономическими индикаторами**

Следует отметить, что идеи, в некоторой мере напоминающие те, которые высказываются в данном разделе диссертации, уже были опубликованы в некоторых международных статистических и эконометрических журналах и рассматривают регрессию с множественным откликом, т.е. моделирующую вектор целевых переменных, см. [139, 250, 173]. Такие модели состоят из системы регрессионных уравнений с предположением о некоторой степени корреляционной взаимосвязи между предсказываемыми целевыми переменными. Некоторое количество работ было посвящено непараметрическим моделям с двумя целевыми переменными,

оцениваемым с помощью сглаживающих сплайнов, см. например [80, 252, 175], а также с применением полиномиального приближения, см. работу [76]. Целью таких моделей с множественным откликом является получение более точных предсказаний, чем по моделям с одной целевой переменной, так как в последнем случае учитывается только влияние объясняющих факторов на выходную переменную, а в первом добавляется информация о взаимозависимости между прогнозируемыми откликами. Данная взаимозависимость между моделируемыми переменными обычно представляется в виде дисперсионно-ковариационной матрицы ошибок, которая используется для взвешивания наблюдаемых отклонений при расчете оценок истинных параметров моделей по аналогии с обобщенным методом наименьших квадратов, см. [173, 264, 272]. Максимальный эффект в плане точности получаемых прогнозов в таком случае достигается при наличии достаточно сильной корреляционной взаимосвязи между анализируемыми откликами, что явно показано в работах [220, 253, 68, 243, 140]. Обычно регрессионные модели с множественными откликами широко применяются при анализе категориальных или панельных данных в таких областях науки, как медицина и социология, см. работы [218, 219, 280, 263, 265, 52]. Однако и в области экономики подходы, разделяющие схожую идею, могут также давать повышенное качество моделей. Предпосылкой для данного улучшения точности прогнозов является факт наличия функциональных и сильных корреляционных зависимостей среди основных макроэкономических индикаторов, которые могут быть использованы для повышения надежности разрабатываемых комплексов моделей.

Перейдем к математическому описанию предлагаемого в данном разделе метода. Пусть  $\{y_t, X_t: t = 1, \dots, n\}$  является рассматриваемым набором действительных данных, где  $y_t$  – целевая переменная, а  $X_t = (1, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})$  – конечный набор объясняющих переменных. Тогда линейная регрессионная модель для  $y_t$  выглядит следующим образом:

$$y_t = X_t B + e_t \text{ или} \quad (5.12)$$

$$\hat{y}_t = X_t B, \quad (5.13)$$

где  $B$  – вектор-столбец параметров модели, рассчитываемый по формуле (1.3).

Здесь отметим, что для корректной работы предлагаемого метода необходимо выполнение предпосылок 1-5, упомянутых в разделе 1.2 диссертации. Тогда функция плотности вероятности для прогнозного значения на один шаг вперед  $y_{n+1}$  является сдвинутым и масштабированным  $t$ -распределением с  $\nu = n - m - 1$  степенями свободы.

$$\Psi(y_{n+1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{MSFE_{n+1}} \sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[ \frac{\nu + \frac{(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})^2}{MSFE_{n+1}}}{\nu} \right]^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \quad (5.14)$$

где  $\hat{y}_{n+1}$  является параметром сдвига и рассчитывается по формуле (5.13), а  $MSFE_{n+1}$  – параметром масштаба и вычисляется стандартным способом согласно формуле (1.5).

Далее предположим, что имеется набор целевых переменных  $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(K)}$ , каждая из которых моделируется с помощью набора данных  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}$  соответственно, а также что все рассматриваемые целевые переменные связаны между собой некоторой функциональной зависимостью:

$$y_t^{(i)} = f_i(y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(i-1)}, y_t^{(i+1)}, \dots, y_t^{(K)}), \quad (5.15)$$

где  $f_i$  обозначает функцию, которая выражает  $y_t^{(i)}$  через остальные целевые переменные.

Для обеспечения надежности получаемых далее выводов предположим выполнение еще одной предпосылки:

**Предпосылка 8:** Отсутствие корреляции остатков рассматриваемых целевых переменных, т.е.  $\text{cov}(\varepsilon_t^{(i)}; \varepsilon_t^{(j)}) = 0, \forall i \neq j$ . Случайные отклонения являются попарно независимыми друг от друга, что означает отсутствие систематической взаимосвязи между ошибками любых двух отдельно взятых моделей.

Тогда существует возможность провести корректировки полученных прогнозов, учитывая полученные функции плотности вероятности и известную функциональную связь между целевыми переменными. Данную процедуру предлагается проводить с помощью Метода Максимального Правдоподобия (ММП, англ. Maximum Likelihood Estimation), который был проанализирован, рекомендован и значительно популяризован Р. Фишером между 1912 и 1922 гг. Суть метода сводится к максимизации так называемой функции правдоподобия, которая представляет собой совместную плотность вероятности набора анализируемых случайных величин. Проще говоря, при данного рода оптимизации находятся такие значения случайных величин, которые с наибольшей вероятностью могут произойти совместно при известных функциях плотности вероятности для каждой анализируемой случайной величины. В случае с упомянутыми выше функционально зависимыми целевыми переменными совместная плотность вероятности может быть представлена следующим образом с использованием функции  $f_1$ :

$$LN = \Psi_1(f_1[y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}, \dots, y_{n+1}^{(K)}]) \cdot \Psi_2(y_{n+1}^{(2)}) \dots \Psi_K(y_{n+1}^{(K)}). \quad (5.16)$$

Таким образом, процедура корректировки полученных прогнозов сводится к поиску таких значений прогнозируемых случайных величин, которые

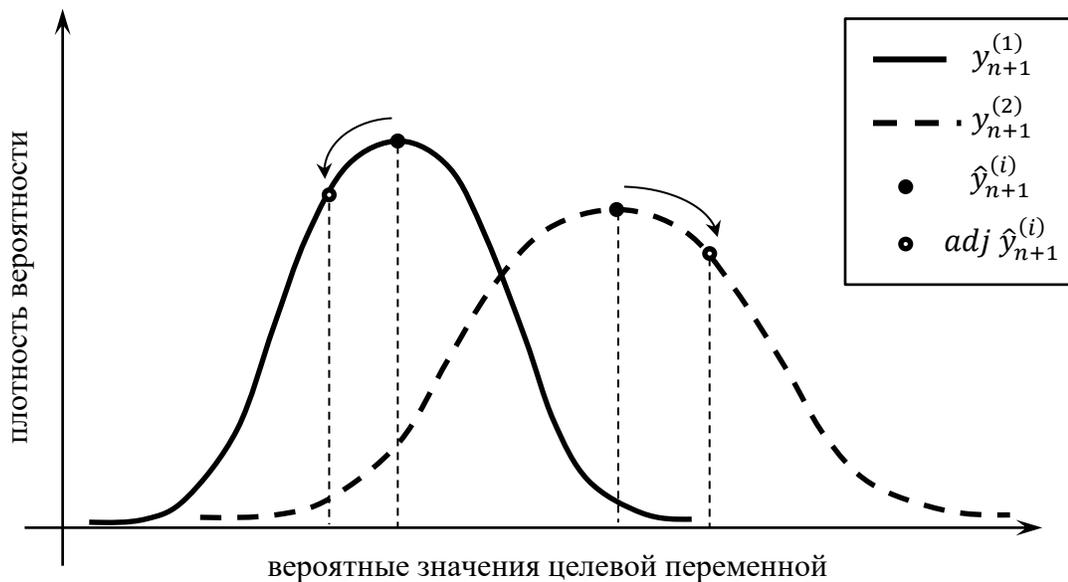
максимизировали бы выражение (5.16). С целью снижения вычислительной сложности расчета оптимальных параметров при максимизации функции правдоподобия (5.16) прибегнем к процедуре логарифмирования совместной плотности вероятности, что даст в результате сумму рассматриваемых функций вместо их произведения.

$$\log - \text{LN} = \ln \left\{ \Psi_1 \left( f_1 \left[ y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}, \dots, y_{n+1}^{(K)} \right] \right) \right\} + \ln \left\{ \Psi_2 \left( y_{n+1}^{(2)} \right) \right\} + \dots + \ln \left\{ \Psi_K \left( y_{n+1}^{(K)} \right) \right\}. \quad (5.17)$$

Поскольку логарифм является монотонно возрастающей функцией, то значения аргументов, максимизирующих выражения (5.16) и (5.17), будут совпадать. Следовательно, посредством применения метода градиентного спуска к выражению (5.17), происходит поиск оптимальных значений аргументов целевой функции, которыми являются рассматриваемые выходные переменные. С учетом степени развития вычислительных технологий на данный момент поиск такого решения осуществляется за приемлемое время даже при условии, что число рассматриваемых целевых переменных достаточно велико.

Проиллюстрируем процесс проведения корректировок предсказанных значений на примере двух целевых переменных, линейно зависящих друг от друга. Предположим, что прогнозируются две целевые переменные  $y_{n+1}^{(1)}$  и  $y_{n+1}^{(2)}$  на один период вперед, причем данные переменные связаны функциональной линейной зависимостью, а именно  $y_{n+1}^{(1)} = ky_{n+1}^{(2)} + b$ , где  $k$  и  $b$  – некоторые параметры. Каждая из рассматриваемых целевых переменных прогнозируется с помощью своего набора объясняющих факторов  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$  соответственно. Тогда результатом параллельной независимой работы двух регрессионных моделей являются два сдвинутых и масштабированных  $t$ -распределения Стьюдента, которым подчиняются прогнозируемые случайные величины  $y_{n+1}^{(1)}$  и  $y_{n+1}^{(2)}$ . Однако рассчитанные прогнозы могут получиться несогласованными, особенно в случае сильно отличающихся по

составу наборов объясняющих факторов  $X^{(1)}, X^{(2)}$ , т.е. заранее известная функциональная зависимость  $\hat{y}_{n+1}^{(1)} = k\hat{y}_{n+1}^{(2)} + b$  будет нарушена. Поэтому, применяя корректировку посредством максимизации функции правдоподобия (5.17), можно скорректировать полученные прогнозы целевых переменных с целью приведения их в соответствие с изначально заявленной функциональной связью. На рисунке 5.5 схематично изображена процедура такой корректировки.



**Рисунок 5.5** – Иллюстрация применения ММП для двух функционально зависимых переменных

Источник: составлено автором

Как видно из рисунка 5.5, изначально значения целевых переменных прогнозировались на уровнях, соответствующих модам каждого из представленных распределений вероятности. Однако после проведения корректировки прогнозируемые значения сместились в точки, соответствующие максимуму совместной плотности вероятности. Иными словами, при наличии полученных вероятностных распределений и заранее известной функциональной зависимости

между целевыми переменными скорректированные прогнозы отражают наиболее вероятную ситуацию совместного появления именно таких значений целевых переменных.

Помимо проводимых корректировок полученных прогнозов можно также получить скорректированную функцию плотности вероятности для всех целевых переменных под рассмотрением. Данную процедуру предлагается проводить с помощью вычисления маргинального распределения для анализируемой целевой переменной, которое учитывает вероятностные распределения остальных выходных переменных и функциональную связь между ними. Таким образом, согласно данному способу, скорректированная функция плотности вероятности вычисляется как показано ниже:

$$pdf(y_{n+1}^{(i)}) = \frac{\Omega(y_{n+1}^{(i)})}{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(y_{n+1}^{(i)}) dy_{n+1}^{(i)}}, \quad (5.18)$$

где нормировочная константа в знаменателе представляет собой интеграл функции правдоподобия по всем целевым переменным под рассмотрением, а  $\Omega(y_{n+1}^{(i)})$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(y_{n+1}^{(i)}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(y_{n+1}^{(1)}) \dots \Psi_{i-1}(f_{i-1}[y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, \dots, y_{n+1}^{(i-2)}, y_{n+1}^{(i)}, \dots, y_t^{(K)}]) \\ & \cdot \Psi_i(y_{n+1}^{(i)}) \dots \Psi_K(y_{n+1}^{(K)}) dy_{n+1}^{(1)} \dots dy_{n+1}^{(i-1)} dy_{n+1}^{(i+1)} \dots dy_{n+1}^{(K)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь следует отметить, что в случае выполнения предпосылок 1-5, 8 и линейной зависимости анализируемых целевых переменных вида  $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ ,

справедлива следующая теорема:

**Теорема 5.1.** Пусть  $y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tn})$  набор независимых нормально распределенных предсказываемых целевых переменных с вектором математических ожиданий  $m = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  и дисперсий  $v = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  соответственно. Тогда при наложении условия соответствия их следующей функциональной связи  $y_{tn} = \sum_{i=1}^{n-1} y_{ti}$  можно показать, что каждая из анализируемых переменных также подчиняется нормальному распределению с дисперсией, равной

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sigma_1^2 \sum_{i=2}^n \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \quad (\text{на примере } y_{t1})$$

и математическим ожиданием

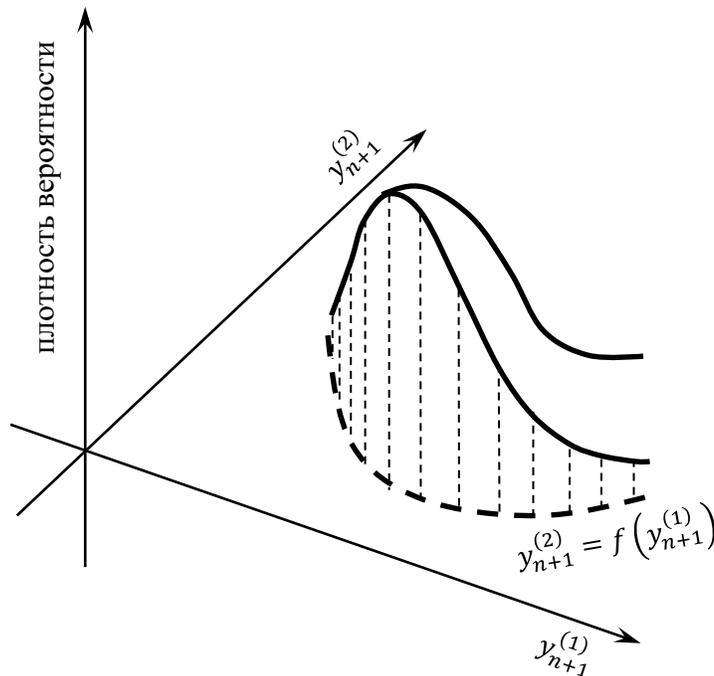
$$\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_1 \sum_{i=2}^n \sigma_i^2 + \sigma_1^2 (\mu_n - \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i)}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \quad (\text{на примере } y_{t1}),$$

причем  $\hat{\sigma}_1^2 < \sigma_1^2 \quad \forall \sigma_i^2 > 0$  и  $\lim_{\sigma_i^2 \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2 \quad \forall i$ .

Доказательство данной теоремы представлено в Приложении Б.

Рассмотрим подробнее геометрический смысл плотности распределения, получаемой по формуле (5.18). Предположим, что прогнозируются две целевые переменные  $y_{n+1}^{(1)}$  и  $y_{n+1}^{(2)}$  на один период вперед, причем имеет место функциональная связь между данными показателями, а именно  $y_{n+1}^{(2)} = f(y_{n+1}^{(1)})$ , где  $f(\cdot)$  – некоторая известная нелинейная функция параболического вида. Каждая из рассматриваемых целевых переменных прогнозируется с помощью своего набора объясняющих факторов  $X^{(1)}, X^{(2)}$  соответственно. Тогда, как и в предыдущем

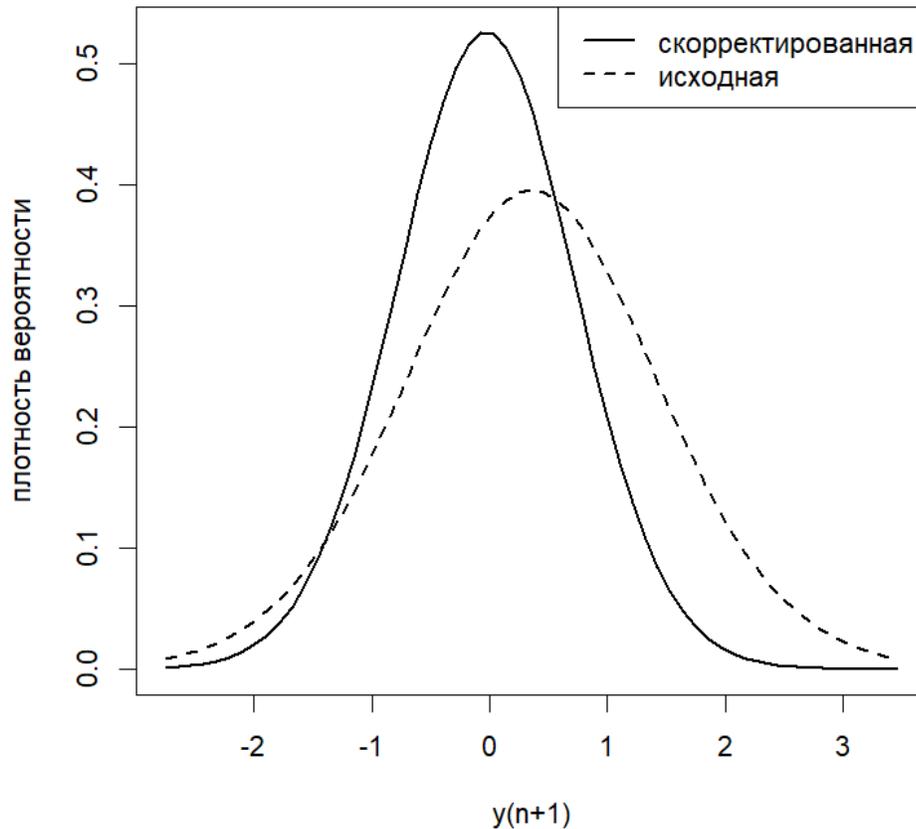
примере, результатом параллельной независимой работы двух регрессионных моделей являются два сдвинутых и масштабированных  $t$ -распределения Стьюдента, которым подчиняются прогнозируемые случайные величины  $y_{n+1}^{(1)}$  и  $y_{n+1}^{(2)}$ . Функцией правдоподобия в данном случае является совместная плотность распределения этих двух целевых переменных, имеющая колоколообразную форму, и может быть представлена в трехмерном пространстве, см. рисунок 5.6. Тогда, в результате применения формулы (5.18) с целью вычисления скорректированной функции плотности вероятности для целевой переменной  $y_{n+1}^{(2)}$ , получим сечение совместной плотности вероятности по кривой  $y_{n+1}^{(2)} = f(y_{n+1}^{(1)})$ , параллельное оси плотности вероятности и нормированное таким образом, чтобы интеграл получившейся функции по всей ее области определения равнялся единице. Иллюстрация такого сечения приведена на рисунке ниже.



**Рисунок 5.6** – Иллюстрация вычисления скорректированной функции плотности вероятности для двух функционально зависимых переменных

Источник: составлено автором

Таким образом, из исходного вероятностного распределения для целевой переменной получается скорректированная функция плотности вероятности, при этом дисперсия скорректированного распределения будет меньше либо равна дисперсии исходного, см. рисунок 5.7.



**Рисунок 5.7** – Пример скорректированной и исходной функций плотности вероятности

Источник: составлено автором

Как видно из рисунка 5.7, моды скорректированной и исходной функций распределения различны, что говорит о присутствии некоторой поправки прогнозируемого значения, поскольку мода скорректированного распределения соответствует точке максимума функции правдоподобия.

Далее рассмотрим ситуацию, когда набор рассматриваемых целевых переменных не связан строгой функциональной зависимостью, но при этом присутствует сильная корреляционная зависимость между моделируемыми случайными величинами. Предположим строится система моделей для целевых переменных  $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(K)}$ , каждая из которых моделируется с помощью набора данных  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(K)}$  соответственно, а также что все рассматриваемые целевые переменные связаны между собой некоторой линейной корреляционной зависимостью:

$$y_t^{(i)} = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} y_t^{(1)} + b_2^{(i)} y_t^{(2)} + \dots + b_K^{(i)} y_t^{(K)} + e_t^{(i)}. \quad (5.20)$$

Тогда, согласно модели (5.20), функция плотности вероятности для прогнозируемого значения целевой переменной  $y_{n+1}^{(i)}$  является сдвинутым и масштабированным  $t$ -распределением с  $\nu = n - K - 1$  степенями свободы.

$$\varphi_i(y_{n+1}^{(i)} | y_{n+1}^{(1)}, \dots, y_{n+1}^{(i-1)}, y_{n+1}^{(i+1)}, \dots, y_{n+1}^{(K)}) = \Psi(\hat{y}_{n+1}^{(i)}, MSFE_{n+1}^{(i)}, n - K - 1), \quad (5.21)$$

$$\text{где } \hat{y}_{n+1}^{(i)} = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} y_{n+1}^{(1)} + b_2^{(i)} y_{n+1}^{(2)} + \dots + b_K^{(i)} y_{n+1}^{(K)}, \quad (5.22)$$

а  $MSFE_{n+1}^{(i)}$  – параметр масштаба, который вычисляется стандартным способом согласно формуле (1.5).

Отсюда делаем вывод, что если умножить совместную плотность вероятности на плотность данного распределения, то получится функция правдоподобия, которая учитывает корреляционную взаимосвязь между рассматриваемыми целевыми переменными. В формуле ниже приведена функция правдоподобия для вычисления поправки для  $i$ -ой целевой переменной.

$$\text{LH}(y_{n+1}^{(i)}) = \Psi_1(y_{n+1}^{(1)}) \cdots \Psi_K(y_{n+1}^{(K)}) \cdot \varphi_i(y_{n+1}^{(i)} | y_{n+1}^{(1)}, \dots, y_{n+1}^{(i-1)}, y_{n+1}^{(i+1)}, \dots, y_{n+1}^{(K)}). \quad (5.23)$$

Из формулы (5.23) легко заметить, что параметры функции  $\varphi_i$ , а именно параметр масштаба и параметр сдвига зависят от неизвестных нам на момент прогнозирования величин  $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, \dots, y_{n+1}^{(i-1)}, y_{n+1}^{(i+1)}, \dots, y_{n+1}^{(K)}$ , по которым строится регрессия на величину  $y_{n+1}^{(i)}$ . Поэтому при вычислении функции правдоподобия функции  $\Psi_i(y_{n+1}^{(i)})$  и  $\varphi_i(y_{n+1}^{(i)})$  имеют одно и то же значение аргумента, однако у первой параметры постоянны, а у второй – зависят от значений, принимаемых остальными целевыми переменными в процессе оптимизации. Здесь следует особо отметить, что несмотря на то, что в результате максимизации функции правдоподобия (5.23) поправкам подвергаются все рассматриваемые целевые переменные, данную функцию правдоподобия нецелесообразно использовать для вычисления поправки отличной от  $y_{n+1}^{(i)}$  величины. Рекомендуется при вычислении поправок для каждой из рассматриваемых целевых переменных использовать отдельную функцию правдоподобия, в которой корректируемая целевая переменная выражается через остальные с помощью линии регрессии. Исходя из вида формулы (5.23) можно сказать, что поправки, полученные при регрессии одной из целевых переменных на все остальные не равны поправкам при регрессии другой целевой переменной на все оставшиеся. Рассчитываемые корректировки будут совпадать только в случае строгой функциональной связи между выходными переменными под рассмотрением. Таким образом, возникает проблема выбора между получившимися корректировками, которую в данном диссертационном исследовании предлагается решить посредством выбора той корректировки, при проведении которой корректируемая целевая переменная моделируется через остальные с помощью линии регрессии. Действуя таким образом, можно добиться более существенного улучшения качества получаемых прогнозов.

Для вычисления исправленной функции плотности будем по аналогии с предыдущим случаем вычислять маргинальное распределение для анализируемой целевой переменной, которое учитывает вероятностные распределения остальных выходных переменных и корреляционную связь между ними. Таким образом, согласно данному способу, скорректированная функция плотности вероятности вычисляется как показано ниже:

$$pdf(y_{n+1}^{(i)}) = \frac{\tilde{\Omega}(y_{n+1}^{(i)})}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}(y_{n+1}^{(i)}) dy_{n+1}^{(i)}}, \quad (5.24)$$

где нормировочная константа в знаменателе представляет собой интеграл функции правдоподобия по всем целевым переменным под рассмотрением, а  $\tilde{\Omega}(y_{n+1}^{(i)})$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(y_{n+1}^{(i)}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(y_{n+1}^{(1)}) \cdot \Psi_2(y_{n+1}^{(2)}) \cdot \dots \cdot \Psi_i(y_{n+1}^{(i)}) \cdot \dots \cdot \Psi_K(y_{n+1}^{(K)}) \cdot \\ & \cdot \varphi_i(y_{n+1}^{(i)} | y_{n+1}^{(1)}, \dots, y_{n+1}^{(i-1)}, y_{n+1}^{(i+1)}, \dots, y_{n+1}^{(K)}) dy_{n+1}^{(1)} \dots dy_{n+1}^{(i-1)} dy_{n+1}^{(i+1)} \dots dy_{n+1}^{(K)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

В целом идея поправок прогнозируемых значений на основе функциональных и корреляционных зависимостей между моделируемыми целевыми переменными некоторым образом схожа с системами одновременных уравнений. Основой для данных систем является совокупность эконометрических уравнений, определяющих взаимосвязь экономических процессов. В структурной форме система одновременных уравнений содержит эндогенные переменные как в левой, так и в правой частях входящих в нее моделей.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1t} = \sum_{(i \neq 1)} a_{1i} y_{it} + \sum_{j=1}^q b_{1j} x_{jt} + e_{1t}, \\ y_{2t} = \sum_{(i \neq 2)} a_{2i} y_{it} + \sum_{j=1}^q b_{2j} x_{jt} + e_{2t}, \\ \dots \\ y_{pt} = \sum_{(i \neq p)} a_{pi} y_{it} + \sum_{j=1}^q b_{pj} x_{jt} + e_{pt}. \end{array} \right. \quad (5.26)$$

Здесь также отметим, что структурную форму системы одновременных уравнений (5.26) можно компактно представить в матричной форме как показано ниже:

$$YA = XB + E, \quad (5.27)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2p} \\ & & \vdots & \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{np} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ & & \vdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & \vdots & \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qp} \end{pmatrix}.$$

Значения эндогенных переменных в данном случае определяются «одновременно» в зависимости от значений отобранных экзогенных переменных. Таким образом, имеет место так называемая приведенная форма системы одновременных уравнений, в которой в каждом уравнении имеется только одна эндогенная переменная, расположенная в левой его части.

$$Y = X\Pi + U. \quad (5.28)$$

Форма (5.28) представляет собой неограниченную приведенную форму.

Ограниченную приведенную форму можно записать следующим образом:

$$Y = XBA^{-1} + EA^{-1}. \quad (5.29)$$

Особо важной характеристикой уравнений таких систем является их идентифицируемость, а именно возможность выразить коэффициенты рассматриваемого уравнения через коэффициенты приведенной формы. В случае, когда данную процедуру можно осуществить единственным способом, говорят о точной идентифицируемости, если это можно сделать несколькими способами – о сверхидентифицируемости. В остальных случаях уравнение классифицируется как неидентифицируемое. Необходимым условием идентифицируемости структурного уравнения системы (так называемое счетное правило) является то, что количество включенных в него эндогенных переменных должно быть не больше количества не участвующих в нем экзогенных переменных плюс единица. При этом достаточное условие идентифицируемости формулируется так: ранг матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, отсутствующих в данном уравнении, не меньше общего числа эндогенных переменных системы минус единица. В случае точной идентифицируемости для оценки параметров системы одновременных уравнений обычно используют косвенный метод наименьших квадратов, который заключается в том, чтобы оценить структурные коэффициенты, подставив в аналитическое выражение их зависимости от приведенных оценок последних, полученных с помощью обычного МНК. В случае неидентифицируемости и сверхидентифицируемости часто прибегают к двухшаговому МНК, суть которого сводится к предварительной оценке эндогенных переменных от всех экзогенных с помощью обычного МНК, после которой посредством этого же метода оценивается структурная форма системы, где вместо эндогенных переменных используются их оценки, полученные на первом шаге.

Фактически, оценивание параметров системы одновременных уравнений сводится к использованию доступных экзогенных переменных для получения модельных значений эндогенных переменных. Таким образом учитывается вся информация, содержащаяся в экзогенных объясняющих переменных. Однако такой подход далеко не всегда является оправданным, поскольку достаточно часто дает менее эффективные прогнозы, чем моделирование каждой из переменных по отдельности. Причиной ухудшения качества получаемых прогнозов при оценивании систем одновременных уравнений зачастую является мультиколлинеарность объясняющих переменных. Представим ситуацию, при которой моделируются два тесно взаимосвязанных процесса, каждый из которых оценивается с помощью авторегрессии порядка  $q$  плюс одна эндогенная переменная.

$$\begin{cases} \hat{y}_{1t} = b_{10} + a_1 y_{2t} + \sum_{j=1}^q b_{1j} y_{1(t-j)}, \\ \hat{y}_{2t} = b_{20} + a_2 y_{1t} + \sum_{j=1}^q b_{2j} y_{2(t-j)}. \end{cases}$$

В таком случае процедура моделирования  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  будет сводиться к оценке двух регрессионных уравнений, где каждая из целевых переменных моделируется с помощью всех доступных экзогенных факторов.

$$\begin{cases} \hat{y}_{1t} = b_0 + \sum_{j=1}^q b_{1j} y_{1(t-j)} + \sum_{j=1}^q b_{1j} y_{2(t-j)}, \\ \hat{y}_{2t} = c_0 + \sum_{j=1}^q c_{1j} y_{1(t-j)} + \sum_{j=1}^q c_{2j} y_{2(t-j)}. \end{cases} \quad (5.30)$$

Однако прогнозы, получаемые таким образом, будут хоть и согласованными, но

менее точными, чем при построении простой авторегрессии по каждому из анализируемых процессов вследствие образующейся высокой степени мультиколлинеарности независимых переменных, см. раздел 1.3 диссертационного исследования. Поскольку  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  тесно взаимосвязаны, то взаимосвязаны и  $y_{1(t-i)}$  и  $y_{2(t-i)}$ , которые включены в уравнения системы (5.30), откуда как раз и следует проблема мультиколлинеарности. Таким образом, встает дилемма выбора либо в пользу согласованности получаемых прогнозов с потерей их точности, либо в пользу повышенной точности с допущением рассогласованности.

Предлагаемый в данном разделе метод направлен на разрешение вышеупомянутой проблемы. Он позволяет получать полностью согласованные прогнозы при более высокой точности предсказания, чем при моделировании каждого из рассматриваемых индикаторов по отдельности. Особенно явно эффективность предлагаемого метода заметна при высокой степени мультиколлинеарности экзогенных переменных, а также в случаях сверхидентифицируемости и неидентифицируемости системы уравнений.

### **5.3 Эмпирическое и имитационное тестирование метода учета функциональных и корреляционных зависимостей**

С целью тестирования эффективности предлагаемых в данной главе диссертации методов проведем имитационные и эмпирические эксперименты. Сначала проверим насколько хорошо работает разработанная система поправок для искусственно сгенерированных данных при наличии функциональной связи между прогнозируемыми переменными. Рассмотрим простейший случай, когда моделируются три целевые переменные  $y_{1t}$ ,  $y_{2t}$  и  $y_{3t}$  с помощью однофакторной

линейной регрессионной модели, а именно:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{11}x_{1t} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{21}x_{2t} + \varepsilon_{2t}, \\ y_{3t} &= \beta_{30} + \beta_{31}x_{3t} + \varepsilon_{3t}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Причем моделируемые целевые переменные связаны функциональной зависимостью  $y_{3t} = y_{1t} + y_{2t}$ . Объясняющие переменные  $x_{1t}$  и  $x_{2t}$  генерируются исходя из нормального распределения с нулевой средней и единичной дисперсией, а переменная  $x_{3t}$  – с помощью функциональной связи  $x_{3t} = x_{1t} + x_{2t}$ . Истинные параметры данного эксперимента устанавливались на уровнях  $\beta_{10} = 2$ ,  $\beta_{20} = 2$ ,  $\beta_{11} = 0.7$  и  $\beta_{21} = 0.7$ . Истинные ошибки первых двух моделей генерируются исходя из нормального распределения с нулевой средней и единичной дисперсией, а именно:  $\varepsilon_{1t} \sim N(0,1)$  и  $\varepsilon_{2t} \sim N(0,1)$ . По третьей модели истинные коэффициенты и ошибки в явном виде не генерируются, поскольку  $y_{3t}$  и  $x_{3t}$  определяются функционально согласно значениям факторов и целевых переменных по первым двум моделям.

В таблице 5.1 представлена среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза для моделей (5.31), обозначенных как  $\hat{y}_{1t}$ ,  $\hat{y}_{2t}$  и  $\hat{y}_{3t}$ , а также для моделей с учетом предложенных поправок ( $\check{y}_{1t}$ ,  $\check{y}_{2t}$ ,  $\check{y}_{3t}$ ) и для моделей с учетом всех объясняющих переменных системы, приведенных ниже:

$$\begin{aligned} \check{y}_{1t} &= c_{10} + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t}, \\ \check{y}_{2t} &= c_{20} + c_{21}x_{1t} + c_{22}x_{2t}, \\ \check{y}_{3t} &= c_{30} + c_{31}x_{1t} + c_{32}x_{2t}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Для обеспечения всеобъемлющего имитационного эксперимента описанные модели тестировались на окнах данных различной длины ( $n$ ) и сравнивались по показателю среднеквадратической реализованной ошибки прогноза, для расчета каждой из

которых использовалось по 10 000 имитаций. Исходя из этого, полученные в результате эксперимента данные можно рассматривать в качестве основания для того, чтобы сделать состоятельные выводы относительно эффективности работы предлагаемых в данном разделе диссертации методов.

**Таблица 5.1** – Сравнение анализируемых методов, имитационный эксперимент, функциональная зависимость

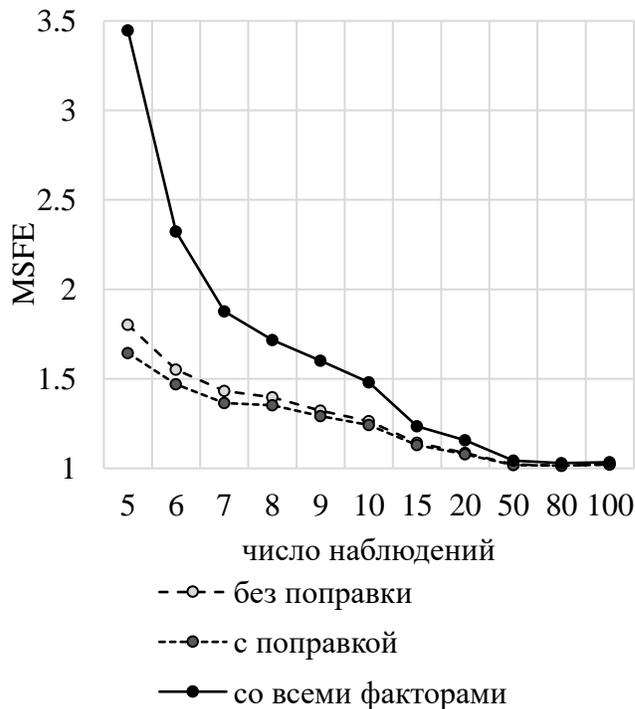
$n$	$\hat{y}_{1t}$	$\hat{y}_{2t}$	$\hat{y}_{3t}$	$\check{y}_{1t}$	$\check{y}_{2t}$	$\check{y}_{3t}$	$\tilde{y}_{1t}$	$\tilde{y}_{2t}$	$\tilde{y}_{3t}$
5	1.8019	1.8276	3.5756	<b>1.6442</b>	<b>1.6751</b>	<b>3.1601</b>	3.4469	4.0148	7.8445
6	1.5515	1.5467	3.0982	<b>1.4703</b>	<b>1.4768</b>	<b>2.8733</b>	2.3229	2.3652	4.7144
7	1.4329	1.4091	2.7944	<b>1.3656</b>	<b>1.3667</b>	<b>2.6249</b>	1.8767	1.8832	3.7273
8	1.3962	1.3734	2.7777	<b>1.3517</b>	<b>1.3329</b>	<b>2.6383</b>	1.7161	1.7349	3.4859
9	1.3225	1.2916	2.5672	<b>1.2927</b>	<b>1.2604</b>	<b>2.4694</b>	1.6013	1.5391	3.0879
10	1.2638	1.3012	2.5377	<b>1.2414</b>	<b>1.2768</b>	<b>2.4443</b>	1.4808	1.5111	2.9322
15	1.1418	1.1421	2.3064	<b>1.1293</b>	<b>1.1299</b>	<b>2.2582</b>	1.2341	1.2623	2.5204
20	1.0857	1.1089	2.1876	<b>1.0776</b>	<b>1.0991</b>	<b>2.1631</b>	1.1575	1.1763	2.3346
50	1.0217	1.0273	2.0583	<b>1.0189</b>	<b>1.0263</b>	<b>2.0527</b>	1.0432	1.0533	2.1087
80	1.0151	1.0275	2.0108	<b>1.0149</b>	<b>1.0263</b>	<b>2.0069</b>	1.0292	1.0371	2.0383
100	<b>1.0209</b>	1.0005	2.0009	1.0212	<b>0.9995</b>	<b>1.9939</b>	1.0339	1.0107	2.0215

Источник: составлено автором

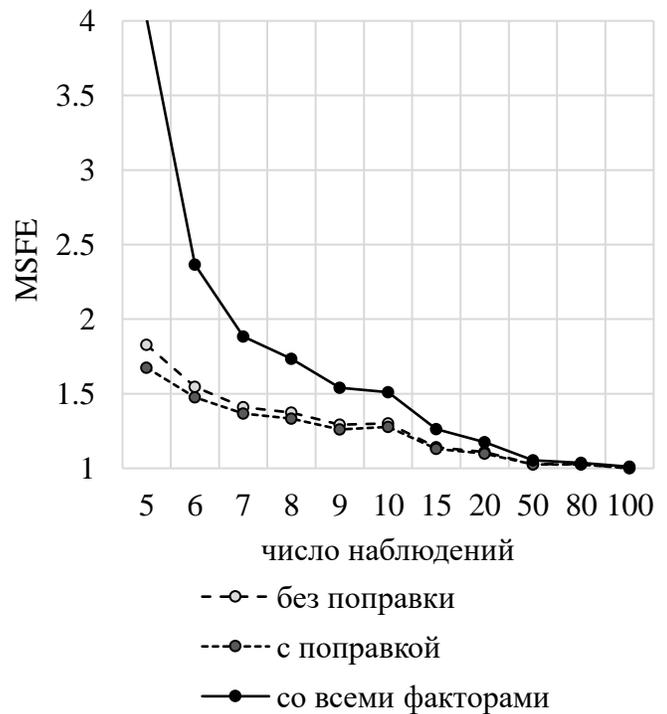
Как видно из таблицы 5.1, предложенный метод поправок прогнозируемых целевых переменных превосходит по точности как модели (5.31), так и модели (5.32) практически при любом из рассматриваемых окон данных. Исключение составляет только среднеквадратическая реализованная ошибка по модели  $\hat{y}_{1t}$  для окна наблюдений  $n = 100$ , которая в результате проведенных имитаций оказалась незначительно меньше ошибки, полученной согласно предложенной модели  $\check{y}_{1t}$ .

На рисунках 5.8-5.10 приведено графическое представление результатов имитационного эксперимента с целью демонстрации более высокой точности получаемых прогнозов при применении предлагаемого метода поправок. Рисунок 5.8 показывает динамику изменения среднеквадратической реализованной ошибки прогноза для целевой переменной  $y_{1t}$  в зависимости от длины окна наблюдений  $n$ .

Как можно заметить из этого рисунка, прогнозы с предлагаемой поправкой практически всегда превосходят по точности классическую модель и значительно превосходят модель, построенную с использованием всех экзогенных факторов системы особенно при коротком окне данных. Абсолютно те же самые выводы верны и для рисунков 5.9 и 5.10, где изображена динамика среднеквадратической реализованной ошибки прогноза для переменных  $y_{2t}$  и  $y_{3t}$  соответственно.



**Рисунок 5.8** – Эффективность предсказания  $y_{1t}$ , имитационный эксперимент, функциональная зависимость

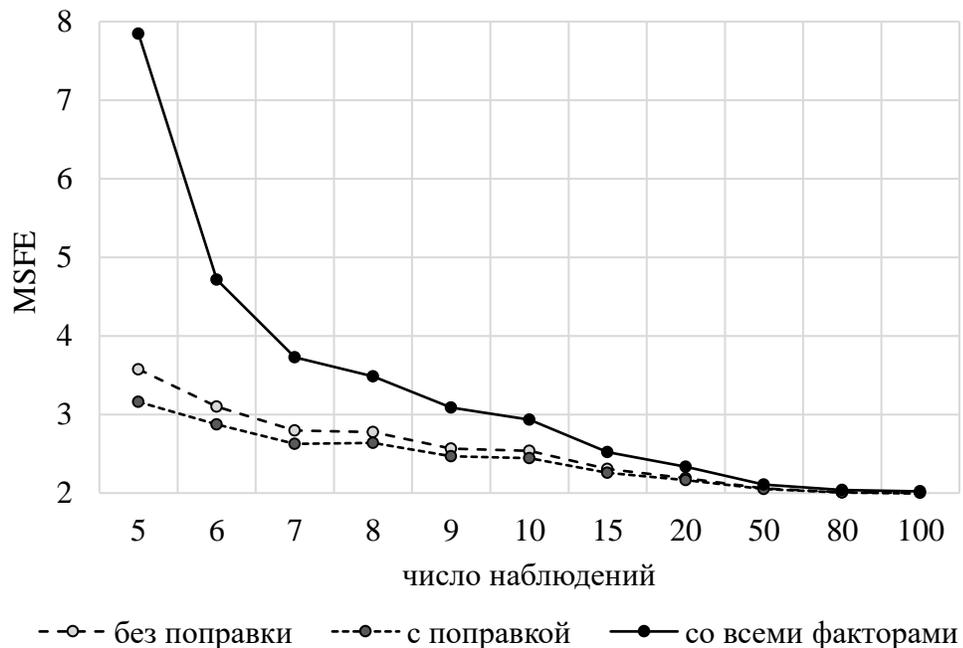


**Рисунок 5.9** – Эффективность предсказания  $y_{2t}$ , имитационный эксперимент, функциональная зависимость

Источник: составлено автором

По всем целевым переменным и рассматриваемым методам точность предсказания растет с увеличением числа наблюдений и при достаточно длинном окне данных различия в среднеквадратической реализованной ошибке прогноза

можно считать несущественными. Однако при анализе временных рядов макроэкономических процессов практически всегда приходится работать в условиях недостатка статистических данных. Как было показано в разделе 3.1 диссертационного исследования, при моделировании таких данных слишком длинное окно способствует получению таких же неточных прогнозов, как и слишком короткое. Вследствие этого зачастую при анализе макроэкономических процессов возникают условия ограниченной статистики где применение предлагаемых поправок позволяет ощутимо сократить ошибку прогноза.



**Рисунок 5.10** – Эффективность предсказания  $y_{3t}$ , имитационный эксперимент, функциональная зависимость

Источник: составлено автором

Далее перейдем к эмпирическому тестированию метода поправок с учетом функциональной связи моделируемых целевых переменных. Рассмотрим простейшее трехфакторное макроэкономическое уравнение (5.3), описанное в разделе 5.1

диссертационного исследования. Оно связывает показатели индекс ВВП, индекс РВВП и индекс-дефлятор ВВП таким образом, что индекс ВВП равен произведению индекса ВВП, выраженного в постоянных ценах, который отражает изменение в реальном выпуске товаров и услуг, и индекса-дефлятора ВВП, отражающего рост или падение цен в экономике. Для тестирования разработанных методов была собрана поквартальная статистика по США для данных индикаторов, начиная с Q1.1947 и заканчивая Q2.2019. Таким образом, набор статистических данных для проведения эмпирического эксперимента составляет 290 наблюдений. Базовая система моделей представляется в виде авторегрессии четвертого порядка как показано ниже:

$$\begin{cases} \hat{I}_{pt} = b_{10} + b_{11}I_{p(t-1)} + b_{12}I_{p(t-2)} + b_{13}I_{p(t-3)} + b_{14}I_{p(t-4)}, \\ \hat{I}_{qt} = b_{20} + b_{21}I_{q(t-1)} + b_{22}I_{q(t-2)} + b_{23}I_{q(t-3)} + b_{24}I_{q(t-4)}, \\ \hat{I}_{pqt} = b_{30} + b_{31}I_{pq(t-1)} + b_{32}I_{pq(t-2)} + b_{33}I_{pq(t-3)} + b_{34}I_{pq(t-4)}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Также добавим к сравнению модели рассматриваемых трех целевых переменных с участием всех экзогенных переменных системы (5.33). Таким образом, получим в некотором роде эквивалент приведенной формы системы одновременных линейных уравнений.

$$\begin{cases} \tilde{I}_{pt} = b_{10} + \sum_{i=1}^4 b_{1i}I_{p(t-i)} + \sum_{j=1}^4 c_{1j}I_{q(t-j)} + \sum_{k=1}^4 d_{1k}I_{pq(t-k)}, \\ \tilde{I}_{qt} = b_{20} + \sum_{i=1}^4 b_{2i}I_{p(t-i)} + \sum_{j=1}^4 c_{2j}I_{q(t-j)} + \sum_{k=1}^4 d_{2k}I_{pq(t-k)}, \\ \tilde{I}_{pqt} = b_{30} + \sum_{i=1}^4 b_{3i}I_{p(t-i)} + \sum_{j=1}^4 c_{3j}I_{q(t-j)} + \sum_{k=1}^4 d_{3k}I_{pq(t-k)}. \end{cases} \quad (5.34)$$

В таблице 5.2 приведена среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза по моделям (5.33), (5.34) и моделям с поправками согласно предлагаемому методу, рассчитанным по собранной базе статистических данных.

**Таблица 5.2** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, функциональная зависимость

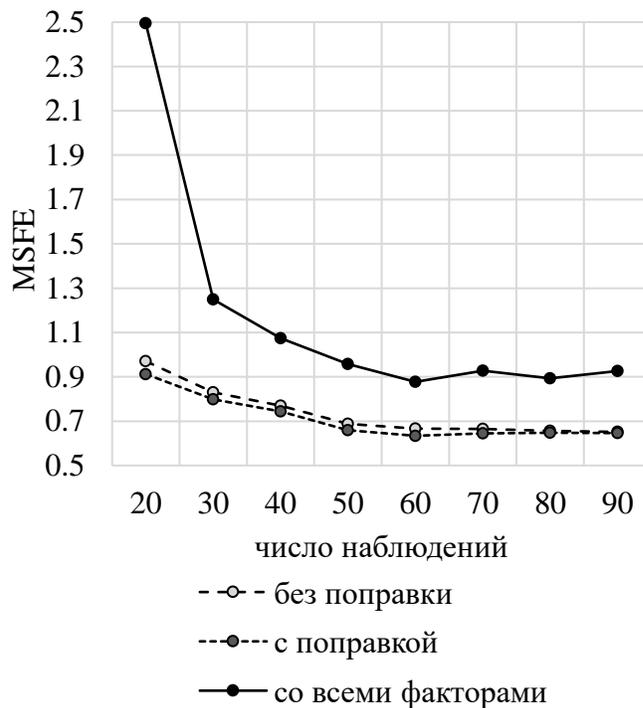
$n$	$\hat{I}_p$	$\hat{I}_q$	$\hat{I}_{pq}$	$\check{I}_p$	$\check{I}_q$	$\check{I}_{pq}$	$\tilde{I}_p$	$\tilde{I}_q$	$\tilde{I}_{pq}$
20	0.9705	0.1103	0.9757	<b>0.9123</b>	<b>0.1064</b>	<b>0.9702</b>	2.4943	0.3209	2.4845
30	0.8295	0.0857	0.8598	<b>0.7985</b>	<b>0.0837</b>	<b>0.8362</b>	1.2493	0.1734	1.3475
40	0.7695	0.0775	0.8373	<b>0.7444</b>	<b>0.0769</b>	<b>0.7971</b>	1.0735	0.1281	1.1849
50	0.6878	0.0779	0.7502	<b>0.6592</b>	<b>0.0779</b>	<b>0.7181</b>	0.9584	0.1032	1.0215
60	0.6662	0.0792	0.7364	<b>0.6341</b>	<b>0.0791</b>	<b>0.7009</b>	0.8775	0.0951	0.9421
70	0.6654	0.0837	0.7683	<b>0.6443</b>	<b>0.0828</b>	<b>0.7217</b>	0.9275	0.0957	1.0054
80	0.6562	<b>0.0887</b>	0.7718	<b>0.6481</b>	<b>0.0887</b>	<b>0.7199</b>	0.8932	0.0988	0.9639
90	0.6516	<b>0.0866</b>	0.7941	<b>0.6461</b>	0.0867	<b>0.7388</b>	0.9257	0.0989	0.9981
100	0.5814	<b>0.0776</b>	0.6822	<b>0.5694</b>	0.0792	<b>0.6537</b>	0.8594	0.1081	0.8257
110	0.5294	<b>0.0577</b>	0.6628	<b>0.5247</b>	0.0581	<b>0.6242</b>	0.6032	0.0701	0.7112
120	0.5324	<b>0.0511</b>	0.6626	<b>0.5208</b>	0.0521	<b>0.6256</b>	0.5933	0.0588	0.7183

Источник: составлено автором на основе данных Бюро экономического анализа США (англ. U.S. Bureau of Economic Analysis) и Бюро трудовой статистики США

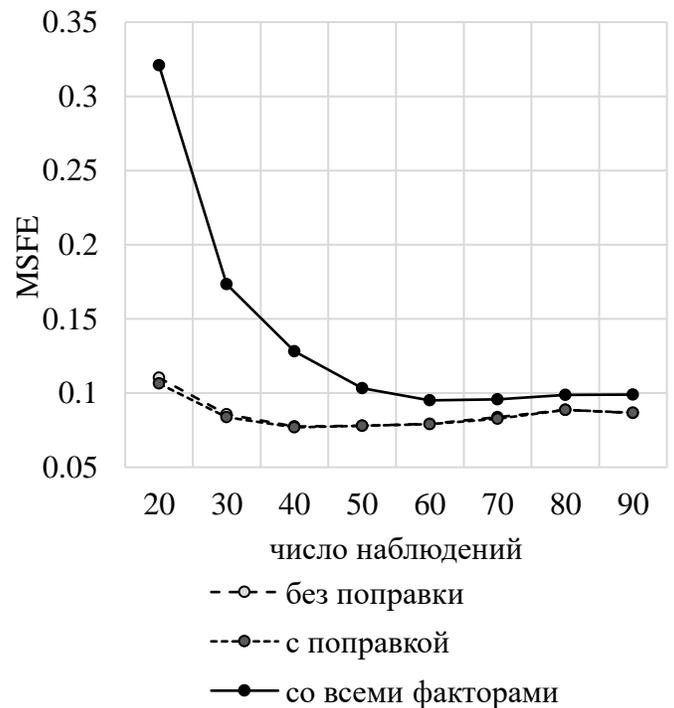
Как видно из таблицы 5.2, предложенный метод поправок прогнозируемых целевых переменных в подавляющем числе случаев превосходит по точности как модели (5.33), так и модели (5.34). Исключением в данном случае являются только среднеквадратические реализованные ошибки по модели  $\hat{I}_{qt}$  для окон наблюдений  $n = 90$ ,  $n = 100$ ,  $n = 110$  и  $n = 120$ , которые в результате проведенного эмпирического тестирования оказалась незначительно меньше ошибки, полученной согласно предложенной модели  $\check{I}_{qt}$ .

На рисунках 5.11-5.13 приведено графическое представление результатов эмпирического эксперимента с целью демонстрации более высокой точности получаемых прогнозов при применении предлагаемого метода поправок. Рисунок 5.9а показывает динамику изменения среднеквадратической реализованной ошибки прогноза для целевой переменной  $I_{pt}$  в зависимости от длины окна наблюдений  $n$ . Из этого рисунка можно заметить, что прогнозы с предлагаемой поправкой практически всегда превосходят по точности классическую модель и значительно превосходят модель, построенную с использованием всех экзогенных факторов

системы особенно при коротком окне данных. В отличие от динамики среднеквадратической реализованной ошибки прогноза согласно предыдущему имитационному эксперименту в данном случае динамика данной ошибки не имеет ярко выраженную гиперболическую форму. Из рисунков 5.11-5.13 можно заметить, что показатель MSRE показывает локальный минимум в районе  $n = 60$ , после чего наблюдается небольшой рост до  $n = 90$ . Таким образом, на промежутке от  $n = 20$  до  $n = 90$  наблюдается параболическая зависимость среднеквадратической реализованной ошибки от длины окна наблюдений, которая уже была детально описана в разделе 3.1 диссертационного исследования.

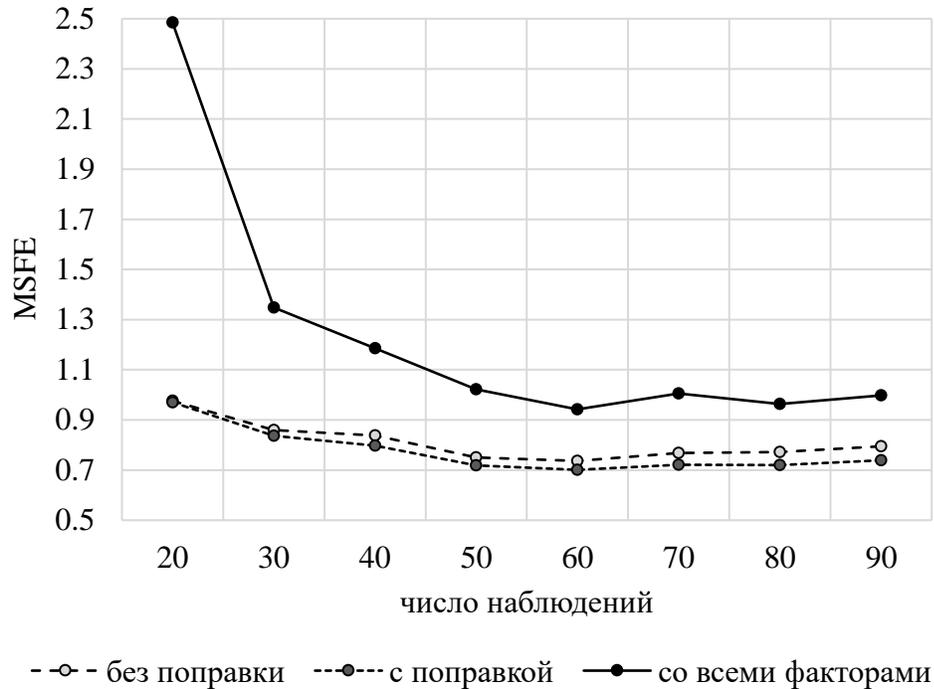


**Рисунок 5.11** – Эффективность предсказания  $I_p$ , эмпирический эксперимент, функциональная зависимость



**Рисунок 5.12** – Эффективность предсказания  $I_q$ , эмпирический эксперимент, функциональная зависимость

Источник: составлено автором на основе данных Бюро экономического анализа США (англ. U.S. Bureau of Economic Analysis) и Бюро трудовой статистики США



**Рисунок 5.13** – Эффективность предсказания  $I_{pq}$ , эмпирический эксперимент, функциональная зависимость

Источник: составлено автором на основе данных Бюро экономического анализа США (англ. U.S. Bureau of Economic Analysis) и Бюро трудовой статистики США

Также отметим еще одно отличие эмпирического эксперимента от предыдущего имитационного. На рисунке 5.13 можно видеть, что абсолютная разница в точности метода с поправкой и без поправки растет по мере увеличения длины окна наблюдений, в то время как на рисунках 5.11-5.12 данная разница наоборот уменьшается по аналогии с результатами имитационного эксперимента. Этот феномен предположительно объясняется нестрогой выполнимостью всех предпосылок МНК при моделировании временных рядов макроэкономических процессов, что подтверждается наличием ранее упомянутой параболической зависимости среднеквадратической реализованной ошибки прогноза и длины окна наблюдений.

Далее перейдем к тестированию предлагаемых методов поправок получаемых

прогнозов в случае, когда рассматриваемые целевые переменные связаны не функциональной, а корреляционной зависимостью. Начнем с проведения имитационного эксперимента. Пусть моделируются две целевые переменные  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  с помощью однофакторной линейной регрессионной модели, а именно:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1t} &= b_{10} + b_{11}x_{1t}, \\ \hat{y}_{2t} &= b_{20} + b_{21}x_{2t}.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Причем моделируемые целевые переменные связаны некоторой корреляционной зависимостью  $y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 y_{1t} + \varepsilon_t$ . Для машинной генерации эндогенных и экзогенных переменных данной системы воспользуемся методом генерации коррелированных нормально распределенных случайных величин, детально рассмотренным в разделе 1.4 диссертационного исследования. Во-первых, определим истинную дисперсионно-ковариационную матрицу

$$\Sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0.1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.15 \\ 0.15 & 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.15 & 0.9 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix},$$

посредством которой задаются взаимосвязи между экзогенными и эндогенными переменными системы. Далее введем вектор-столбец независимых, идентично распределенных переменных  $Z_{4 \times 1}$ , которые подчиняются нормальному закону распределения с нулевой средней и единичной дисперсией, что подразумевает, что

$$E(ZZ^T) = I_m.$$

После чего будем генерировать переменные  $x_{1t}$ ,  $x_{2t}$ ,  $y_{1t}$  и  $y_{2t}$  с помощью разложения Холецкого истинной дисперсионно-ковариационной матрицы  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} x_{1t} &= S_{[1,\cdot]}Z_t \\ x_{2t} &= S_{[2,\cdot]}Z_t \\ y_{1t} &= S_{[3,\cdot]}Z_t, \\ y_{2t} &= S_{[4,\cdot]}Z_t \end{aligned} \quad (5.36)$$

где  $\Sigma = SS^T$ ,  $S_{[i,\cdot]}$  –  $i$ -ая строчка нижней треугольной матрицы  $S$ .

Таким образом, для каждого наблюдения  $t$  получим участвующие в рассматриваемой системе уравнений переменные, которые имеют истинную дисперсионно-ковариационную матрицу  $\Sigma$ . По аналогии с предыдущим имитационным экспериментом описанные модели тестировались на окнах данных различной длины ( $n$ ) и сравнивались по показателю среднеквадратической реализованной ошибки прогноза, для расчета каждой из которых использовалось по 10 000 имитаций. Исходя из этого, полученные в результате эксперимента данные можно рассматривать в качестве основания для того, чтобы сделать состоятельные выводы относительно эффективности работы предлагаемых в данном разделе диссертации методов.

В таблице 5.3 представлена среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза для моделей (5.35), а также для моделей с учетом предложенных поправок и для моделей с учетом всех объясняющих переменных системы, приведенных ниже:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{1t} &= c_{10} + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t}, \\ \tilde{y}_{2t} &= c_{20} + c_{21}x_{1t} + c_{22}x_{2t}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Для проведения поправок будем использовать две функции правдоподобия.

Поправки  $\check{y}_{1,1}$  и  $\check{y}_{2,1}$  получаются посредством максимизации следующей функции правдоподобия:

$$LN = \Psi_1 \left( y_{n+1}^{(1)} \right) \cdot \Psi_2 \left( y_{n+1}^{(2)} \right) \cdot \phi_1 \left( y_{n+1}^{(1)} \mid y_{n+1}^{(2)} \right), \quad (5.38)$$

а поправки  $\check{y}_{1,2}$  и  $\check{y}_{2,2}$  вычисляются с помощью максимизации функции правдоподобия, представленной ниже:

$$LN = \Psi_1 \left( y_{n+1}^{(1)} \right) \cdot \Psi_2 \left( y_{n+1}^{(2)} \right) \cdot \phi_2 \left( y_{n+1}^{(2)} \mid y_{n+1}^{(1)} \right). \quad (5.39)$$

Отличием функций правдоподобия (5.38) и (5.39) является то, что в случае (5.38) строится регрессия для  $y_{n+1}^{(1)}$  с фактором  $y_{n+1}^{(2)}$ , а для функции правдоподобия (5.39) наоборот – используется уравнение регрессии для  $y_{n+1}^{(2)}$  с  $y_{n+1}^{(1)}$  в качестве объясняющей переменной.

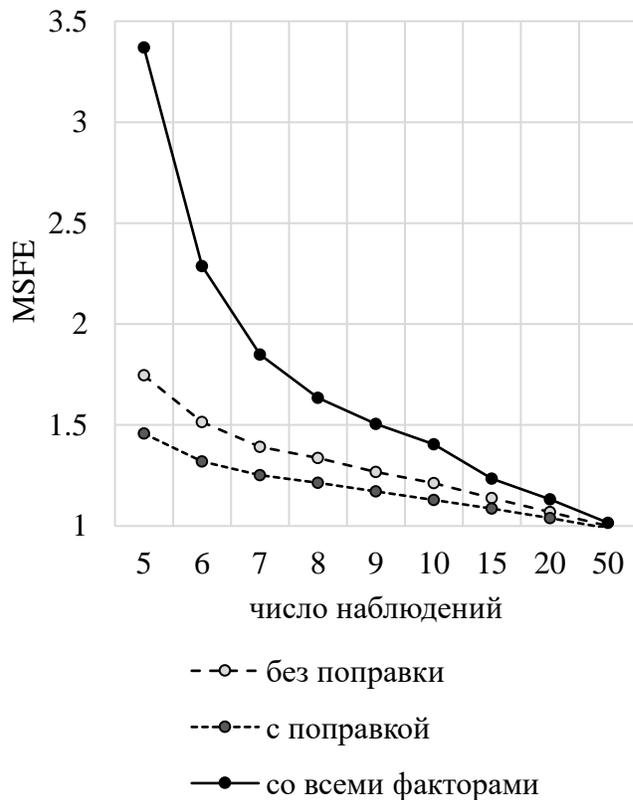
**Таблица 5.3** – Сравнение анализируемых методов, имитационный эксперимент, корреляционная зависимость

$n$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\check{y}_{1,1}$	$\check{y}_{2,1}$	$\check{y}_{1,2}$	$\check{y}_{2,2}$	$\check{y}_1$	$\check{y}_2$
<b>5</b>	1.7458	1.7253	<b>1.4577</b>	1.4812	1.4985	<b>1.4371</b>	3.3691	3.2243
<b>6</b>	1.5144	1.5095	<b>1.3197</b>	1.3378	1.3465	<b>1.3142</b>	2.2871	2.2294
<b>7</b>	1.3914	1.3867	<b>1.2512</b>	1.2597	1.2736	<b>1.2387</b>	1.8487	1.8112
<b>8</b>	1.3371	1.3074	<b>1.2136</b>	1.2288	1.2324	<b>1.2136</b>	1.6348	1.6468
<b>9</b>	1.2675	1.2454	<b>1.1714</b>	1.1728	1.1877	<b>1.1601</b>	1.5057	1.4979
<b>10</b>	1.2128	1.2222	<b>1.1281</b>	1.1504	1.1413	<b>1.1379</b>	1.4051	1.4161
<b>15</b>	1.1376	1.1253	<b>1.0859</b>	1.0872	1.0949	<b>1.0808</b>	1.2343	1.2253
<b>20</b>	1.0684	1.0813	<b>1.0394</b>	1.0485	1.0446	<b>1.0438</b>	1.1325	1.1389
<b>50</b>	0.9996	1.0116	<b>0.9887</b>	0.9982	0.9904	<b>0.9976</b>	1.0158	1.0235

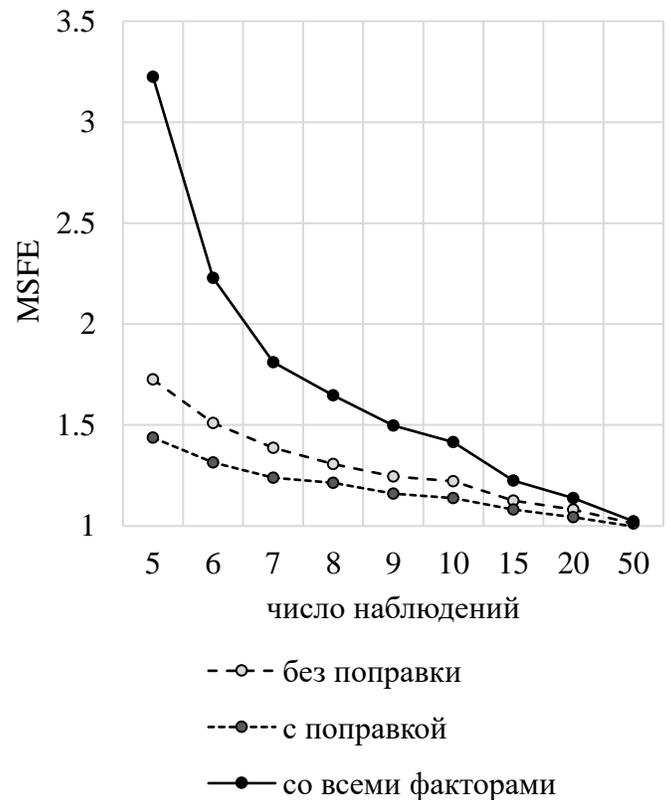
Источник: составлено автором

Как видно из таблицы 5.3, предлагаемый метод поправок во всех

рассматриваемых случаях работает лучше, чем традиционные модели и модели с участием всех экзогенных факторов системы. С целью наглядной демонстрации эффективности предлагаемых методов на рисунках 5.14-5.15 приведена динамика изменения среднеквадратической реализованной оценки прогноза для анализируемых подходов.



**Рисунок 5.14** – Эффективность предсказания  $y_1$ , имитационный эксперимент, корреляционная зависимость

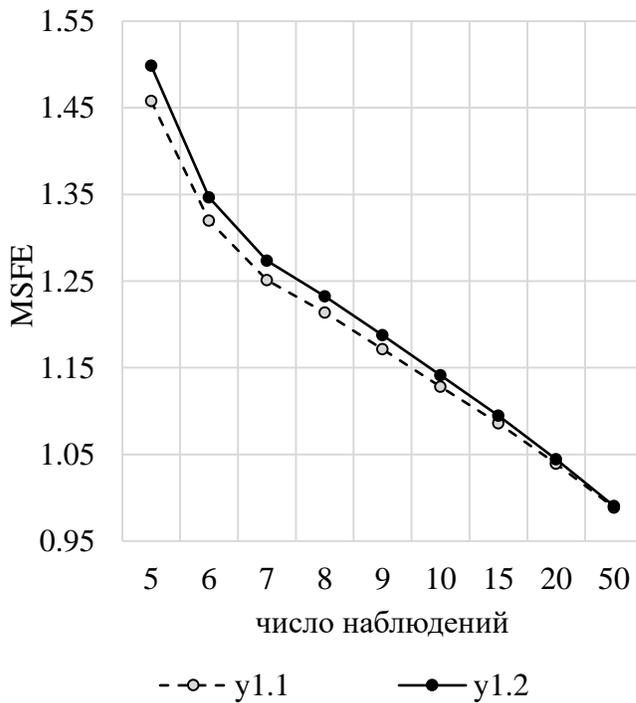


**Рисунок 5.15** – Эффективность предсказания  $y_2$ , имитационный эксперимент, корреляционная зависимость

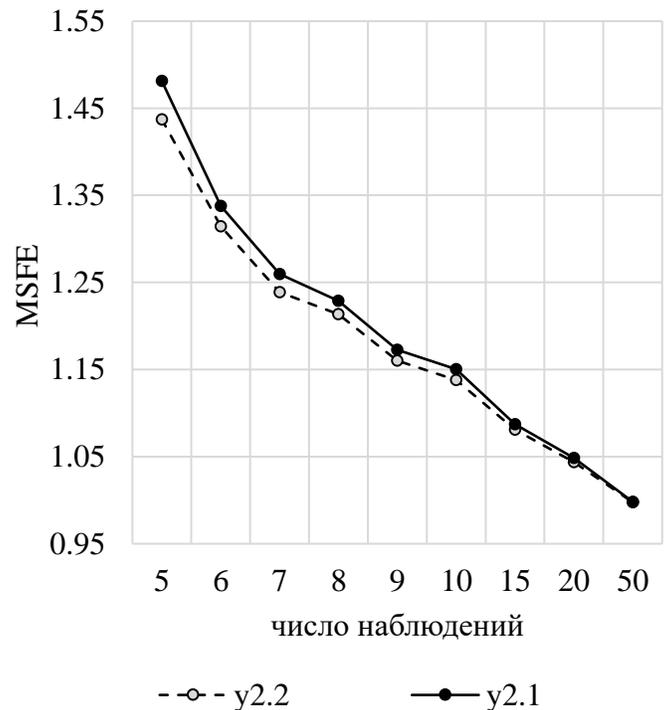
Источник: составлено автором

Из рисунков 5.14 и 5.15 видно, что показатель MSRE имеет гиперболическую зависимость от длины окна наблюдений точно так же, как и в случае с имитационным

экспериментом при наличии функциональной связи между рассматриваемыми целевыми переменными. Также можно отчетливо проследить, что предлагаемый метод дает существенное улучшение качества прогноза по сравнению с моделями (5.35) и (5.37), особенно в условиях короткого окна данных. При достаточно большом числе наблюдений разница в точности прогнозирования между анализируемыми подходами минимальна, однако при моделировании временных рядов макроэкономических процессов такая ситуация встречается крайне редко, из чего можно сделать вывод о наличии определенной практической значимости предлагаемых в данной главе диссертации подходов.



**Рисунок 5.16** – Эффективность предсказания  $y_1$  по  $\check{y}_{1.1}$  и  $\check{y}_{1.2}$ , имитационный эксперимент, корреляционная зависимость



**Рисунок 5.17** – Эффективность предсказания  $y_2$  по  $\check{y}_{2.1}$  и  $\check{y}_{2.2}$ , имитационный эксперимент, корреляционная зависимость

Источник: составлено автором

На рисунках 5.16-5.17 представлено сравнение динамики показателя MSRE для моделей  $\check{y}_{1.1}$ - $\check{y}_{1.2}$  (поправки для  $y_{1t}$ , рассчитанные по регрессиям  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$  и  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ ) и  $\check{y}_{2.1}$ - $\check{y}_{2.2}$  (поправки для  $y_{2t}$ , полученные по регрессиям  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$  и  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ ) соответственно.

Как видно из рисунка 5.16, модель  $\check{y}_{1.1}$ , которая опирается на линию регрессии  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$ , показывает более высокую точность прогноза, чем модель  $\check{y}_{1.2}$ , использующая уравнение регрессии  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ . Анализируя рисунок 5.17, аналогичный вывод можно сделать и о моделях  $\check{y}_{2.1}$  -  $\check{y}_{2.2}$ , где поправки с использованием регрессии  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$  работают лучше для прогнозирования переменной  $y_{2t}$ . Среднеквадратические реализованные ошибки прогноза по сравниваемым моделям демонстрируют схожую нисходящую динамику с уменьшающейся разницей по мере увеличения числа наблюдений в окне данных. Таким образом, исходя из проведенного анализа, есть основания утверждать, что является целесообразным, применять рекомендацию, высказанную в разделе 5.2 диссертационного исследования, о том, что в процессе выбора между получившимися корректировками, рекомендуется выбрать ту, при проведении которой корректируемая целевая переменная моделируется через остальные с помощью линии регрессии.

Перейдем к проведению эмпирического тестирования метода поправок прогнозов макроэкономических индикаторов на основе учета корреляционных зависимостей между ними. Здесь будем рассматривать дневные данные по двум фондовым индексам США DJIA и S&P 500, детально рассмотренным в разделе 5.1 диссертации. С целью обеспечения стационарности моделируемых процессов преобразуем исходные данные в темпы прироста согласно формуле (2.48). Для удобства дальнейшего анализа обозначим целевую переменную DJIA как  $y_{1t}$ , а целевую переменную S&P 500 как  $y_{2t}$ . В данном эксперименте моделирование рассматриваемых целевых переменных осуществляется с помощью простой

авторегрессионной модели, а именно:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1t} &= b_{10} + b_{11}y_{1(t-1)}, \\ \hat{y}_{2t} &= b_{20} + b_{21}y_{2(t-2)}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

Здесь отметим, что во избежание высокой степени мультиколлинеарности между лаговыми переменными системы (5.40) и, как следствие, малой информативности поправок при такой структуре уравнений переменная  $y_{2t}$  моделируется с помощью лага  $t - 2$ , а не  $t - 1$ . По аналогии с предыдущими экспериментами данного раздела описанные модели тестировались на окнах данных различной длины ( $n$ ) и сравнивались по показателю среднеквадратической реализованной ошибки прогноза, для расчета каждой из которых использовались дневные данные по рассматриваемым фондовым индексам США за период с 05.10.2012 по 05.10.2017.

В таблице 5.4 представлена среднеквадратическая реализованная ошибка прогноза для моделей (5.40), а также для моделей с учетом предложенных поправок и для моделей с учетом всех объясняющих переменных системы, приведенных ниже:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{1t} &= c_{10} + c_{11}y_{1(t-1)} + c_{12}y_{2(t-2)}, \\ \tilde{y}_{2t} &= c_{20} + c_{21}y_{1(t-1)} + c_{22}y_{2(t-2)}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

По аналогии с предыдущим имитационным экспериментом для проведения поправок будем использовать две функции правдоподобия. Поправки  $\check{y}_{1.1}$  и  $\check{y}_{2.1}$  получаются посредством максимизации функции правдоподобия (5.38), а поправки  $\check{y}_{1.2}$  и  $\check{y}_{2.2}$  вычисляются с помощью максимизации функции правдоподобия (5.39).

**Таблица 5.4** – Сравнение анализируемых методов, эмпирический эксперимент, корреляционная зависимость

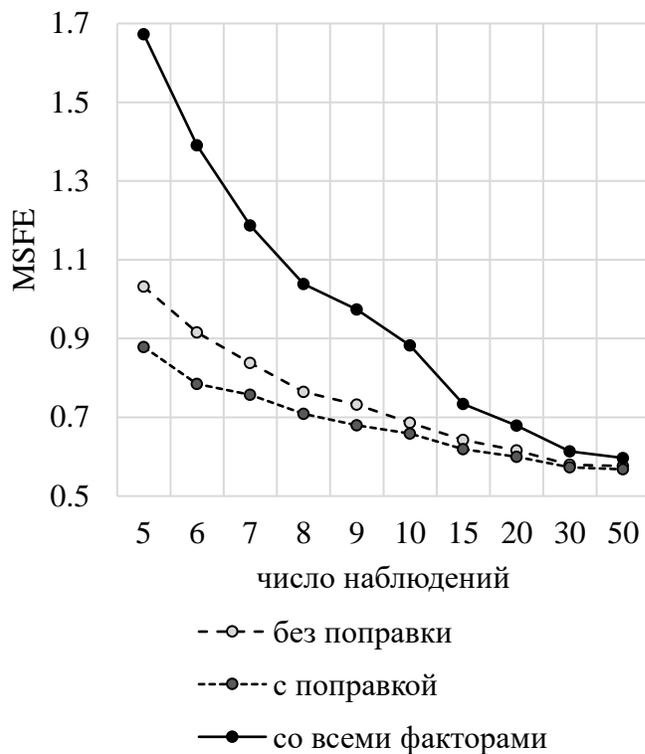
$n$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\check{y}_{1.1}$	$\check{y}_{2.1}$	$\check{y}_{1.2}$	$\check{y}_{2.2}$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$
5	1.0316	1.1901	<b>0.8787</b>	0.9914	0.8813	<b>0.9731</b>	1.6726	1.8255
6	0.9159	1.0409	<b>0.7846</b>	0.8589	0.7929	<b>0.8524</b>	1.3907	1.4832
7	0.8381	0.9439	0.7569	0.8232	<b>0.7564</b>	<b>0.8107</b>	1.1868	1.2695
8	0.7646	0.8501	<b>0.7084</b>	0.7645	0.7134	<b>0.7627</b>	1.0383	1.1243
9	0.7322	0.8268	<b>0.6798</b>	0.7433	0.6853	<b>0.7418</b>	0.9737	1.0591
10	0.6858	0.7825	<b>0.6585</b>	0.7182	0.6603	<b>0.7157</b>	0.8821	0.9529
15	0.6429	0.7235	<b>0.6191</b>	0.6723	0.6196	<b>0.6701</b>	0.7339	0.7872
20	0.6161	0.6753	<b>0.5999</b>	<b>0.6424</b>	0.6019	0.6436	0.6789	0.7301
30	0.5799	0.6476	<b>0.5731</b>	0.6209	0.5756	<b>0.6208</b>	0.6133	0.6643
50	0.5763	0.6267	<b>0.5679</b>	<b>0.6111</b>	0.5717	0.6118	0.5968	0.6406

Источник: составлено автором на основе данных S&P Dow Jones Indices LLC

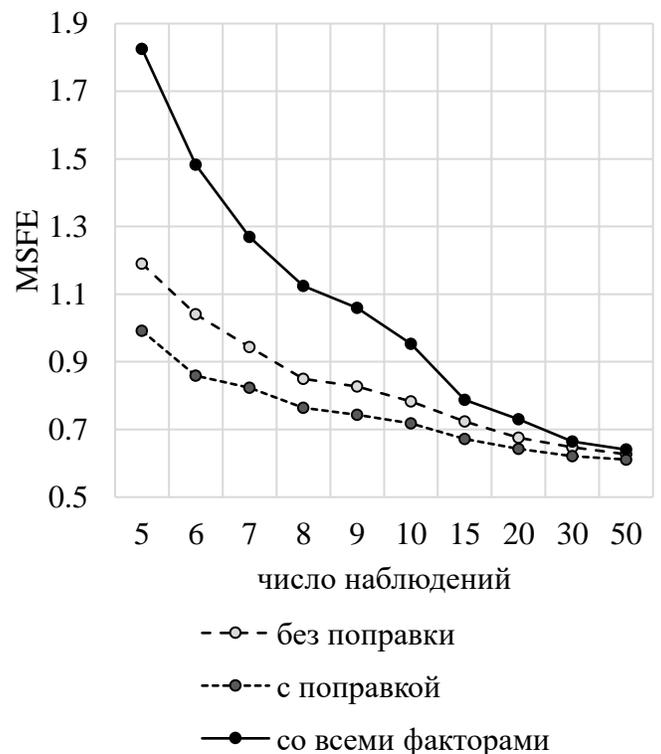
Анализируя результаты, представленные в таблице 5.4, можно заключить, что предлагаемый метод поправок дает меньшую по сравнению с другими методами среднеквадратическую реализованную ошибку прогноза при любом из рассматриваемых числе наблюдений. Однако в сравнении с таблицей 5.3, где превосходство модели  $\check{y}_{1.1}$  над  $\check{y}_{1.2}$  и модели  $\check{y}_{2.2}$  над  $\check{y}_{2.1}$  было однозначно, при моделировании эмпирических данных в отдельных случаях модель  $\check{y}_{1.2}$  работает несколько лучше, чем модель  $\check{y}_{1.1}$  (при числе наблюдений  $n = 7$ ), а также  $\check{y}_{2.1}$  является более точной, чем  $\check{y}_{2.2}$  (при числе наблюдений  $n = 20$  и  $n = 50$ ). Во всех остальных случаях наблюдается аналогичная таблице 5.3 ситуация. На рисунках 5.18-5.19 приведена динамика изменения среднеквадратической реализованной оценки прогноза для анализируемых подходов.

Из рисунков 5.18 и 5.19 видно, что показатель MSRE точно так же, как и в предыдущем имитационном эксперименте, показывает гиперболическую зависимость от длины окна наблюдений, однако в данном случае такая зависимость имеет более пологий склон. Также можно отчетливо проследить, что предлагаемый метод дает существенное улучшение качества прогноза по сравнению с моделями

(5.40) и (5.41), особенно в условиях короткого окна данных.



**Рисунок 5.18** – Эффективность предсказания  $y_1$ , эмпирический эксперимент, корреляционная зависимость



**Рисунок 5.19** – Эффективность предсказания  $y_2$ , эмпирический эксперимент, корреляционная зависимость

Источник: составлено автором на основе данных S&P Dow Jones Indices LLC

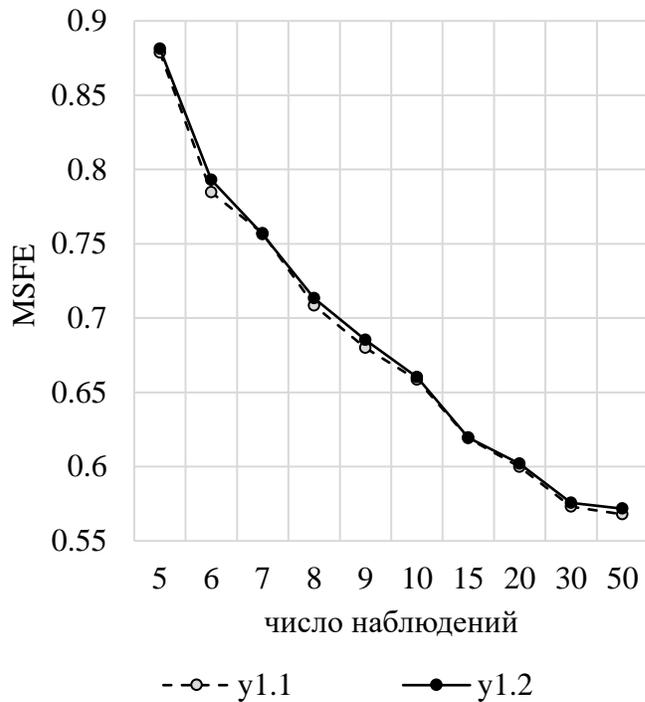
Модели (5.41) являются явными аутсайдерами по точности получаемых прогнозов, что явно заметно в условиях малого числа наблюдений. Причиной этому служит тот факт, что каждая из этих моделей включает в себя все экзогенные переменные системы регрессионных уравнений, что требует оценки большего числа параметров, чем для моделей (5.40). Вследствие этого возрастает общая неопределенность относительно прогнозируемого значения, поскольку она учитывает неопределенность в оценке каждого из имеющихся параметров регрессионного

уравнения. Естественно, данный эффект нивелируется при увеличении числа наблюдений. Однако, несмотря на то, что при достаточно длинном окне данных разница в точности прогнозирования между анализируемыми подходами минимальна, данный метод представляется актуальным в силу того, что при моделировании временных рядов макроэкономических процессов ситуация достаточности статистических данных встречается крайне редко, а даже в тех ситуациях, когда это так, длинное окно данных не дает улучшения точности прогноза, а наоборот достаточно часто происходит ее падение. Данный феномен более подробно рассмотрен в разделе 3.1 диссертационного исследования.

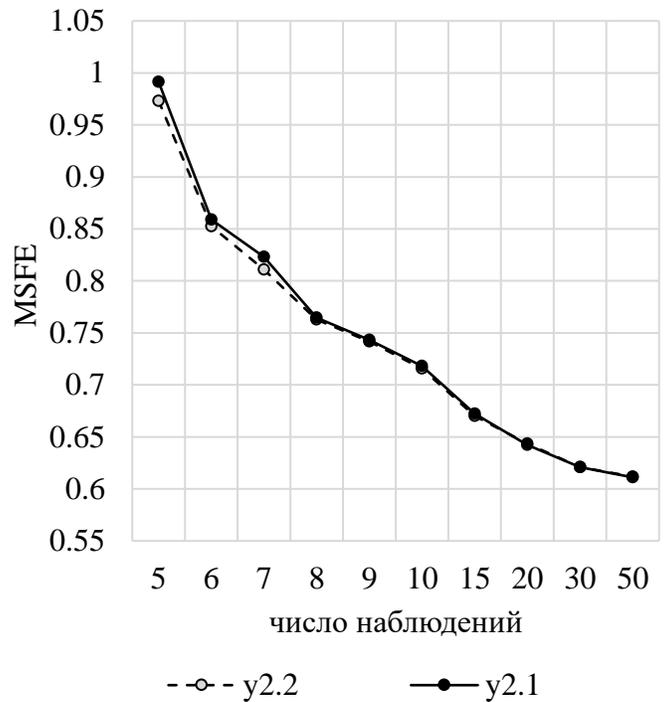
На рисунках 5.20-5.21 представлено сравнение динамики среднеквадратической реализованной ошибки прогноза для моделей  $\check{y}_{1.1}$  -  $\check{y}_{1.2}$  (поправки для целевой переменной  $y_{1t}$ , рассчитанные с помощью регрессионной модели  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$  и регрессионной модели  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ ) и  $\check{y}_{2.1}$  -  $\check{y}_{2.2}$  (поправки для целевой переменной  $y_{2t}$ , полученные согласно регрессионной модели  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$  и регрессионной модели  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ ) соответственно.

Как видно из рисунка 5.20, модель  $\check{y}_{1.1}$ , которая опирается на линию регрессии  $y_{1t}$  от  $y_{2t}$ , в среднем показывает более высокую точность прогноза, чем модель  $\check{y}_{1.2}$ , использующая уравнение регрессии  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$ . Анализируя рисунок 5.21, аналогичный вывод можно сделать и о моделях  $\check{y}_{2.1}$  -  $\check{y}_{2.2}$ , где поправки с использованием регрессии  $y_{2t}$  от  $y_{1t}$  показывают более высокую эффективность для прогнозирования целевой переменной  $y_{2t}$ . Однако по сравнению с имитационным экспериментом в данном случае различие между этими противопоставляемыми моделями не так велико. Тем не менее в среднем можно заключить, что модель  $\check{y}_{1.1}$  работает лучше модели  $\check{y}_{1.2}$ , а модель  $\check{y}_{2.2}$  – лучше модели  $\check{y}_{2.1}$ . Таким образом, эмпирический эксперимент также, как и имитационный, подтверждает целесообразность высказанной в разделе 5.2 рекомендации относительно того, что в процессе выбора между получившимися корректировками, рекомендуется выбрать

ту, при проведении которой корректируемая целевая переменная моделируется через остальные с помощью линии регрессии.



**Рисунок 5.20** – Эффективность предсказания  $y_1$  по  $\check{y}_{1.1}$  и  $\check{y}_{1.2}$ , эмпирический эксперимент, корреляционная зависимость



**Рисунок 5.21** – Эффективность предсказания  $y_2$  по  $\check{y}_{2.1}$  и  $\check{y}_{2.2}$ , эмпирический эксперимент, корреляционная зависимость

Источник: составлено автором на основе данных S&P Dow Jones Indices LLC

Проведенные имитационные и эмпирические эксперименты показывают на достаточно простых примерах практическую пользу от предлагаемых методов поправок прогнозов при одновременном моделировании временных рядов макроэкономических процессов функционально или корреляционно зависящих друг от друга. При проведении таких поправок получаемые прогнозы являются согласованными между собой, а не «оторванными» выходами каждой из несвязанных между собой моделей, что неминуемо сказывается на их качестве. В общем и целом,

разработанные методы дают значимое улучшение качества прогнозов по сравнению с регрессионными уравнениями, моделирующими каждый макроэкономический процесс по отдельности, а также работают лучше моделей, включающих все экзогенные переменные рассматриваемой системы уравнений. Данный положительный эффект достигается за счет использования незадействованной в традиционных моделях информации о виде функциональной или корреляционной зависимости между прогнозируемыми целевыми переменными. В силу того, что существует возможность функционально связать большинство макроэкономических индикаторов между собой, как это показано в разделе 5.1 диссертационного исследования, предлагаемый в данной главе метод поправок получаемых прогнозов может считаться актуальным для комплексного прогнозирования макроэкономических систем. Также в разделе 5.1 было показано, что существует множество экономических показателей, которые имеют тесную корреляционную связь и, как было показано в данной главе, данную информацию тоже можно использовать для улучшения качества разрабатываемых моделей. Следует особо отметить, что предлагаемые в данной главе методы полностью совместимы с методами взвешивания регрессионных уравнений, разработанными в главе 2 и главе 3 диссертационного исследования, так как в результате их применения прогнозируемые значения целевых переменных подчиняются сдвинутому масштабированному  $t$ -распределению Стьюдента с числом степеней свободы, рассчитываемым согласно предложенным формулам (2.45) и (3.9), которое можно использовать для вычисления функции правдоподобия, посредством максимизации которой получают искомые поправки для рассчитанных прогнозов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе были рассмотрены основные современные подходы к моделированию и прогнозированию временных рядов макроэкономических процессов, проанализированы их специфические особенности и разработаны новые методы регрессионного анализа, позволяющие получать более эффективные точечные прогнозы и более надежные доверительные интервалы.

В разделе 1.2 диссертационного исследования рассматриваются различные способы спецификации регрессионного уравнения, а именно: отбор по всем возможным комбинациям, прямой отбор, пошаговый отбор, обратное исключение, наилучшие подмножества и отбор по остаточной корреляции. Также исследуются такие критерии эффективности модели, как F-статистика, несмещенная оценка дисперсии ошибок прогноза, байесовский информационный критерий, информационный критерий Акаике и бутстрапированная среднеквадратическая ошибка. Показывается, что не существует однозначно предпочтительного способа спецификации и критерия эффективности при любых исходных условиях. В среднем при значительном превосходстве числа наблюдений над числом рассматриваемых предикторов целесообразней использовать критерий несмещенной дисперсии ошибок прогноза в качестве показателя качества модели, а в случае короткого окна данных и наличия неопределенности относительно значимости отобранных факторов предпочтительнее использовать F-статистику или BIC/AIC. Если принимать решение о выборе способа спецификации модели и критерии оценки ее качества в условиях неопределенности относительно степени значимости предварительно отобранных предикторов, то присутствует высокая вероятность выбрать далеко не лучшую модель.

Раздел 1.3 диссертации посвящен анализу способов повышения точности

прогноза моделей при условии наличия высокой степени мультиколлинеарности среди объясняющих переменных. Рассматриваются такие наиболее популярные способы борьбы с мультиколлинеарностью, как ридж-регрессия, регрессия LASSO, метод главных компонент и метод частных наименьших квадратов. С помощью имитационных экспериментов показывается, что эффективность данных методов повышается при увеличении степени взаимозависимости предикторов. Основная идея ридж-регрессии, регрессии LASSO и МЧНК заключается в том, чтобы допустить некоторое смещение в оценках коэффициентов регрессии, но за это сократить дисперсию этих смещенных оценок. В случае ортогональности предикторов такой обмен не является оптимальным, однако при сильной мультиколлинеарности дисперсия МНК-оценок радикально возрастает, что дает видимое преимущество смещенным оценкам, поскольку потеря в точности за счет смещения с лихвой компенсируется пониженной дисперсией параметров. Также по итогам проведенных экспериментов можно сделать вывод о предпочтительности метода частных наименьших квадратов над остальными способами борьбы с мультиколлинеарности, поскольку он оказался более эффективным в абсолютном большинстве рассматриваемых случаев.

В разделе 1.4 диссертационной работы разрабатывается численный метод расчета истинного уровня значимости предикторов при проведении процедуры спецификации регрессионного уравнения. Показывается, что при наличии некоторой системы отбора переменных в модель, традиционно вычисляемые  $p$ -значения предикторов являются существенно заниженными. Предлагаемый метод вычисления исправленных  $p$ -значений учитывает такие аспекты, как число наблюдений в окне данных, количество потенциальных объясняющих переменных, а также их дисперсионно-ковариационную матрицу. Расчет истинных  $p$ -значений может оказать помощь в ограничении числа ошибок как 1-ого, так и 2-ого рода в научных исследованиях, значительно снижая количество публикаций, декларирующих ложные

зависимости в качестве истинных. Предложенные методы легко алгоритмируются и могут быть интегрированы в абсолютное большинство существующих статистических пакетов.

Во второй главе диссертационного исследования рассматриваются существующие методы взвешивания регрессионных уравнений и выявляются их основные недостатки. В частности, при их использовании не представляется возможным получить несмещенную ожидаемую среднеквадратическую ошибку прогноза, что значит, во-первых, что отсутствует ясное понятие об ожидаемом среднеквадратическом отклонении вычисляемого точечного прогноза и, во-вторых, нет возможности рассчитать доверительный интервал с каким-либо заданным уровнем значимости. Разрабатываемый в главе 2 метод оптимизации весовых коэффициентов основан на минимизации несмещенной оценки среднеквадратической ошибки прогноза (MSFE) и работает как для вложенных, так и для невложенных моделей. При использовании MSFE взвешивания мы получаем ожидаемую ошибку прогноза для комбинированной модели и доверительный интервал с заданным уровнем значимости. Проведенное имитационное и эмпирическое тестирование выявило устойчивое превосходство предлагаемого метода над существующими способами взвешивания регрессионных моделей, что, как следствие, дает ему право считаться предпочтительным в использовании при анализе и прогнозировании временных рядов социально-экономических процессов. Основная причина, по которой MSFE взвешивание работает лучше остальных методов, заключается в том, что он учитывает как корреляционную структуру ошибок взвешиваемых моделей, так и корреляционную структуру их коэффициентов, что позволяет получать более эффективные веса. Помимо этого, MSFE взвешивание точно выполняет задачу оптимизации весовых коэффициентов: выбрать такие веса, которые бы минимизировали ожидаемую ошибку прогноза.

Глава 3 диссертации посвящена решению проблемы выбора длины окна наблюдений при моделировании временных рядов макроэкономических процессов. В данной главе была эмпирически доказана параболическая зависимость точности прогноза от числа наблюдений в окне данных по причине изменчивости зависимостей между макроэкономическими процессами во времени. В этой связи встает проблема выбора оптимального окна наблюдений, которая может быть решена либо путем выбора наилучшей согласно определенным критериям модели, либо посредством взвешивания по всему рассматриваемому набору моделей, рассчитанных на окнах данных разной длины. В данной главе разрабатывается расширение предложенного в главе 2 метода MSFE взвешивания регрессионных уравнений с целью получения возможности взвешивать модели, построенные на окнах данных разной длины. Данный метод основан на минимизации несмещенной оценки среднеквадратической ожидаемой ошибки прогноза. MSFE взвешивание помогает не только получить более адекватный точечный прогноз экономических показателей, но также получить доверительные интервалы для рассчитанных прогнозов с заданным уровнем значимости. Проведенные имитационные и эмпирические эксперименты подтверждают эффективность предлагаемого метода взвешивания линейных регрессионных уравнений и его применимость на практике. Главное отличие MSFE взвешивания от других анализируемых в главе 2 и 3 методов заключается в том, что данный метод принимает во внимание корреляции ошибок взвешиваемых подмоделей, а также корреляции их прогнозов. Таким образом, принимая во внимание вышесказанное, можно заключить, что предлагаемый в диссертационном исследовании метод взвешивания регрессионных уравнений является самостоятельной единицей регрессионного анализа и заслуживает внимания исследователей, занимающихся прогнозированием временных рядов социально-экономических процессов.

В четвертой главе диссертационного исследования показывается, что при прогнозировании временных рядов макроэкономических процессов процедура динамической спецификации и взвешивания регрессионных моделей демонстрирует более высокую эффективность, чем одноразовая спецификация и одноразовое взвешивание, а также, что при проведении динамической спецификации или взвешивания регрессионных моделей традиционные методы расчета доверительных интервалов для полученных прогнозов дают систематически заниженные значения ширины данных интервалов. Вследствие этого возникает дилемма выбора в пользу либо более точного прогноза, либо в пользу более надежных доверительных интервалов. В данной главе диссертационного исследования предпринимается попытка решить данную проблему, а именно при сохранении повышенной точности рассчитать более надежные доверительные интервалы для прогнозируемых значений. Для этого предлагается численный метод вычисления поправочного коэффициента для классической оценки дисперсии ошибки прогноза. Предложенное решение также не дает точной оценки реализованной среднеквадратической ошибки прогноза, но тем не менее позволяет существенно повысить адекватность рассчитываемых доверительных интервалов.

Пятая глава диссертации посвящена разработке концептуальной модели функциональных взаимосвязей макроэкономических показателей, включающие в себя до двадцати переменных, что позволяет создавать комплексные модели, охватывающие основные макроиндикаторы государства. В главе показывается, что при комплексном одновременном прогнозировании временных рядов макроэкономических индикаторов можно ввести в разрабатываемую систему моделей функциональные и корреляционные взаимосвязи между моделируемыми показателями. Таким образом, получаемые прогнозы приводятся в соответствие друг с другом, что оказывает положительное влияние на точность предсказаний. Проведенные имитационные и эмпирические эксперименты показывают на

достаточно простых примерах практическую пользу от предлагаемых методов поправок прогнозов при одновременном моделировании временных рядов макроэкономических процессов функционально или корреляционно зависящих друг от друга. При проведении таких поправок получаемые прогнозы являются согласованными между собой, а не «оторванными» выходами каждой из несвязанных между собой моделей, что неминуемо сказывается на их качестве. В общем и целом, разработанные методы дают значимое улучшение качества прогнозов по сравнению с регрессионными уравнениями, моделирующими каждый макроэкономический процесс по отдельности, а также работают лучше моделей, включающих все экзогенные переменные рассматриваемой системы уравнений. Данный положительный эффект достигается за счет использования незадействованной в традиционных моделях информации о виде функциональной или корреляционной зависимости между прогнозируемыми целевыми переменными. В силу того, что существует возможность функционально связать большинство макроэкономических индикаторов между собой, предлагаемый в данной главе метод поправок получаемых прогнозов может считаться актуальным для комплексного прогнозирования макроэкономических систем.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Абель, Э. Макроэкономика / Э. Абель, Б. Бернанке. – СПб. : Питер, –2008. – 768 с.
2. Айвазян С. А. Методы эконометрики / С. А. Айвазян . – М. : ИНФРА–М, – 2010. – 512 с.
3. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, – 1997. – 1000 с.
4. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. – М : Мир, – 1976. – 757 с.
5. Балацкий, Е. В. Инфляционные налоги и экономический рост / Е. В. Балацкий // Экономика и математические методы. – 1997. – № 3(33). – С. 43–58.
6. Бернштам, М. Приватизация кредита – остановка инфляции – подъем экономики / М. Бернштам // Российский экономический журнал. – 1993. – № 7. – С. 37–47.
7. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. / Дж.Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир, – 1974. – 197 с.
8. Бродский, Б. Е. О влиянии реального обменного курса на российскую экономику / Б. Е. Бродский // Прикладная эконометрика. – 2006. – № 2. – С. 85–111.
9. Бродский, Б. Е. Ретроспективный анализ структурных сдвигов на основе эконометрических зависимостей / Б. Е. Бродский // Экономика и математические методы. – 2006. – № 4(42). – С. 96–119.
10. Вороновицкий, М. М. Модель социального влияние на цены / М. М. Вороновицкий // Экономика и математические методы. – 2003. – № 4(39). – С. 40–51.
11. Гуреев, К. А. Интеллектуальные технологии моделирования инфляционных процессов / К. А. Гуреев, О. С. Голубева // Наука и экономика. – 2012. – № 6(14). – С. 29–38.

12. Доугерти, К. Введение в эконометрику / К. Доугерти; пер. с англ. под ред. О.О. Замкова. – М. : ИНФРА–М, – 2007. – 432 с.
13. Дуброва, Т. А. Прогнозирование социально–экономических процессов. Статистические методы и модели / Т.А. Дуброва. – М. : Маркет ДС, – 2007. – 192 с.
14. Зарова, Е. В. Нейронные сети как средство моделирования и прогнозирования инфляционных процессов / Е. В. Зарова, И. К. Заров // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико–математические науки. – 2005. – Т. 34. – С. 182–186.
15. Кендалл, М. Временные ряды / М. Кендалл. – М. : Финансы и статистика, – 1981. – 199 с.
16. Ковалева, Л. Н. Многофакторное прогнозирование на основе рядов динамики / Л. Н. Ковалева. – М. : Статистика, – 1980. – 104 с.
17. Косов, В. В. Относительные цены как инструмент среднесрочного прогнозирования оптовых цен (на примере цен на электроэнергию) / В. В. Косов // Проблемы прогнозирования. – 2005. – № 5. – С. 60–76.
18. Лукашин, Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования / Ю. П. Лукашин. – М. : Статистика, – 1979. – 416 с.
19. Льюис, К. Д. Методы прогнозирования экономических показателей / К. Д. Льюис. – М. : Финансы и статистика, – 1986. – 133 с.
20. Магнус, Я. Р. Эконометрика. Начальный курс / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. Пересецкий. – М. : Дело, – 2000. – 576 с.
21. Макконнел, К. Р. Экономикс. 13–е издание / К. Р. Макконнел, Л. С. Брю. – М. : ИНФРА–М, – 2009. – 944 с.
22. Макконнел, К. Р. Экономикс: принципы, проблемы и политика / К. Р. Макконнел, Л. С. Брю. – М. : Республика, – 1992. – 272 с.

23. Моисеев, Н. А. Анализ эффективности способов спецификации уравнения регрессии / Н. А. Моисеев, А. Н. Романников // Экономический журнал. – 2017. – № 1(45). – С. 87–110.
24. Моисеев, Н. А. Вычисление истинного уровня значимости предикторов при проведении процедуры спецификации уравнения регрессии / Н. А. Моисеев // Статистика и Экономика. – 2017. – № 3(14). – С. 10–20.
25. Моисеев, Н. А. Инновационная модель регрессионного прогноза / Н. А. Моисеев, Б. А. Ахмадеев // Инновация и инвестиции. – 2014. – № 9. – С. 123–127.
26. Моисеев, Н. А. Инновационная экосистема как ключевой фактор экономического роста региона / Н. А. Моисеев, Б. А. Ахмадеев // Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. – 2016. – № 4(88). – С. 145–153.
27. Моисеев, Н. А. Метод разложения Тейлора для увеличения прогнозной силы регрессионных уравнений / Н. А. Моисеев // Экономический журнал РГГУ. – 2014. – №3(35). – С. 51–59.
28. Моисеев, Н. А. Метод расчета коэффициента влияния отрасли на экономику / Н. А. Моисеев, Б. А. Ахмадеев // Аудит и финансовый анализ. – 2017. – № 1. – С. 69–73.
29. Моисеев, Н.А. Методы повышения достоверности прогнозных эконометрических исследований : монография / Н.А. Моисеев – М.: Русайнс, – 2019. – 272 с. – Текст : непосредственный.
30. Моисеев, Н. А. Методы построения точечных прогнозов временных рядов социально–экономических показателей на региональном уровне / Н. А. Моисеев, Б. А. Ахмадеев // Экономика и предпринимательство. – 2014. – №11(52). – С. 299–302.
31. Моисеев, Н. А. Модель пространственного динамического равновесия экономики / Н. А. Моисеев // Аудит и финансовый анализ. – 2013. – №5. – С. 134–137.
32. Моисеев, Н. А. Повышение уровня конкурентоспособности региона посредством оптимизации бюджетной политики / Н. А. Моисеев, С. В. Манахов, О. Г.

Деменко // Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. – 2017. – № 2(92). – С. 169–177.

33. Моисеев, Н. А. Сравнительный анализ эффективности методов устранения мультиколлинеарности / Н. А. Моисеев // Учет и статистика. – 2017. – № 2(46). – С. 62–73.

34. Моисеев, Н.А. Повышение точности прогнозирования макроэкономических процессов посредством учета взаимосвязей между ними / Н. А. Моисеев // Экономический журнал. – 2017. – № 4(48). – С. 20–38.

35. Моисеев, Н.А. Многофакторное моделирование инфляционных процессов в условиях нестабильной экономики : дис. ... канд. экон. наук : 08.00.13 / Моисеев Никита Александрович. – М., 2015. – 136 с.

36. Райская, Н. Инфляционные процессы в переходной экономике России: особенности, тенденции, факторы / Н. Райская, Я. Сергиенко, А. Френкель // Экономическая наука современной России. – 2001 г.. – 1. – С. 16–33.

37. Райская, Н. Исследование взаимосвязи факторов инфляционных процессов в России / Н. Райская, Я. Сергиенко, А. Френкель // Экономическая наука современной России. – 1998. – № 2. – С. 100–111.

38. Райская, Н. Статистическое исследование циклических колебаний развивающегося рынка на примере российской экономики / Н. Райская, Я. Сергиенко, А. Френкель // Вопросы статистики. – 2008. – № 10. – С. 4–8.

39. Сорокин, А. С. Планирование и статистическая обработка данных экспериментов в пакете R / А. С. Сорокин, Н. А. Моисеев, В. И. Митрофанов // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2017 г.. – 1. – С. 58–64.

40. Тарасевич, Л. С. Макроэкономика: учебник. / Л. С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А. И. Леусский. – М : Юрайт, – 2009. – 654 с.

41. Тихомиров, Н. П. Верификация прогнозов на основе анализа рисков их ошибок / Н. П. Тихомиров, Д. А. Максимов, А. В. Щербаков // Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. – 2011. – № 3(39). – С. 103–113.
42. Тихомиров, Н. П. Методы оценки эффективности инвестиционных проектов в реальном секторе экономики в условиях неопределенности исходной информации / Н. П. Тихомиров // Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. – 2011. – № 6(42). – С. 86–94.
43. Тихомиров, Н. П. Методы прогнозной оценки критерия NPV инвестиционного проекта при неопределенности исходной информации / Н. П. Тихомиров // Экономика природопользования. – 2011. – № 6. – С. 3–13.
44. Тихомиров, Н. П. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа / Н. П. Тихомиров, Т. М. Тихомирова, О. С. Ушмаев. – М. : Экономика, – 2011. – 647 с.
45. Трегуб, И. В. Математические модели динамики экономических систем. Монография / И. В. Трегуб – М. : Финакадемия, – 2009. – 160 с.
46. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях / Д. Хейс. – М. : Финансы и статистика, – 1981. – 255 с.
47. Четыркин, Е. Н. Статистические методы прогнозирования / Е. Н. Четыркин. – М. : Статистика, – 1977. – 199 с.
48. Шварева, Н. В. Инфляционные факторы в 1988–2002 гг. / Н. В. Шварева // Проблемы прогнозирования. – 2003. – № 2. – С. 72–87.
49. Akaike, H. A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting / H. Akaike // *Biometrika*. – 1979. – Vol. 66. – P. 237–242.
50. Akaike, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle / H. Akaike // In: Petroc, B., Csake, F. (Eds.), *Second International Symposium on Information Theory*. – 1973. – P. 267-281.

51. An, J. Oil Price Predictors: Machine Learning Approach. / J. An, A. Mikhaylov, N. A. Moiseev // *International Journal of Energy Economics and Policy*. – 2019. – 9(5). – P. 1-6.
52. Antoniadis, A. Estimation and inference in functional mixed-effects models / A. Antoniadis, T. Spatinas // *Computational Statistics and Data Analysis*. – 2007. – 10 : Vol. 51. – P. 4793–4813.
53. Armstrong, J. Scott. Combining Forecasts, Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners / J. Scott Armstrong (ed.). – Norwell, MA : Kluwer Academic Publishers, – 2001. – 19 p.
54. Armstrong, J. Scott. Combining Forecasts: The End of the Beginning or the Beginning of the End? / J. Scott Armstrong // *International Journal of Forecasting*. – 1989. – Vol. 5. – P. 585–588.
55. Armstrong, J. Scott. Findings from evidence-based forecasting: Methods for reducing forecast error / J. Scott Armstrong // *International Journal of Forecasting*. – 2006. – Vol. 22. – P. 583–598.
56. Audrino, F. Lassoing the har model: A model selection perspective on realized volatility dynamics / F. Audrino, S.D. Knaus // *Econometric Reviews*. – 2016. – 8 : Vol. 38. – P. 1485–1521.
57. Baillie, R. T. Analyzing Inflation by the Fractionally Integrated ARIMA–GARCH Model / R. T. Baillie, Ch. Ching–Fun // *Journal of Applied Econometrics*. – 1996. – 11. – P. 23–40.
58. Bair, E. Semi-supervised methods to predict patient survival from gene expression data / E. Bair, R. Tibshirani // *PLoS Biology*. – 2004. – Vol. 2. – P. 511–522.
59. Banerjee, O. Model selection through sparse maximum likelihood estimation for multivariate gaussian or binary data / O. Banerjee, L. El Ghaoui, A. d’Aspremont // *Journal of Machine Learning Research*. – 2008. – Vol. 9. – P. 485–516.

60. Baragatti, M. Bayesian variable selection for probit mixed models applied to gene selection / M. Baragatti // *Bayesian Analysis*. – 2011. – 2 : Vol. 6. – P. 209–229.
61. Barras, L. False discoveries in mutual fund performance: measuring luck in estimated alphas / L. Barras, O. Scaillet, R. Wermers // *Journal of Finance*. – 2010. – Vol. 65. – P. 179–216.
62. Bates, J. M. The combination of forecasts / J. M. Bates, C. W. J. Granger // *Operations Research Quarterly*. – 1969. – 4 : Vol. 20. – P. 451–468.
63. Benjamini, Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing / Y. Benjamini, Y. Hochberg // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 1995. – Vol. 57. – P. 289–300.
64. Benjamini, Y. The control of the false discovery rate in multiple testing under dependency / Y. Benjamini, D. Yekutieli // *The Annals of Statistics*. – 2001. – Vol. 29. – P. 1165–1188.
65. Bloznelis, D. Composite versus model-averaged quantile regression / D. Bloznelis, G. Claeskens, J. Zhou // *Journal of Statistical Planning and Inference*. – 2019. – Vol. 200. – P. 32–46.
66. Boone, E. L. Assessment of two approximation methods for computing posterior model probabilities / E. L. Boone, K. Ye, E. P. Smith // *Computational Statistics & Data Analysis*. – 2005. – 2 : Vol. 48. – P. 221–234.
67. Box, G. E. P. *Time Series Analysis, Forecasting and Control* / G. E. P. Box and G. Jenkins. – San Francisco : Holden-Day, – 1970. – 575 p.
68. Breiman, L. Predicting multivariate responses in multiple linear regression / L. Breiman, Jerome H. Friedman // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 1997. – Vol. 59. – P. 3–54.
69. Brock, W. Growth empirics and reality / W. Brock, S. Durlauf // *World Bank Economic Review*. – 2001. – 2 : Vol. 15. – P. 229–272.

70. Brown, P.J. Bayes model averaging with selection of regressors / P.J. Brown, M. Vannucci, T. Fearn // *Journal of Royal Statistical Society Series B (Statistical Methodology)*. – 2005. – 2 : Vol. 48. – P. 221–234.
71. Buckland, S. T. Model selection: An integral part of inference / S. T. Buckland, K. P. Burnham, N. H. Augustin // *Biometrics*. – 1997. – Vol. 53. – P. 603–618.
72. Bunnin, F. O. Option pricing under model and parameter uncertainty using predictive densities / F. O. Bunnin, Y. Guo, Y. Ren // *Statistical Computation*. – 2002. – 1 : Vol. 12. – P. 37–44.
73. Cagan, Ph. The Monetary Dynamics of Hyperinflation / Ph. Cagan // *Studies in the Quantity Theory of Money*. – Chicago : University of Chicago Press, – 1956. – P. 25–57.
74. Cai, T. A constrained l1 minimization approach to sparse precision matrix estimation / T. Cai, W. Liu, X. Luo // *Journal of the American Statistical Association*. – 2011. – Vol. 106. – P. 594–607.
75. Carroll, R. J. Estimation in an additive model when the components are linked parametrically / R. J. Carroll, W. Haerdle, E. Mammen // *Econometric Theory*. – 2002. – 4 : Vol. 18. – P. 886–912.
76. Chamidah, N. Designing of child growth chart based on multiresponse local polynomial modeling / N. Chamidah, I. N. Budiantara, S. Sunaryo, I. Zain // *Journal of Mathematics and Statistics*. – 2012. – 3 : Vol. 8. – P. 242–247.
77. Chang, C.–H. Asymptotic theory of generalized information criterion for geostatistical regression model selection / C.–H. Chang, H.–C. Huang, C.–K., Ing // *The Annals of Statistics*. – 2014. – 6 : Vol. 42. – P. 2441–2468.
78. Chatfield, C. Model uncertainty and forecast accuracy / C. Chatfield // *Journal of Forecasting*. – 1996. – Vol. 15. – P. 495–508.
79. Chen, C. W. Bayesian forecasting for financial risk management, pre and post the global financial crisis / C. W. Chen, R. Gerlach, E. M. Lin, W. C. Lee // *Journal of Forecasting*. – 2012. – 8 : Vol. 31. – P. 661–687.

80. Chen, H. A penalized spline approach to functional mixed effects model analysis / H. Chen, Y. Wang // *Biometrics*. – 2011. – 3 : Vol. 67. – P. 861–870.
81. Chen, Q. Bayesian Value-at-Risk and expected shortfall forecasting via the asymmetric Laplace distribution / Q. Chen, R. Gerlach, Z. Lu // *Computational Statistics & Data Analysis*. – 2012. – 11 : Vol. 56. – P. 3498–3516.
82. Cho, I.-K. Gresham's Law of Model Averaging / I.-K. Cho, K. Kasa // *American Economic Review*. – 2017. – 11 : Vol. 107. – P. 3589–3616.
83. Cho, I.-K. Model Averaging and Persistent Disagreement / I.-K. Cho, K. Kasa // *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*. – 2017. – 3 : Vol. 99. – P. 279–294.
84. Christensen, K. Realized range-based estimation of integrated variance / K. Christensen, M. Podolskij // *Journal of Econometrics*. – 2007. – 2 : Vol. 141. – P. 323–349.
85. Claeskens, G. An asymptotic theory for model selection inference in general semiparametric problems / G. Claeskens, R. J. Carroll // *Biometrika*. – 2007. – Vol. 94. – P. 249–265.
86. Claeskens, G. The focused information criterion / G. Claeskens, N. L. Hjort // *Journal of the American Statistical Association*. – 2003. – 1 : Vol. 98. – P. 900–916.
87. Clemen, R. T. Combining forecasts: A review and annotated bibliography / R. T. Clemen // *International Journal of Forecasting*. – 1989. – 4 : Vol. 5. – P. 559–581.
88. Clyde, M. Model uncertainty / M. Clyde, E. I. George // *Statistical Science*. – 2004. – Vol. 19. – P. 81–94.
89. Cochrane, John H. What do the VARs Mean? Measuring the Output Effects of Monetary Policy / John H. Cochrane // *Journal of Monetary Economics*. – 1998. – 2 : Vol. 41. – P. 277–300.
90. Conti, D. V. Bayesian modeling of complex metabolic pathways / D. V. Conti, V. Cortessis, J. Molitor, D. C. Thomas // *Human Heredity*. – 2003. – 1 : Vol. 56. – P. 83–93.

91. Dash, D. Model averaging for prediction with discrete Bayesian networks / D. Dash, G. F. Cooper // *The Journal of Machine Learning Research*. – 2004. – Vol. 5. – P. 1177–1203.
92. Davidson, R. Estimation and Inference in Econometrics / R. Davidson, G. MacKinnon James. – Oxford : Oxford University Press, – 1993. – 896 p.
93. Dellaportas, P. On Bayesian model and variable selection using MCMC / P. Dellaportas, J. J. Forster, I. Ntzoufras // *Statistics and Computing*. – 2002. – 1 : Vol. 12. – P. 27–36.
94. Derksen, S. Backward, forward and stepwise automated subset selection algorithms: frequency of obtaining authentic and noise variables / S. Derksen, H. J. Keselman // *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*. – 1992. – Vol. 45. – P. 265–282.
95. Du, J. Model averaging based on rank / J. Du, X. Chen, E. Kwessi, Z. Sun // *Journal of Applied Statistics*. – 2017. – 10 : Vol. 45. – P. 1–20.
96. Du, Jiang. Model averaging for M-estimation / J. Du, Z. Zhang, T. Xie // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. – 2018. – 52 : Vol. 6. – P. 1–16.
97. Efron, B. Correlated z-values and the accuracy of large-scale statistical estimates / B. Efron // *Journal of the American Statistical Association*. – 2010. – Vol. 105. – P. 1042–1055.
98. Efron, B. Correlation and large-scale simultaneous significance testing / B. Efron // *Journal of the American Statistical Association*. – 2007. – Vol. 102. – P. 93–103.
99. Eicher, T. S. Default priors and predictive performance in Bayesian model averaging, with application to growth determinants / T. S. Eicher, C. Papageorgiou, A. E. Raftery // *Journal of Applied Econometrics*. – 2011. – 1 : Vol. 26. – P. 30–55.
100. Engle, R. F. Cointegration and Error – Correction: Representation, Estimation and Testing / R. F. Engle, C. W. J. Granger // *Econometrica*. – 1987. – 2 : Vol. 55. – P. 251–276.
101. Engle, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation / R. F. Engle // *Econometrica*. – 1982. – 4 : Vol. 50. – P. 987–1007.

102. Engle, R.F. Estimates of the Variance of US Inflation Based on ARCH Model // R. F. Engle // *Journal of Money, Credit and Banking*. – 1983. – Vol. 15. – P. 286–301.
103. Engsted, T. Does the Long–Term Interest Rate Predict Future Inflation? A Multi–Country Analysis / T. Engsted // *Review of Economics and Statistics*. – 1995. – 1 : Vol. 77. – P. 42–54.
104. Evans, M. Discovering the Link between Inflation Rates and Inflation Uncertainty / M. Evans // *Journal of Money, Credit and Banking*. – 1991. – Vol. 23. – P. 169–184.
105. Fama, E. F. Short–Term Interest Rates as Predictors of Inflation / E. F. Fama // *American Economic Review*. – 1975. – 3 : Vol. 65. – P. 269–282.
106. Fan, J. Estimating false discovery proportion under arbitrary covariance dependence / J. Fan, X. Han, W. Gu // *Journal of the American Statistical Association*. – 2012. – 499 : Vol. 107. – P. 1019–1035.
107. Fan, J. Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties / J. Fan, R. Li // *Journal of the American Statistical Association*. – 2001. – Vol. 96. – P. 1348–1360.
108. Fang, F. Model averaging for prediction with fragmentary data / F. Fang, W. Lan, J. Tong, J. Shao // *Journal of Business and Economic Statistics*. – 2017. – 3 : Vol. 37. – P. 517–527.
109. Faraway, J. Time series forecasting with neural networks: a comparative study using the airline data / J. Faraway, C. Chatfield // *Applied Statistics*. – 1998. – Vol. 47. – P. 231–250.
110. Faust, J. Forecasting inflation / J. Faust, J. H. Wright // *Handbook of economic forecasting*. – Amsterdam : Elsevier, – 2013. – P. 2–56.
111. Fernandez, C. Benchmark priors for Bayesian model averaging / C. Fernandez, C. E. Ley, M. F. J. Steel // *Journal of Econometrics*. – 2001. – 2 : Vol. 100. – P. 381–427.
112. Ferreira, J. On the Benjamini–Hochberg method / J. Ferreira, A. Zwinderman // *Annals of Statistics*. – 2006. – Vol. 34. – P. 1827–1849.

113. Fragoso, T. M. Bayesian model averaging: a systematic review and conceptual classification / T. M. Fragoso, W. Bertoli, F. Louzada // *International Statistical Review*. – 2018. – 1 : Vol. 86. – P. 1–28.
114. Fridley, B. L. Bayesian variable and model selection methods for genetic association studies / B. L. Fridley // *Genetic Epidemiology*. – 2009. – 1 : Vol. 33. – P. 27–37.
115. Friedman, J. Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso / J. Friedman, T. Hastie, R. Tibshirani // *Biostatistics*. – 2008. – Vol. 9. – P. 432–441.
116. Friedman, N. Being Bayesian about network structure. A Bayesian approach to structure discovery in Bayesian networks / N. Friedman, D. Koller // *Machine Learning*. – 2003. – 1 : Vol. 50. – P. 95–125.
117. Friguet, C. A factor model approach to multiple testing under dependence / C. Friguet, M. Kloareg, D. Causeur // *Journal of the American Statistical Association*. – 2009. – Vol. 104. – P. 1406–1415.
118. Furnival, G. M. Regressions by leaps and bounds / G. M. Furnival, R. W. Wilson // *Technometrics*. – 1974. – 4 : Vol. 16. – P. 499–511.
119. Gagarina, G. Yu. Estimation and forecast of regional competitiveness level / G. Yu. Gagarina, N. A. Moiseev, A. V. Ryzhakova, G. V. Ryzhakov // *Economy of region*. – 2016. – 4 : Vol. 12. – P. 1040–1049.
120. Gao, Y. Estimating average treatment effect by model averaging / Y. Gao, W. Long, Z. Wang // *Economics Letters*. – 2015. – Vol. 135. – P. 42–45.
121. Gao, Y. Model averaging based on leave–subject–out cross–validation / Y. Gao, X. Zhang, Sh. Wang, G. Zou // *Journal of Econometrics*. – 2016. – 1 : Vol. 192. – P. 139–151.
122. Garratt, A. Forecasting uncertainties in macroeconomic modelling: An application to the UK economy / A. Garratt, K. Lee, M. H. Pesaran, Y. Shin // *Journal of the American Statistical Association*. – 2003. – 464 : Vol. 98. – P. 823–838.

123. Garthwaite, P. H. Selection of weights for weighted model averaging / P. H. Garthwaite, E. Mubwandarikwa // *Australian & New Zealand Journal of Statistics*. – 2010. – 4 : Vol. 52. – P. 363–382.
124. Gelman, A. Simulating normalizing constants: from importance sampling to bridge sampling to path sampling / A. Gelman, X. Meng // *Statistical Science*. – 1998. – Vol. 13. – P. 163–185.
125. Genovese, C. A stochastic process approach to false discovery control / C. Genovese, L. Wasserman // *Annals of Statistics*. – 2004. – Vol. 32. – P. 1035–1061.
126. George, E. I. Variable Selection Via Gibbs Sampling / E. I. George, R. E. McCulloch // *Journal of the American Statistical Association*. – 1993. – Vol. 88. – P. 881–889.
127. Geweke, J. Using simulation methods for Bayesian econometric models: inference, development, and communication / J. Geweke // *Econometric Review*. – 1999. – 1 : Vol. 18. – P. 1–73.
128. Ginestet, C. E. Model Selection and Model Averaging / C. E. Ginestet // *Journal of the Royal Statistical Society Series A (Statistics in Society)*. – 2010. – 4 : Vol. 172. – P. 937–937.
129. Glosten, L. R. Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks / L. R. Glosten, R. Jagannathan, D. Runkle // *Journal of Finance*. – 1993. – Vol. 48. – P. 1779–1802.
130. Godsill, S. J. On the relationship between Markov chain Monte Carlo methods for model uncertainty / S. J. Godsill // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. – 2001. – 2 : Vol. 10. – P. 230–248.
131. Goenner C. F. Discrimination and mortgage lending in Boston: the effects of model uncertainty / C. F. Goenner // *The Journal of Real Estate, Finance and Economics*. – 2010. – 3 : Vol. 40. – P. 260–285.
132. Granger, C. W. J. Improved methods of combining forecast accuracy / C. W. J. Granger, R. Ramanathan // *Journal of Forecasting*. – 1984. – 2 : Vol. 3. – P. 197–204.

133. Granger, C. W. J. Combining forecasts — twenty years later / C. W. J. Granger // *Journal of Forecasting*. – 1989. – 3 : Vol. 8. – P. 167–173.
134. Granger, C. W. J. Investigating Casual Relations by Econometric Models and Cross–Spectral Methods // C. W. J. Granger // *Econometrica*. – 1969. – Vol. 37. – P. 424–438.
135. Green, P. J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination / P. J. Green // *Biometrika*. – 1995. – 4 : Vol. 82. – P. 711–732.
136. Greene W. H. *Econometric Analysis*. 4th ed. / Greene W. H. – New Jersey : Prentice Hall, – 2000. – 457 p.
137. Guan, Y. Bayesian variable selection regression for genome-wide association studies and other large-scale problems / Y. Guan, M. Stephens // *The Annals of Applied Statistics*. – 2011. – Vol. 5. – P. 1780–1815.
138. Guarín, A. An early warning model for predicting credit booms using macroeconomic aggregates / A. Guarín, A. González, D. Skandalis, D. Sánchez // *Ensayos Sobre Política Económica*. – 2014. – Vol. 32. – P. 77–86.
139. Guo, J. Joint estimation of multiple graphical models / J. Guo, E. Levina, G. Michailidis, J. Zhu // *Biometrika*. – 2011. – Vol. 98. – P. 1–15.
140. Guo, W. Functional mixed effects models / W. Guo // *Biometrics*. – 2002. – 1 : Vol. 58. – P. 121–128.
141. Hamilton, J. *Time Series Analysis* / J. Hamilton. – Princeton : Princeton University Press, – 1994. – 304 p.
142. Hamzacebi, C. Improving artificial neural networks’ performance in seasonal time series forecasting / C. Hamzacebi // *Information Sciences*. – 2008. – Vol. 178. – P. 4550–4559.
143. Hansen, B. E. Least squares model averaging / B. E. Hansen // *Econometrica*. – 2007. – 4 : Vol. 75. – P. 1175–1189.
144. Hansen, B. E. Least–squares forecast averaging / B. E. Hansen // *Journal of Econometrics*. – 2008. – 2 : Vol. 146. – P. 342–350.

145. Hansen, B. E. Model averaging, asymptotic risk and regressor groups / B. E. Hansen // *Quantitative Economics*. – 2014. – 3 : Vol. 5. – P. 495–530.
146. Hansen, B. E. Jackknife model averaging / B. E. Hansen, J. S. Racine // *Journal of Econometrics*. – 2012. – Vol. 167. – P. 38–46.
147. Hayashi, F. *Econometrics* / F. Hayashi– Princeton : Princeton University Press, – 2000. – 458 p.
148. Hendry, D. F. Pooling of forecasts / D. F. Hendry, M. P. Clements // *Econometrics Journal*. – 2002. – Vol. 5. – P. 1–26.
149. Hipel, K. W. *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems* / K. W. Hipel, A. I. McLeod. – Amsterdam : Elsevier, – 1994. – 1013 p.
150. Hoerl, A. E. Ridge regression: Biased estimation of nonorthogonal problems / A. E. Hoerl, R. Kennard // *Technometrics*. – 1970. – Vol. 12. – P. 55–67.
151. Hoeting, J. A. Bayesian model averaging: a tutorial / J. A. Hoeting, D. Madigan, A. E. Raftery, C. T. Volinsky // *Statistical Science*. – 1999. – 4 : Vol. 14. – P. 382–417.
152. Hoeting, J. A. Bayesian variable and transformation selection in linear regression / J. A. Hoeting, A. E. Raftery, D. Madigan // *The Journal of Computational and Graphical Statistics*. – 2002. – 3 : Vol. 11. – P. 485–507.
153. Huang, T. Semiparametric model average prediction in panel data analysis / T. Huang, J. Li // *Journal of Nonparametric Statistics*. – 2017. – 1 : Vol. 30. – P. 1–20.
154. Hurvich, C. M. The impact of model selection on inference in linear regression / C. M. Hurvich, C. L. Tsai // *The American Statistician*. – 1990. – 3 : Vol. 44. – P. 214–217.
155. Ing, C.–K. Accumulated prediction errors, information criteria and optimal forecasting for auto–regressive time series / C.–K. Ing // *Annals of Statistics*. – 2007. – 3 : Vol. 35. – P. 1238–1277.
156. Ing, C.–K. On same–realization prediction in an infinite–order autoregressive process / C.–K. Ing, C.–Z. Wei // *Journal of Multivariate Analysis*. – 2003. – 1 : Vol. 85. – P. 130–155.

157. Ing, C.–K. Order selection for same–realization predictions in autoregressive processes / C.–K. Ing, C.–Z. Wei // *Annals of Statistics*. – 2005. – 5 : Vol. 33. – P. 2423–2474.
158. Ing, C.–K. Multistep prediction in autoregressive processes / C.–K. Ing // *Econometric Theory*. – 2003. – 2 : Vol. 19. – P. 254–279.
159. Ing, C.–K. Selecting optimal multistep predictors for autoregressive processes of unknown order / C.–K. Ing // *Annals of Statistics*. – 2004. – 2 : Vol. 32. – P. 693–722.
160. Jacobson, T. Finding good predictors for inflation: a Bayesian model averaging approach / T. Jacobson, S. Karlsson // *Journal of Forecasting*. – 2004. – 7 : Vol. 23. – P. 479–496.
161. Jin, S. Frequentist model averaging in structural equation modelling / S. Jin, S. Ankargren // *Psychometrika*. – 2019. – 1 : Vol. 84. – P. 84–104.
162. Johansen, S. Maximum Likelihood Estimation and Inferences of Cointegration – with applications to the demand for money / S. Johansen, K. Juselius // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. – 1990. – Vol. 52. – P. 169–210.
163. Johansen, S. Testing of structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and the UIP for the UK / S. Johansen, K. Juselius // *Journal of Econometrics*. – 1992. – Vol. 53. – P. 211–244.
164. Johansen, S. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in presence of linear trend / S. Johansen // *Econometrica*. – 1991. – Vol. 51. – P. 1551–1580.
165. Johansen, S. Statistical analysis of cointegration vectors / S. Johansen // *Journal of Economic Dynamic and Control*. – 1988. – Vol. 12. – P. 231–254.
166. Justiniano, A. The Time–Varying Volatility of Macroeconomic Fluctuations / A. Justiniano, G. E. Primiceri // *American Economic Review*. – 2008. – Vol. 98. – P. 604–641.
167. Kadane, J. B. A Methods and criteria for model selection / J. B. Kadane, N. Lazar // *Journal of American Statistical Association*. – 2004. – 465 : Vol. 99. – P. 279–290.

168. Kass, R. E. Bayes factors / R. E. Kass, A. E. Raftery // *Journal of American Statistical Association*. – 1995. – 430 : Vol. 90. – P. 773–795.
169. Kihoro, J. M. Seasonal Time Series Forecasting: A Comparative Study of ARIMA and ANN Models / J. M. Kihoro, R. O. Otieno, C. Wafula // *African Journal of Science and Technology, Science and Engineering Series*. – 2004. – 2 : Vol. 5. – P. 41–49.
170. Knight, K. Asymptotics for lasso-type estimators / K. Knight, W. Fu // *The Annals of Statistics*. – 2000. – Vol. 28. – P. 1356–1378.
171. Larzelere, R. E. Single-sample tests for many correlations / R. E. Larzelere, S. A. Mulaik // *Psychological Bulletin*. – 1977. – Vol. 84. – P. 557–569.
172. Lee, S. An asymptotically optimal selection of the order of a linear process . S. Lee, A. Karagrigoriou // *Sankhya Series A63*. – 2001. – P. 93–106.
173. Lee, W. Simultaneous multiple response regression and inverse covariance matrix estimation via penalized gaussian maximum likelihood / W. Lee, Y. Liu // *Journal of Multivariate Analysis*. – 2012. – Vol. 111. – P. 241–257.
174. Leek, J. T. A general framework for multiple testing dependence / J. T. Leek, J. D. Storey // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the US*. – 2008. – Vol. 105. – P. 18718–18723.
175. Lestari, B. Spline estimator in multi-response nonparametric regression model with unequal correlation of errors / B. Lestari, I. N. Budiantara, S. Sunaryo, M. Mashuri // *Journal of Mathematics and Statistics*. – 2010. – 3 : Vol. 6. – P. 327–332.
176. Li, C. Optimal model averaging of varying coefficient models / C. Li, Q. Li, J. Racine, D. Zhang // *Statistica Sinica*. – 2018. – 4 : Vol. 28. – P. 2795–2809.
177. Liang, H. Optimal Weight Choice for Frequentist Model Average Estimators / H. Liang, G. Zou, A. Wan, X. Zhang // *Journal of the American Statistical Association*. – 2011. – 495 : Vol. 106. – P. 1053–1066.
178. Liu, C. Forecasting realized volatility: A bayesian model averaging approach / C. Liu, J. M. Maheu // *Journal of Applied Econometrics*. – 2009. – 5 : Vol. 24. – P. 709–733.

179. Liu, Han. The nonparanormal: Semiparametric estimation of high dimensional undirected graphs / H. Liu, J. Lafferty, L. Wasserman // *Journal of Machine Learning Research*. – 2009. – Vol. 10. – P. 2295–2328.
180. Liu, Q. Heteroscedasticity–robust Cp model averaging / Q. Liu, R. Okui // *Econometrics Journal*. – 2013. – 3 : Vol. 16. – P. 463–472.
181. Lovell, M. C. Data mining / M. C. Lovell // *The Review of Economics and Statistics*. – 1983. – Vol. 65. – P. 1–12.
182. Mallows, C. L. Some comments on Cp / C. L. Mallows // *Technometrics*. – 1973. – 4 : Vol. 15. – P. 661–675.
183. Matthews, T. Model averaging fails to improve the extrapolation capability of the island species–area relationship / T. Matthews, T. Aspin // *Journal of Biogeography*. – 2019. – Vol. 46. – P. 1558–1568.
184. McCallum, B. T. Inflation: Theory and Evidence / B. T. McCallum // Friedman B.M., Hahn F.H. (Eds). *Handbook of Monetary Economics*. – 1990. – P. 963–1012
185. Meinshausen, N. False discovery Control for Multiple Tests of Association under general dependence / N. Meinshausen // *Scandinavian Journal of Statistics*. – 2006. – 2 : Vol. 33. – P. 227–237.
186. Miller, A. J. Selection of subsets of regression variables (with discussion) / A. J. Miller // *Journal of the Royal Statistical Society*. – 1984. – Vol. 147. – P. 389–425.
187. Min, C.–K. Bayesian and non–Bayesian methods for combining models and forecasts with applications to forecasting international growth rates / C.–K. Min, A. Zellner // *Journal of Econometrics*. – 1993. – Vol. 56. – P. 89–118.
188. Mishkin, F. Is the Fisher Effect for Real? A Reexamination of Relationship between Inflation and Interest Rate / F. Mishkin // *Journal of Monetary Economics*. – 1992. – Vol. 30. – P. 195–215.

189. Mishkin, F. The Information in the Longer Maturity Term Structure about Future Inflation / F. Mishkin // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1990. – Vol. 422. – P. 815–828.
190. Mitchell, T. J. Bayesian variable selection in linear regression / T. J. Mitchell, J. J. Beauchamp // *Journal of the American Statistical Association*. – 1988. – 404 : Vol. 83. – P. 1023–1032.
191. Moiseev, N. A. Agent-based simulation of wealth, capital and asset distribution on stock markets / N. A. Moiseev, B. A. Akhmadeev // *Journal of Interdisciplinary Economics*. – 2017. – 2 : Vol. 29. – P. 176–196.
192. Moiseev, N. A. Forecasting time series of economic processes by model averaging across data frames of various lengths / N. A. Moiseev // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. – 2017. – 16 : Vol. 87. – P. 3111–3131.
193. Moiseev, N. A. Improving the accuracy of macroeconomic time series forecast by incorporating functional dependencies between them / N. A. Moiseev // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2018. – 2 : Vol. 160. – P. 350–356.
194. Moiseev, N. A. Linear model averaging by minimizing mean-squared forecast error unbiased estimator / N. A. Moiseev // *Model Assisted Statistics and Applications*. – 2016. – 4 : Vol. 11. – P. 325–338.
195. Moiseev, N. A. p-Value adjustment to control type I errors in linear regression models / N. A. Moiseev // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. – 2017. – 9 : Vol. 87. – P. 1701–1711.
196. Moiseev, N. A. Computation of reliable interval forecast for dynamic averaging of economic time series regression models / N. A. Moiseev, O. G. Demenko, N. P. Savina // *International Journal of Civil Engineering and Technology*. – 2019. – 2 : Vol. 10. – P. 1594–1602.

197. Moiseev, N. A. Increasing the accuracy of macroeconomic time series forecast by incorporating functional and correlational dependencies between them / N. A. Moiseev, A. I. Volodin // *Applied Econometrics*. – 2019. – 53 (1). – P. 119-137.
198. Moiseev, N. A. Interval forecast for model averaging methods. / N. A. Moiseev, A. S. Sorokin // *Model Assisted Statistics and Applications*. – 2018. – 18 (2). – P. 125-138.
199. Mood, A. Introduction to the Theory of Statistics (3rd ed.) / A. Mood, F. Graybill, D. Boes. – New-York : McGraw–Hill, – 1974. – 229 p.
200. Moral-Benito, E. Model averaging in economics: an overview / E. Moral-Benito // *Journal of Economic Surveys*. – 2015. – 1 : Vol. 29. – P. 46–75.
201. Newton, M. A. Approximate Bayesian inference with the weighted likelihood bootstrap / M. A. Newton, A. E. Raftery // *Journal of Royal Statistical Society Series B (Methodological)*. – 1994. – Vol. 56. – P. 3–48.
202. Nguefack–Tsague, G. On Optimal Weighting Scheme in Model Averaging / G. Nguefack–Tsague // *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. – 2014. – 3 : Vol. 2. – P. 150–156.
203. Nydick, S. W. The Wishart and Inverse Wishart Distributions [Online]. – 2012. – Режим доступа: [http://www.tc.umn.edu/~nydic001/docs/unpubs/Wishart\\_Distribution.pdf](http://www.tc.umn.edu/~nydic001/docs/unpubs/Wishart_Distribution.pdf) (дата обращения: 01.07.2018).
204. Nysen, R. Model averaging quantiles from data censored by a limit of detection / R. Nysen, C. Faes, P. Ferrari, P. Verger, M. Aerts // *Biometrics Journal*. – 2016. – 2 : Vol. 58. – P. 331–356.
205. Orphanides, A. The Reliability of Inflation Forecasts Based on Output Gap Estimates in Real Time / A. Orphanides and, S. van Norden // *Journal of Money, Credit and Banking*. – 2005. – Vol. 37. – P. 583–601.
206. Owen, A. B. Variance of the number of false discoveries / A. B. Owen // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2005. – Vol. 67. – P. 411–426.

207. Pagan, A. R. Alternative models for conditional stock volatility / A. R. Pagan, G. W. Schwert // *Journal of Econometrics*. – 1990. – 1 : Vol. 45. – P. 267–290.
208. Parmeter, C. Model averaging estimators for the stochastic frontier model / C. Parmeter, A. Wan, X. Zhang // *Journal of Productivity Analysis*. – 2019. – 2 : Vol. 51. – P. 91–103.
209. Pearson, K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space / K. Pearson // *Philosophical Magazine*. – 1901. – Vol. 2. – P. 559–572.
210. Raftery, A. E. Discussion: Performance of Bayesian model averaging / A. E. Raftery, Y. Zheng // *Journal of the American Statistical Association*. – 2003. – 464 : Vol. 98. – P. 931–938.
211. Raftery, A. E. Bayesian model averaging for linear regression models / A. E. Raftery, D. Madigan, J. A. Hoeting // *Journal of the American Statistical Association*. – 1997. – 437 : Vol. 92. – P. 179–191.
212. Raftery, A. E. Approximate Bayes factors and accounting for model uncertainty in generalised linear models / A. E. Raftery // *Biometrika*. – 1996. – 2 : Vol. 83. – P. 251–266.
213. Ravasz, E. Hierarchical organization of modularity in metabolic networks / E. Ravasz, A. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai, A.-L. Barabasi // *Science*. – 2002. – Vol. 297. – P. 1151–1155.
214. Rissanen, J. Order estimation by accumulated prediction errors / J. Rissanen // *Journal of Applied Probability*. – 1986. – Vol. 23A. – P. 55–61.
215. Roberds, W. A Daily View of Yield Spreads and Short-Term Interest Rate Movements / W. Roberds, D. Runckle, C. H. Whiteman // *Journal of Money, Credit and Banking*. – 1996. – 1 : Vol. 28. – P. 34–53.
216. Roever C. Model averaging for robust extrapolation in evidence synthesis / C. Roever, S. Wandel, T. Friede // *Statistics in Medicine*. – 2018. – 5 : Vol. 38. – P. 674–694.
217. Romer, D. *Advanced Macroeconomics* / D. Romer. – Berkley : California Univ. Press, – 1996. – 459 p.

218. Rothman, Adam J. Sparse permutation invariant covariance estimation / Adam J. Rothman, Peter J. Bickel, Elizaveta Levina, Ji Zhu // *Electronic Journal of Statistics*. – 2008. – Vol. 2. – P. 494–515.
219. Rothman, Adam J. Sparse multiple regression with covariance estimation / Adam J. Rothman, Elizaveta Levina, Ji Zhu // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. – 2010. – Vol. 19. – P. 947–962.
220. Ruchstuhl, A. Nonparametric function estimation of the relationship between two repeatedly measured variables / A. Ruchstuhl, A. H. Welsh, R. J. Carroll // *Statistica Sinica*. – 2000. – 1 : Vol. 10. – P. 51–71.
221. Sala-i-Martin, X. Determinants of long-term growth: A Bayesian averaging of classical estimates (BACE) approach / X. Sala-i-Martin, G. Doppelhofer, R. I. Miller // *American Economic Review*. – 2004. – 4 : Vol. 94. – P. 813–835.
222. Schwarz, G. Estimating the dimension of a model / G. Schwarz // *Annals of Statistics*. – 1978. – 2 : Vol. 6. – P. 461–464.
223. Shehata, Y. A. A randomization method to control the type I error rates in best subset regression / Y. A. Shehata, P. White // *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. – 2008. – 2 : Vol. 7. – P. 398–407.
224. Sheshinski, E. Inflation and the Costs of Price Adjustment / E. Sheshinski, Y. Weiss // *Review of Economic Studies*. – 1977. – Vol. 44. – P. 287–303.
225. Shibata, R. An optimal selection of regression variables / R. Shibata // *Biometrika*. – 1981. – 1 : Vol. 68. – P. 45–54.
226. Shibata, R. Asymptotic mean efficiency of a selection of regression variables / R. Shibata // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. – 1983. – 1 : Vol. 35. – P. 415–423.
227. Shibata, R. Asymptotically efficient selection of the order of the model for estimating parameters of a linear process / R. Shibata // *Annals of Statistics*. – 1980. – 1 : Vol. 8. – P. 147–164.

228. Šidák, Z. K. Rectangular Confidence Regions for the Means of Multivariate Normal Distributions / Z. K. Šidák // *Journal of the American Statistical Association*. – 1967. – 318 : Vol. 62. – P. 626–633.
229. Sims, C. A. Money, Income and Casuality / C. A. Sims // *American Economic Review*. – 1972. – Vol. 62. – P. 540–552.
230. Sims, C. A. Macroeconomics in Reality / C. A. Sims // *Econometrica*. – 1980. – Vol. 48. – P. 1–48.
231. Smith, M. Nonparametric regression using Bayesian variable selection / M. Smith, R. Kohn // *Journal of Econometrics*. – 1996. – 2 : Vol. 75. – P. 317–343.
232. Stock, J. H. Combination forecasts of output growth in a seven–country data set / J. H. Stock, M. W. Watson // *Journal of Forecasting*. – 2004. – Vol. 23. – P. 405–430.
233. Stock, J. H. Forecasting with many predictors / J. H. Stock, M. W. Watson // Elliott, G., Granger, C.W.J., Timmermann, A. (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, vol. 1. – Amsterdam : Elsevier, – 2006. – P. 515-554.
234. Stock, J. H. Why Has U.S. Inflation Become Harder to Forecast? / J. H. Stock, M. W. Watson // *Journal of Money, Credit, and Banking*. – 2007. – Vol. 39. – P. 3–34.
235. Storey, J. D. A direct approach to false discovery rates / J. D. Storey // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2002. – Vol. 64. – P. 479–498.
236. Storey J. D. Strong control, conservative point estimation and simultaneous conservative consistency of false discovery rates: a unified approach / J. D. Storey, J. E. Taylor, D. Siegmund // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2004. – Vol. 66. – P. 187–205.
237. Sun, W. Large–scale multiple testing under dependency / W. Sun, T. Cai // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2009. – Vol. 71. – P. 393–424.
238. Tibshirani, R. Regression Shrinkage and Selection via the LASSO / R. Tibshirani // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (methodological)*. – 1996. – 1 : Vol. 58. – P. 267–288.

239. Timmermann, A. Forecast combinations / A. Timmermann // Elliott, G., Granger, C.W.J., Timmermann, A. (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, vol. 1. – Amsterdam : Elsevier, – 2006. – P. 135-196.
240. Tobin, J. The Interest Elasticity of Transactions Demand for Cash / J. Tobin // *Review of Economics and Statistics*. – 1956. – Vol. 38. – P. 241–247.
241. Tong, H. *Threshold Models in Non-Linear Time Series Analysis* / H. Tong. – New York : Springer-Verlag, – 1983. – 279 p.
242. Turek, D. Model-averaged Wald confidence intervals / D. Turek, D. Fletcher // *Computational Statistics & Data Analysis*. – 2012. – 9 : Vol. 56. – P. 2809–2815.
243. Turlach, Berwin A. Simultaneous variable selection / Berwin A. Turlach, William N. Venables, Stephen J. Wright // *Technometrics*. – 2005. – Vol. 47. – P. 349–363.
244. Tzavalis E. Forecasting Inflation from the Term Structure / E. Tzavalis, M. R. Wickens // *Journal of Empirical Finance*. – 1996. – 3. – P. 103–122.
245. Wan, A. Least squares model averaging by Mallows criterion / A. Wan, G. Zou, X. Zhang // *Journal of Econometrics*. – 2010. – 2 : Vol. 156. – P. 277–283.
246. Wang, H. Interval estimation by frequentist model averaging / H. Wang, S. Zhou // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. – 2013. – 23 : Vol. 42. – P. 4342–4356.
247. Wang, J. Semiparametric model averaging prediction: a Bayesian approach / J. Wang, J. Li // *Australian & New Zealand Journal of Statistics*. – 2018. – 4 : Vol. 60. – P. 407–422.
248. Wang, L. Efficient semiparametric GARCH modeling of financial volatility / L. Wang, C. Feng, Q. Song, L. Yang // *Statistica Sinica*. – 2012. – 1 : Vol. 22. – P. 249–270.
249. Wang, Y. Forecasting realized volatility in a changing world: A dynamic model averaging approach / Y. Wang, F. Ma, Y. Wei, C. Wu // *Journal of Banking & Finance*. – 2016. – Vol. 64. – P. 136–149.

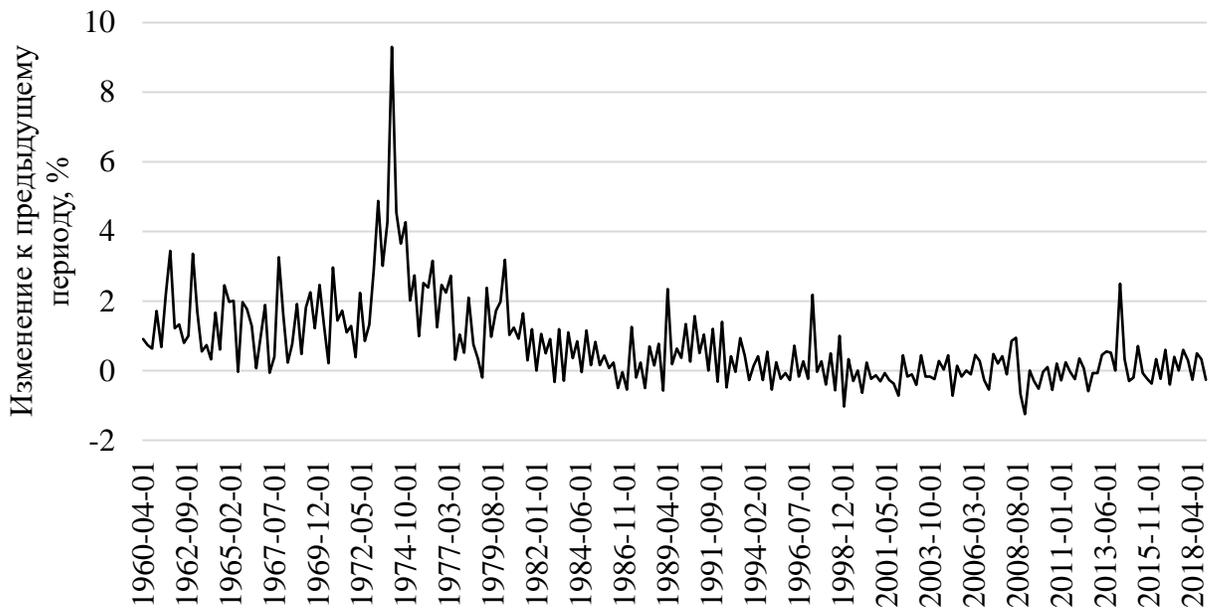
250. Wang, Y. Spline smoothing for bivariate data with application to association between hormones / Y. Wang, W. Guo, M. Brown // *Statistica Sinica*. – 2000. – 1 : Vol. 10. – P. 377–397.
251. Watson, Mark W. Vector Autoregressions and Cointegration / Mark W. Watson // *Handbook of Econometrics*. Robert Engle and Daniel McFadden, editors. – Amsterdam : Elsevier, – 1994. – P. 2843-2913.
252. Welsh, A. H. Local regression for vector responses / A. H. Welsh, T. W. Yee // *Journal of Statistical Planning and Inference*. – 2006. – 9 : Vol. 136. – P. 3007–3031.
253. Welsh, A. H. Marginal longitudinal nonparametric regression: locality and efficiency of spline and kernel methods / A. H. Welsh, X. Lin, R. J. Carroll // *Journal of American Statistical Association*. – 2002. – 458 : Vol. 97. – P. 482–494.
254. Wishart, J. The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population / J. Wishart // *Biometrika*. – 1928. – Vol. 20A. – P. 32–52.
255. Wold, H. Partial least squares / H. Wold // Kotz, Samuel; Johnson, Norman L. *Encyclopedia of statistical sciences*. – New York : Wiley, – 1985. – P. 581-591.
256. Wooldridge, Jeffrey M. *Introductory econometrics, a modern approach* / Jeffrey M. Wooldridge. – Boston : South Western CENGAGE learning, – 2009. – 865 p.
257. Wright, J. H. Forecasting U.S. Inflation by Bayesian Model Averaging / J. H. Wright // *Journal of Forecasting*. – 2009. – Vol. 28. – P. 131–144.
258. Xiao, H. On Tuning Parameter Selection in Model Selection and Model Averaging: A Monte Carlo Study / H. Xiao, Y. Sun // *Journal of Risk and Financial Management*. – 2019. – 3 : Vol. 12. – P. 1–16.
259. Xie, T. Heteroscedasticity–robust model screening: A useful toolkit for model averaging in big data analytics / T. Xie // *Economics Letters*. – 2017. – C : Vol. 151. – P. 119–122.
260. Xie, T. Prediction model averaging estimator / T. Xie // *Economics Letters*. – 2015. – Vol. 131. – P. 5–8.

261. Yang, L. Direct estimation in an additive model when the components are proportional / L. Yang // *Statistica Sinica*. – 2002. – 3 : Vol. 12. – P. 801–821.
262. Yu, Q. Clustered bayesian model averaging / Q. Yu, S. N. MacEachern, M. Peruggia // *Bayesian Analysis*. – 2013. – 4 : Vol. 8. – P. 883–908.
263. Yuan, M. Dimension reduction and coefficient estimation in multivariate linear regression / M. Yuan, A. Ekici, Z. Lu, R. Monteiro // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2007. – Vol. 69. – P. 329–346.
264. Yuan, M. Model selection and estimation in regression with grouped variables / M. Yuan, Y. Lin // *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. – 2006. – Vol. 68. – P. 49–67.
265. Yuan, M. Model selection and estimation in the gaussian graphical model / M. Yuan, Y. Lin // *Biometrika*. – 2007. – Vol. 94. – P. 19–35.
266. Yuan, Z. Combining linear regression models: When and how? / Z. Yuan, Y. Yang // *Journal of the American Statistical Association*. – 2005. – 472 : Vol. 100. – P. 1202–1214.
267. Zakoian, J.–M. Threshold heteroskedastic models / J.–M. Zakoian // *Journal of Economic Dynamics and Control*. – 1994. – 5 : Vol. 18. – P. 931–955.
268. Zellner, A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions, and tests for aggregation bias / A. Zellner // *Journal of the American Statistical Association*. – 1962. – Vol. 57. – P. 348–368.
269. Zeng, J. Studentized bootstrap model–averaged tail area intervals / J. Zeng, D. J. Fletcher, P. Dillingham, C. E. Cornwall // *PLoS ONE* . – 2019. – 3 : Vol. 14. – P. 1–16.
270. Zhang, B. A general framework for weighted gene co–expression network analysis / B. Zhang, S. Horvath // *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*. – 2005. – Vol. 4. – P. 1–45.
271. Zhang, G. P. Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model / G. P. Zhang // *Neurocomputing*. – 2003. – Vol. 50. – P. 159–175.

272. Zhang, H. H. Variable selection for the multicategory svm via adaptive sup–norm regularization / H. H. Zhang, Y. Liu, Y. Wu, J. Zhu // *Electronic Journal of Statistics*. – 2008. – Vol. 2. – P. 149–167.
273. Zhang, J. Bayesian model averaging for Kriging regression structure selection / J. Zhang, A. Taflanidis // *Probabilistic Engineering Mechanics*. – 2019. – Vol. 56. – P. 58–70.
274. Zhang, X. Inference after model averaging in linear regression models / X. Zhang, C.–A. Liu // *Econometric theory*. – 2019. – 4 : Vol. 35. – P. 816–841.
275. Zhang, X. Consistency of model averaging estimators / X. Zhang // *Economics Letters*. – 2015. – Vol. 130. – P. 120–123.
276. Zhang, X. Adaptively combined forecasting for discrete response time series / X. Zhang, Z. Lu, G. Zou // *Journal of Econometrics*. – 2013. – 1 : Vol. 176. – P. 80–91.
277. Zhang, X. Model averaging by jackknife criterion in models with dependent data / X. Zhang, A. Wan, G. Zou // *Journal of Econometrics*. – 2013. – 2 : Vol. 174. – P. 82–94.
278. Zhang, X. Model averaging and weight choice in linear mixed–effects models / X. Zhang, G. Zou, H. Liang // *Biometrika*. – 2014. – 1 : Vol. 101. – P. 205–218.
279. Zhang, X. MALMEM: model averaging in linear measurement error models / X. Zhang, Y. Ma, R. Carroll // *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Statistical Methodology)*. – 2019. – 4 : Vol. 81 – P. 763–779.
280. Zhao, P. Grouped and hierarchical model selection through composite absolute penalties / P. Zhao, G. Rocha, B. Yu // *The Annals of Statistics*. – 2009. – Vol. 37. – P. 3468–3497.
281. Zhu, J. On selection of spatial linear models for lattice data / J. Zhu, H.–C. Huang, P. Reyes // *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Statistical Methodology)*. – 2010. – 3 : Vol. 72. – P. 389–402.
282. Zhu, R. Model averaging for multivariate multiple regression models / R. Zhu, G. Zou, X. Zhang // *A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. – 2017. – 1 : Vol. 52. – P. 205–227.

283. Zou, H. One-step sparse estimates in nonconcave penalized likelihood models / H. Zou, R. Li // *The Annals of Statistics*. – 2008. – Vol. 36. – P. 1509–1533.
284. Zou, H. The adaptive lasso and its oracle properties / H. Zou // *Journal of the American Statistical Association*. – 2006. – Vol. 101. – P. 1418–1429.
285. Zubakin, V. A. Improvement of regression forecasting models / V. A. Zubakin, O. A. Kosorukov, N. A. Moiseev // *Modern Applied Science*. – 2015. – 6 : Vol. 9. – P. 344–353.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А



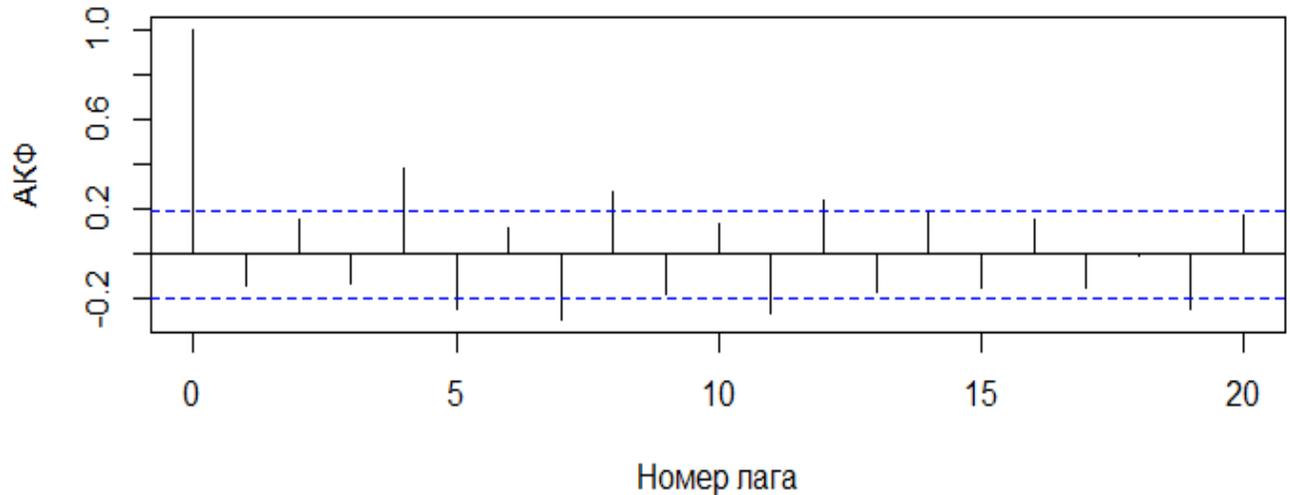
**Рисунок А.1** – Временной ряд кварталных темпов прироста индекса потребительских цен в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



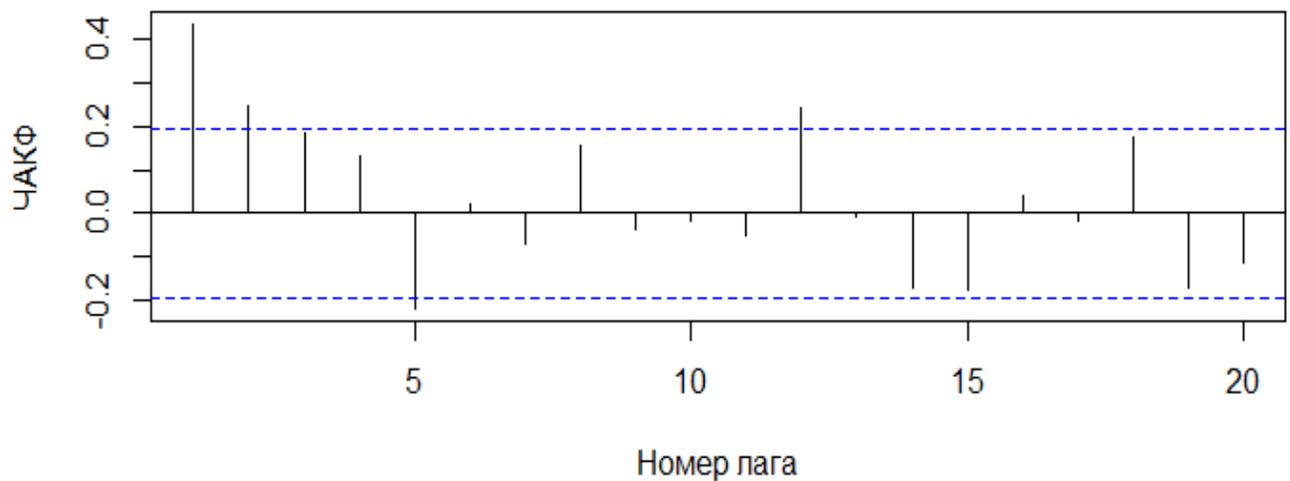
**Рисунок А.2** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений кварталных темпов прироста индекса потребительских цен в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



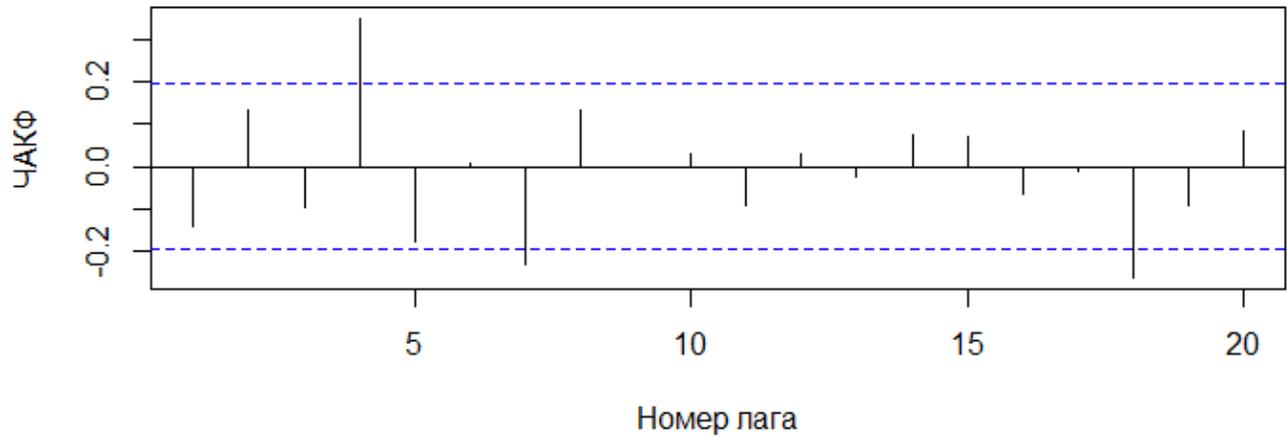
**Рисунок А.3** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



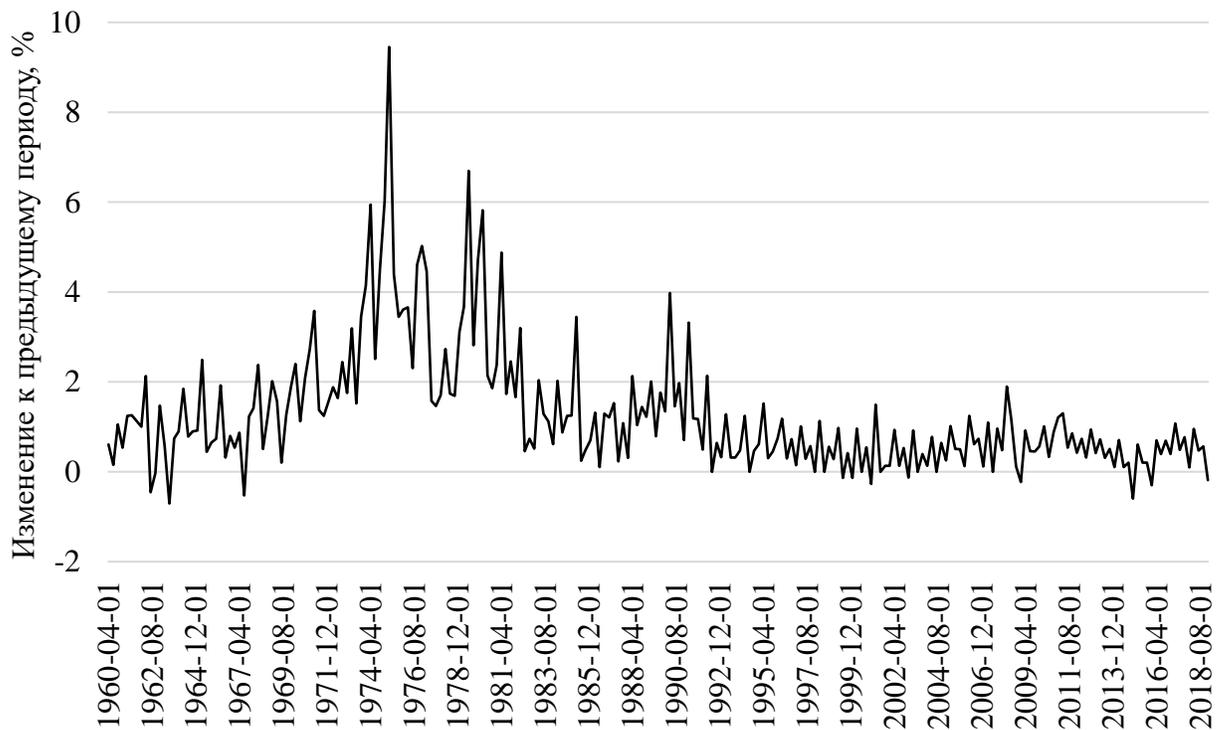
**Рисунок А.4** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



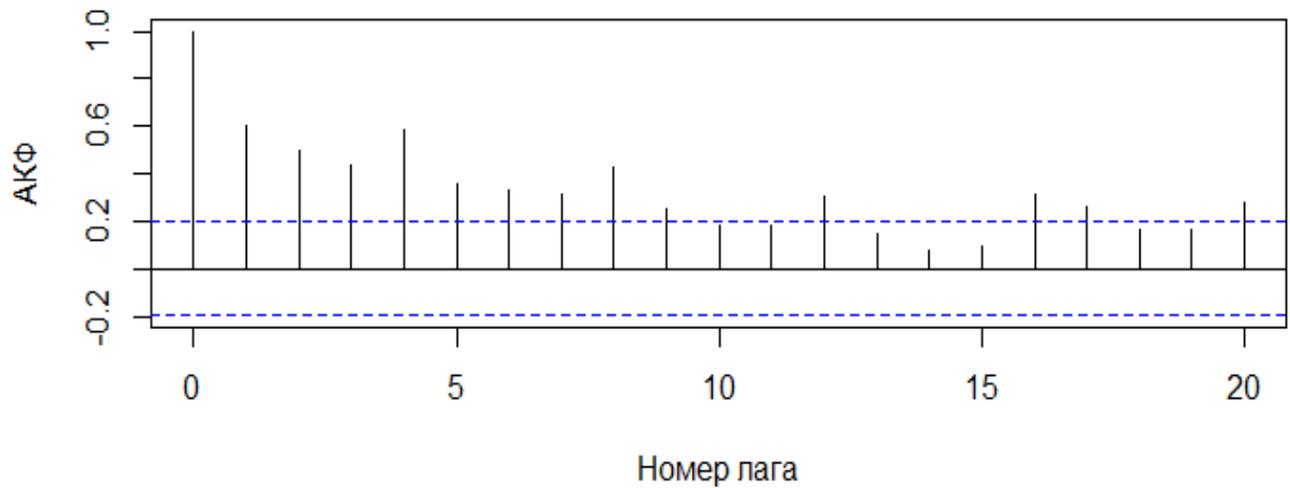
**Рисунок А.5** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений  
квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



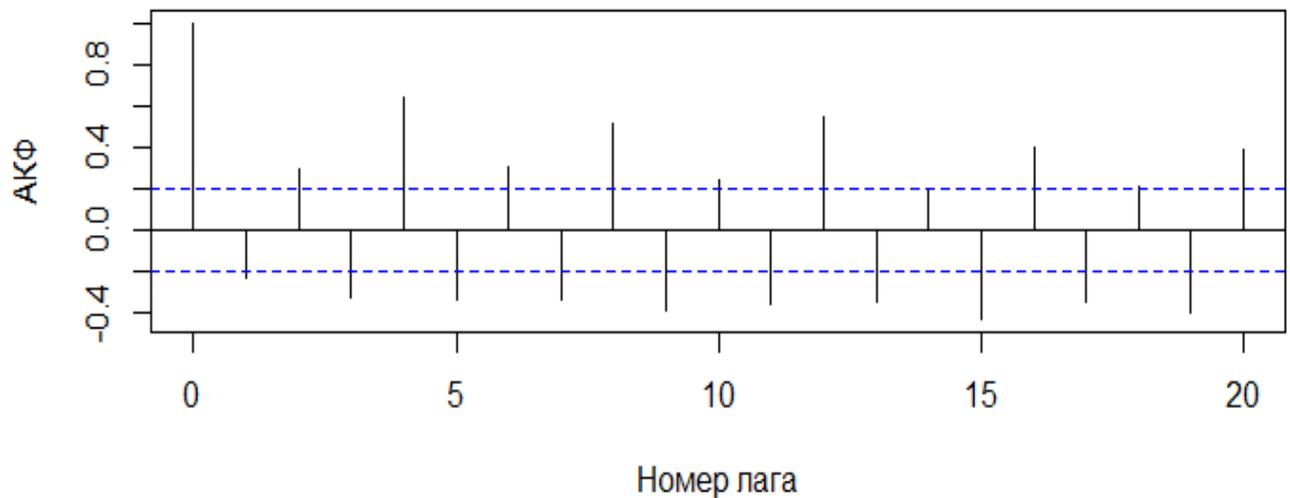
**Рисунок А.6** – Временной ряд кварталных темпов прироста индекса  
потребительских цен в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



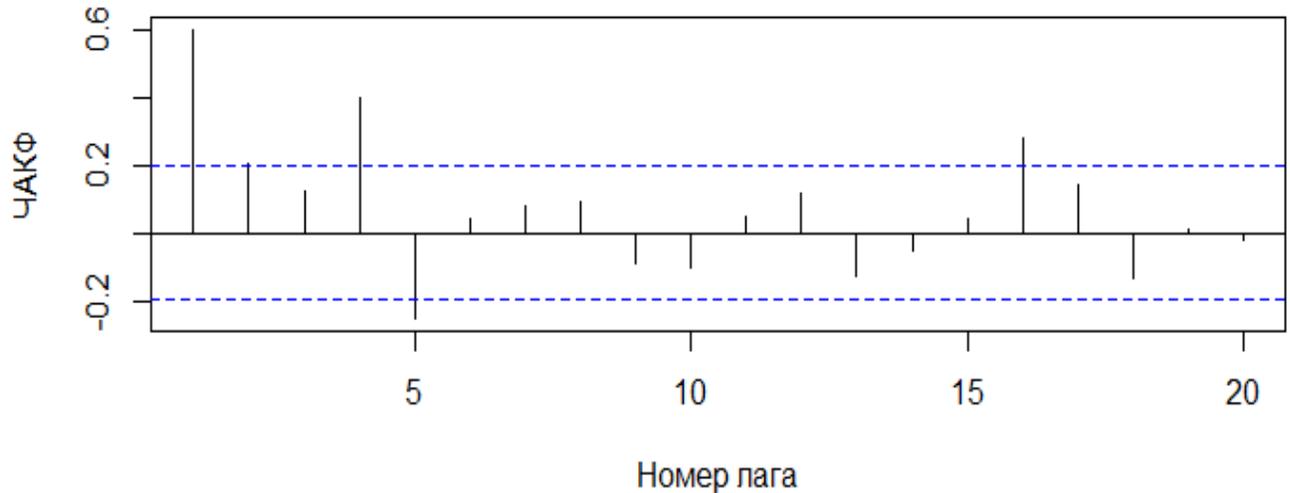
**Рисунок А.7** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



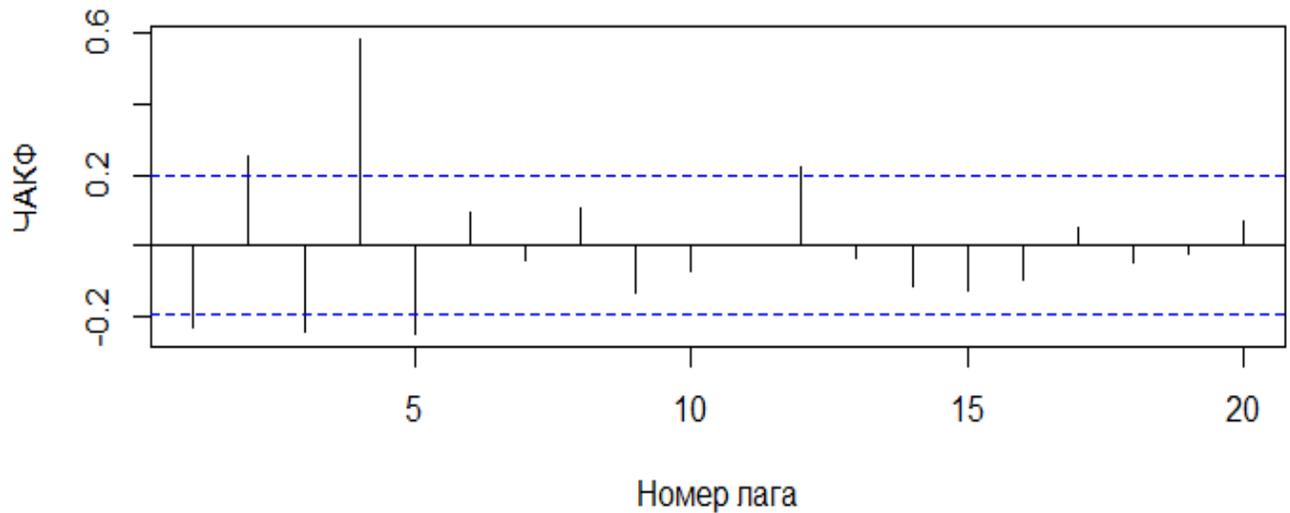
**Рисунок А.8** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



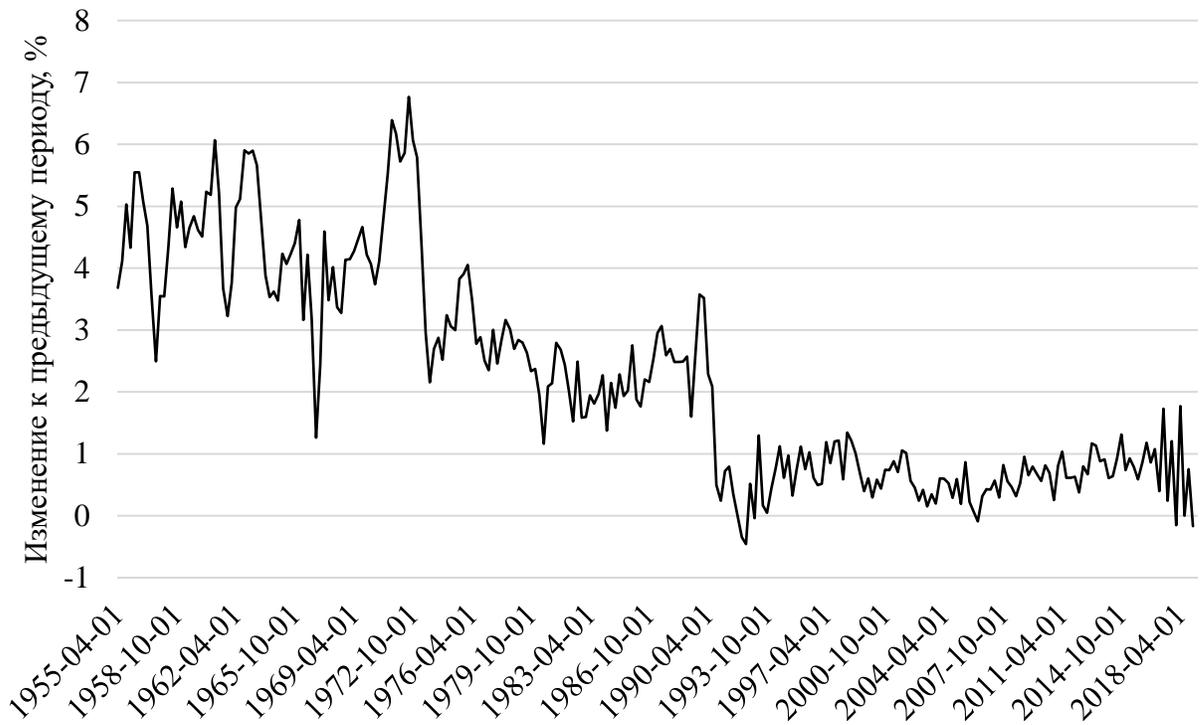
**Рисунок А.9** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок А.10** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста индекса потребительских цен в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



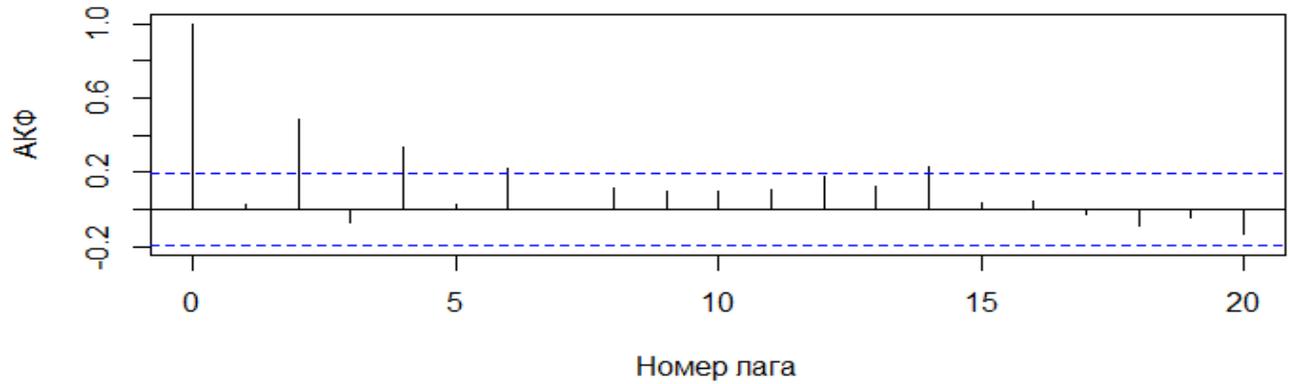
**Рисунок А.11** – Временной ряд кварталных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



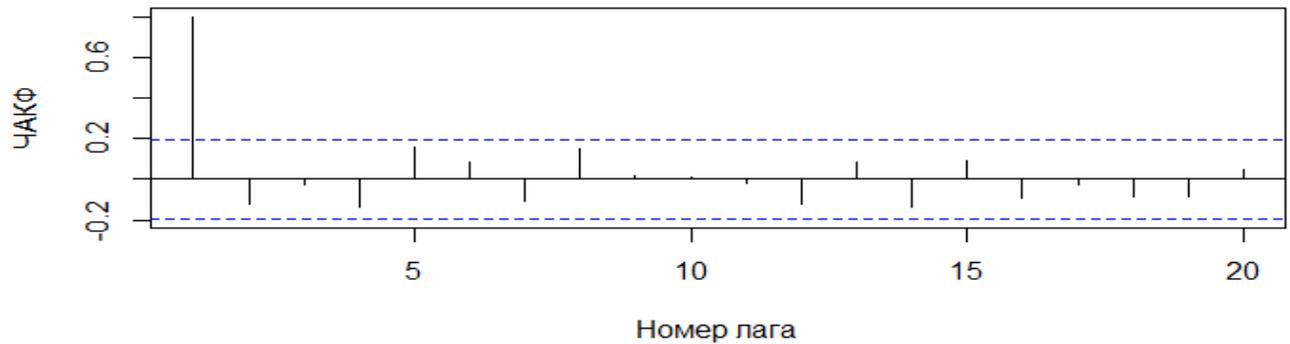
**Рисунок А.12** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений кварталных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



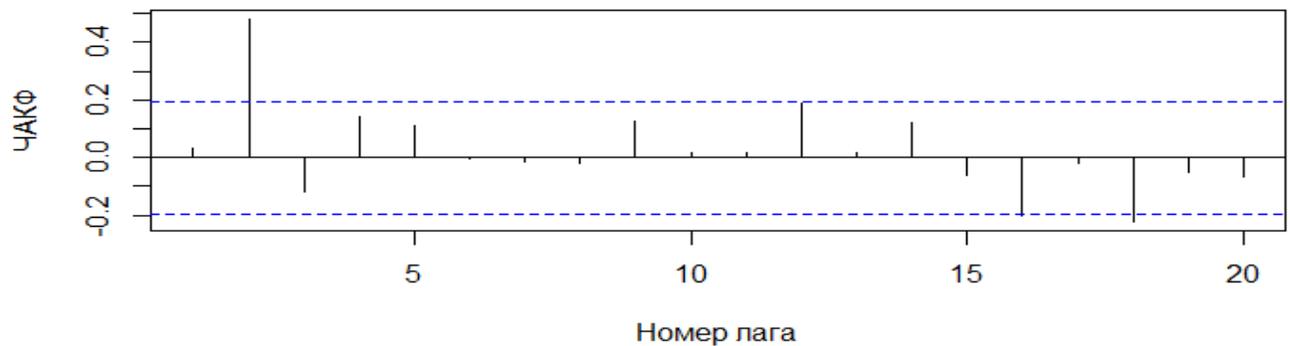
**Рисунок А.13** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



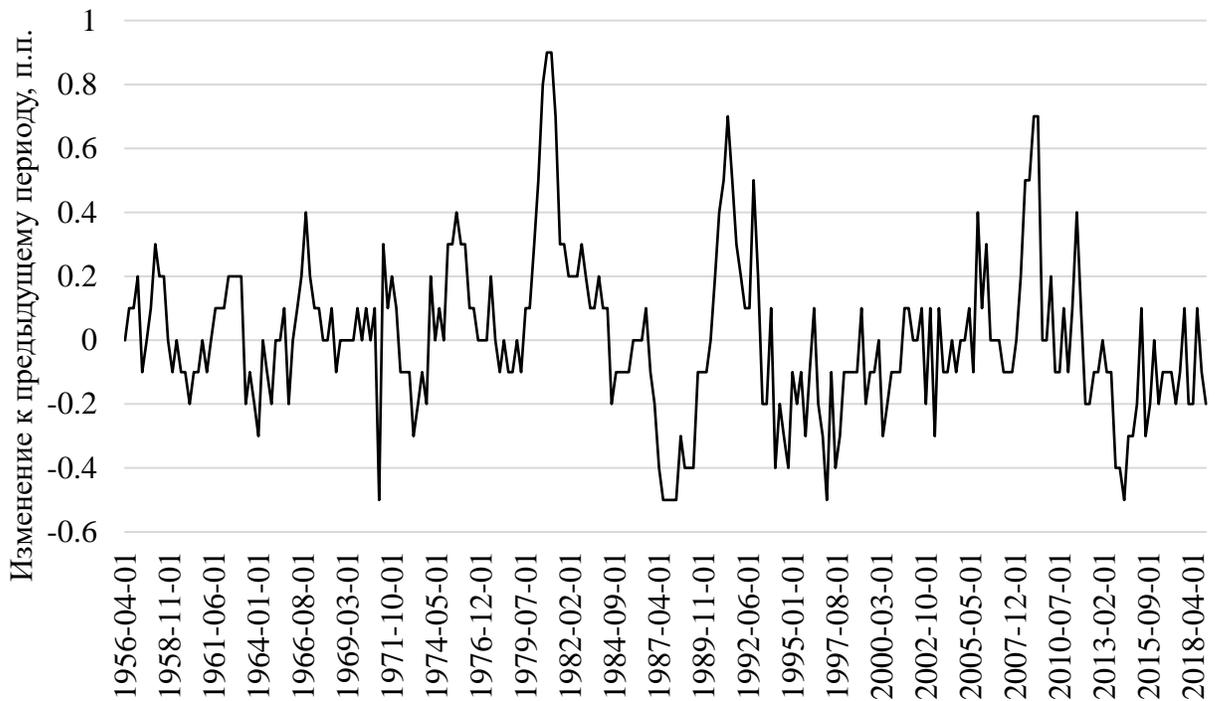
**Рисунок А.14** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



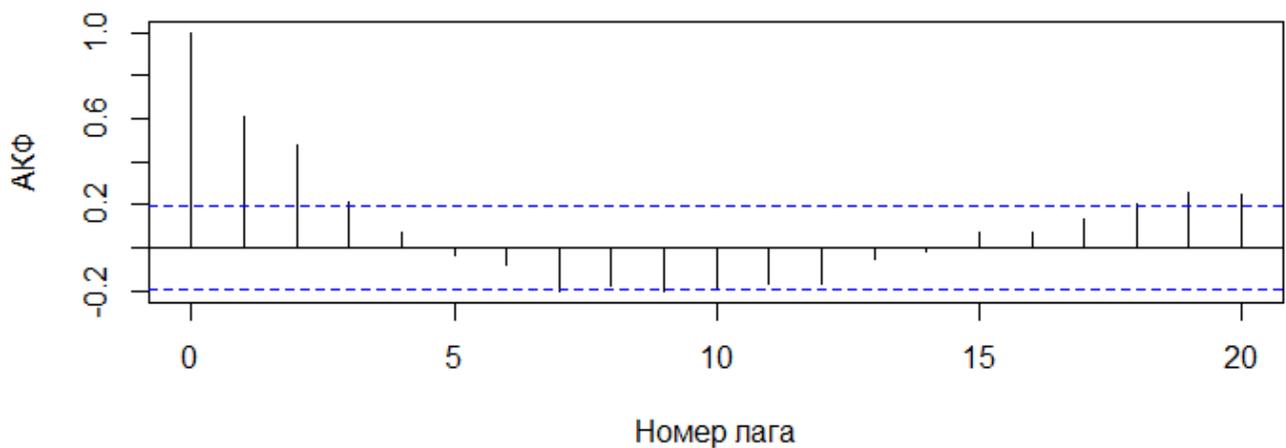
**Рисунок А.15** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных темпов прироста денежного агрегата М2 в Японии

Источник: составлено автором на основе данных Международного валютного фонда



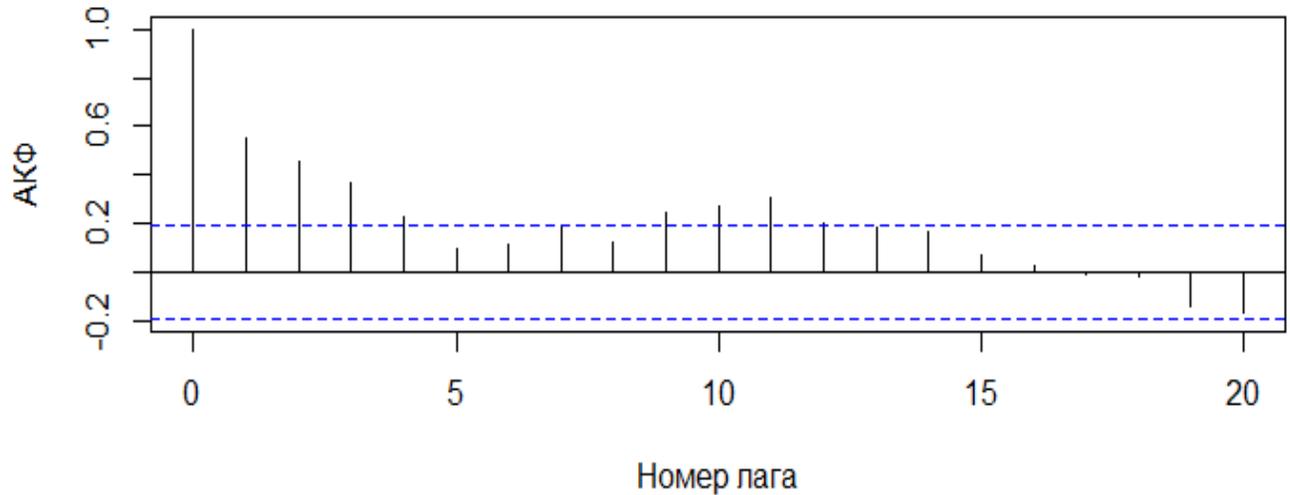
**Рисунок А.16** – Временной ряд кварталных изменений в уровне безработицы в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



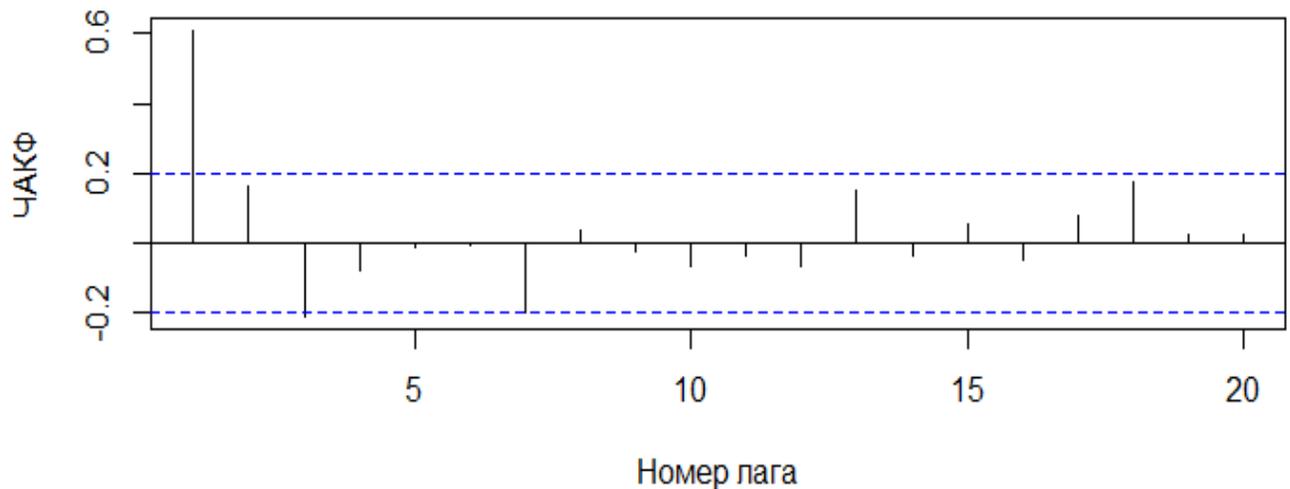
**Рисунок А.17** – Автокорреляционная функция для первых 100 значений кварталных изменений в уровне безработицы в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



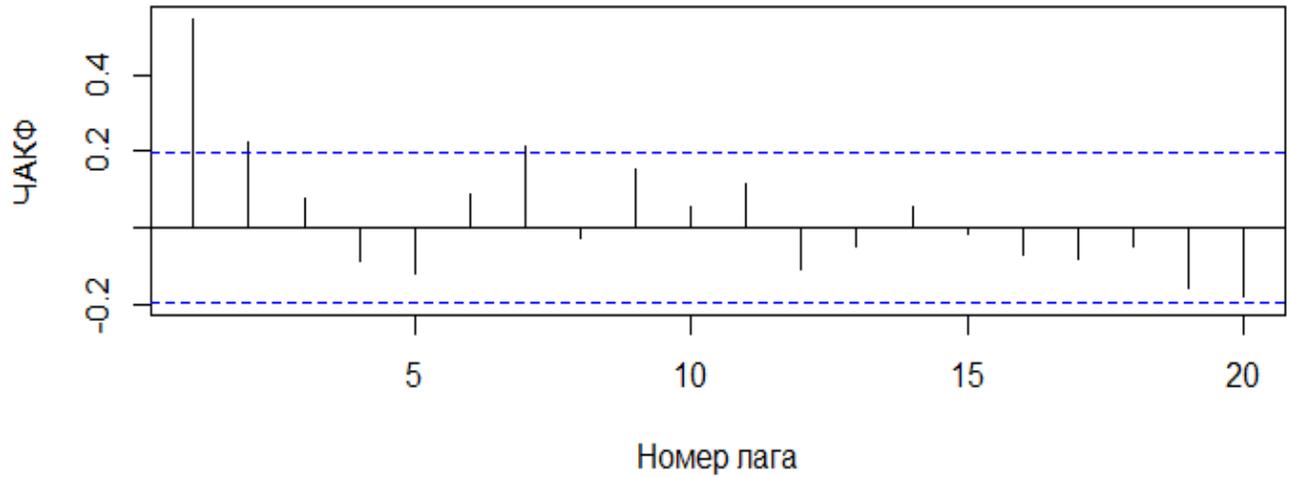
**Рисунок А.18** – Автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



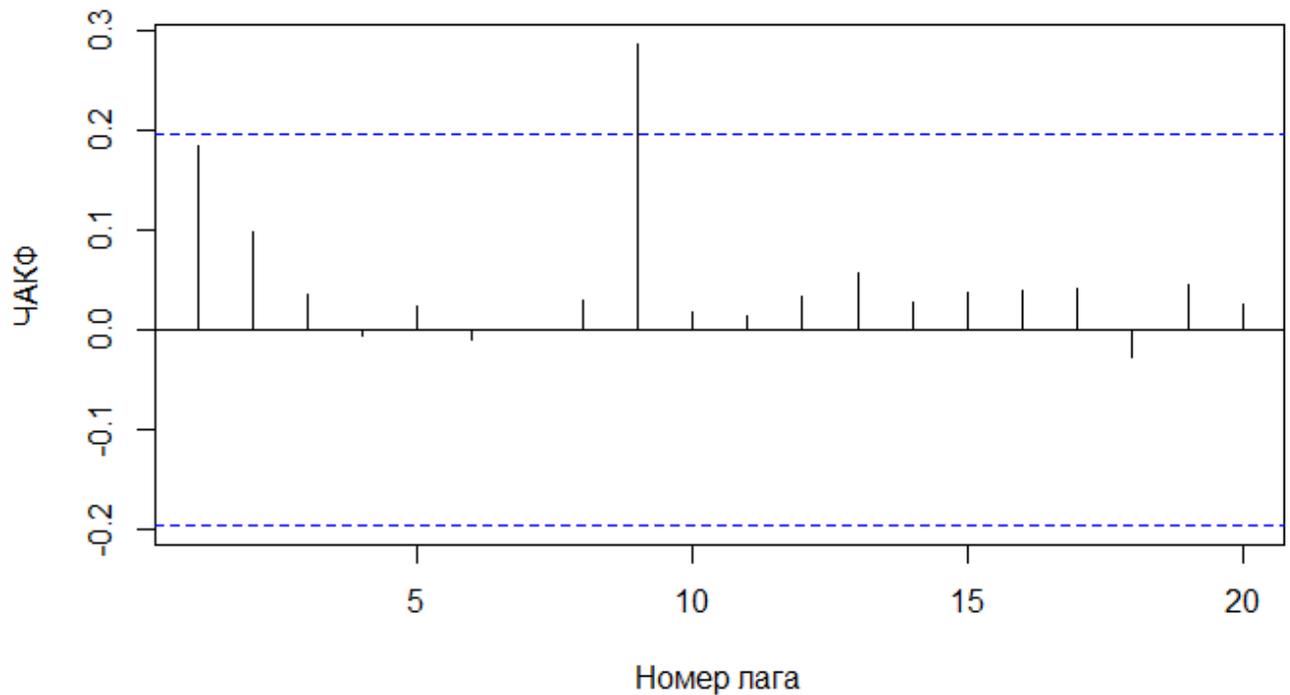
**Рисунок А.19** – Частная автокорреляционная функция для первых 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



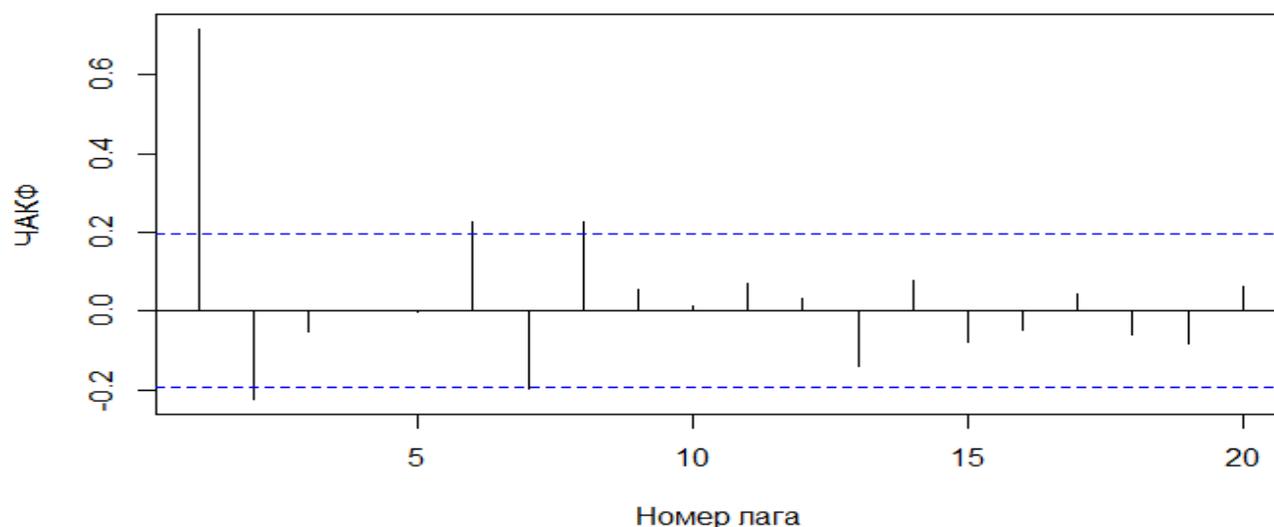
**Рисунок А.20** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений квартальных изменений в уровне безработицы в Великобритании

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок А.21** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений темпов прироста индекса потребительских цен в России

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития



**Рисунок А.22** – Частная автокорреляционная функция для последних 100 значений темпов прироста индекса потребительских цен в России

Источник: составлено автором на основе данных Организации экономического сотрудничества и развития

**Таблица А.1** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию MSE,  $m = 4$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	MSE	1.412245	1.412245	1.413594	1.500384	1.412343	1.414995
	w1	0.8342	0.8342	0.8289	0.589	0.8286	0.832
	w2	0.6536	0.6536	0.6479	0.3266	0.6392	0.6524
	w3	0.5434	0.5434	0.5349	0.2241	0.5428	0.5434
	w4	0.4837	0.4837	0.4774	0.1691	0.4726	0.4836
40	MSE	1.180281	1.180281	1.181057	1.274298	1.180361	1.186613
	w1	0.9685	0.9685	0.9678	0.8279	0.9681	0.9683
	w2	0.8356	0.8356	0.8334	0.4911	0.8326	0.8355
	w3	0.6989	0.6989	0.6962	0.3104	0.6878	0.6961
	w4	0.6024	0.6024	0.6007	0.2212	0.5986	0.6011
80	MSE	1.073722	1.073722	1.073726	1.126084	1.075344	1.07856
	w1	0.9993	0.9993	0.9993	0.9815	0.9994	0.9987
	w2	0.964	0.964	0.9638	0.7989	0.964	0.9682
	w3	0.8738	0.8738	0.8737	0.5583	0.8725	0.8759
	w4	0.7696	0.7696	0.7696	0.3893	0.7689	0.7695

Источник: составлено автором

**Таблица А.2** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию MSE,  $m = 6$ .

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.595099	1.584214	1.581305	1.548723	1.575332	1.580023
	w1	0.8167	0.8055	0.8096	0.5574	0.8133	0.8261
	w2	0.6387	0.6194	0.6276	0.2998	0.635	0.6543
	w3	0.5392	0.5137	0.5255	0.1998	0.5375	0.5544
	w4	0.4848	0.4585	0.4693	0.1604	0.4705	0.5093
	w5	0.3748	0.3349	0.3642	0.0862	0.3542	0.3878
	w6	0.3692	0.3343	0.3575	0.0804	0.3508	0.3718
40	<i>MSE</i>	1.225285	1.223898	1.226202	1.300612	1.229469	1.230168
	w1	0.9639	0.9561	0.9625	0.8159	0.963	0.9669
	w2	0.828	0.8027	0.825	0.484	0.8184	0.8326
	w3	0.6889	0.6483	0.6836	0.3055	0.6819	0.6888
	w4	0.6002	0.5488	0.5944	0.2195	0.5804	0.602
	w5	0.3365	0.2603	0.3328	0.0578	0.3402	0.3378
	w6	0.3342	0.2676	0.3312	0.0577	0.3318	0.349
80	<i>MSE</i>	1.104427	1.102402	1.104555	1.135791	1.106067	1.095833
	w1	0.9991	0.9982	0.999	0.9793	0.9986	0.9991
	w2	0.969	0.9497	0.9687	0.8058	0.9625	0.9682
	w3	0.8743	0.8214	0.8729	0.5597	0.871	0.8712
	w4	0.7632	0.6875	0.7617	0.3999	0.7647	0.7708
	w5	0.32	0.1703	0.3179	0.0522	0.3243	0.3248
	w6	0.3218	0.1729	0.32	0.05	0.3261	0.3293

Источник: составлено автором

**Таблица А.3** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию MSE,  $m = 9$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.980721	1.836345	1.895016	1.631747	1.838751	2.01023
	w1	0.7938	0.7495	0.7974	0.5238	0.7935	0.7965
	w2	0.6377	0.5614	0.6286	0.2821	0.6148	0.6482
	w3	0.554	0.4573	0.531	0.1873	0.528	0.5664
	w4	0.5008	0.3997	0.4762	0.1471	0.4871	0.5114

## Продолжение таблицы А.3

	w5	0.4102	0.2868	0.3784	0.0743	0.3731	0.4261
	w6	0.4007	0.2898	0.371	0.0791	0.3805	0.4316
	w7	0.4053	0.2892	0.3772	0.0764	0.3763	0.4271
	w8	0.4084	0.2894	0.3771	0.0783	0.3696	0.4375
	w9	0.4056	0.2836	0.3754	0.0748	0.3764	0.4283
40	<i>MSE</i>	1.334179	1.312947	1.330512	1.324853	1.353906	1.353566
	w1	0.9563	0.9322	0.9556	0.7987	0.9552	0.9634
	w2	0.8147	0.7407	0.8104	0.4722	0.8133	0.8222
	w3	0.6787	0.5774	0.672	0.2931	0.6743	0.6835
	w4	0.5897	0.4693	0.5817	0.2113	0.5812	0.5887
	w5	0.34	0.2099	0.3299	0.0567	0.338	0.358
	w6	0.347	0.2118	0.3364	0.0561	0.3468	0.3607
	w7	0.3382	0.2028	0.3283	0.577	0.3491	0.3366
	w8	0.341	0.2096	0.3326	0.0601	0.3286	0.3252
	w9	0.3543	0.222	0.3444	0.0588	0.3387	0.322
80	<i>MSE</i>	1.109306	1.107999	1.110039	1.130571	1.129652	1.099458
	w1	0.9987	0.9944	0.9987	0.9805	0.9987	0.9982
	w2	0.9599	0.9113	0.959	0.7907	0.9625	0.9593
	w3	0.863	0.7537	0.8625	0.5555	0.8602	0.8518
	w4	0.7694	0.6079	0.7666	0.397	0.7556	0.7319
	w5	0.3297	0.1327	0.326	0.0501	0.317	0.3008
	w6	0.3382	0.1403	0.3342	0.0535	0.3297	0.3301
	w7	0.3307	0.1316	0.3266	0.048	0.3249	0.3152
	w8	0.3282	0.1279	0.3243	0.0495	0.3283	0.3296
	w9	0.3218	0.1293	0.318	0.0491	0.3203	0.3194

Источник: составлено автором

**Таблица А.4** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию ВИС,  $m = 4$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.457402	1.457402	1.457319	1.457673	1.423258	1.471792
	w1	0.6304	0.6304	0.6206	0.6203	0.6116	0.6387
	w2	0.3521	0.3521	0.3408	0.3404	0.3492	0.3664
	w3	0.2498	0.2498	0.2396	0.2394	0.2428	0.26
	w4	0.2077	0.2077	0.2	0.2	0.1848	0.2125

## Продолжение таблицы А.4

40	<i>MSE</i>	1.298385	1.298385	1.301812	1.301753	1.291321	1.299321
	w1	0.8105	0.8105	0.8044	0.8044	0.8015	0.8145
	w2	0.4537	0.4537	0.4443	0.4443	0.4454	0.4628
	w3	0.2805	0.2805	0.2713	0.2712	0.2763	0.2723
	w4	0.194	0.194	0.1873	0.1872	0.1871	0.1934
80	<i>MSE</i>	1.13961	1.13961	1.143122	1.143115	1.12843	1.14121
	w1	0.9695	0.9695	0.9665	0.9665	0.9676	0.9697
	w2	0.7038	0.7038	0.6964	0.6964	0.6912	0.7032
	w3	0.4495	0.4495	0.4429	0.4428	0.433	0.4446
	w4	0.2826	0.2826	0.2762	0.2762	0.284	0.2797

Источник: составлено автором

**Таблица А.5** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию ВИС,  $m = 6$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.531847	1.533302	1.523368	1.517422	1.540227	1.581985
	w1	0.5972	0.5964	0.5829	0.5605	0.5843	0.6188
	w2	0.3491	0.3481	0.3338	0.3047	0.3351	0.3658
	w3	0.2428	0.2415	0.2255	0.1994	0.2289	0.2692
	w4	0.1976	0.1956	0.1815	0.1591	0.1789	0.2149
	w5	0.1095	0.1075	0.0991	0.0837	0.0999	0.1261
	w6	0.1079	0.1067	0.0981	0.0845	0.0986	0.1209
40	<i>MSE</i>	1.287326	1.28761	1.290412	1.290811	1.311268	1.273256
	w1	0.8039	0.8036	0.7933	0.7932	0.784	0.8153
	w2	0.472	0.4715	0.4572	0.4567	0.4457	0.4675
	w3	0.2804	0.2797	0.266	0.2656	0.2686	0.2982
	w4	0.1946	0.1939	0.1849	0.1845	0.1826	0.2083
	w5	0.0509	0.0502	0.0476	0.0475	0.0466	0.0532
	w6	0.0548	0.054	0.0508	0.0503	0.0475	0.0541
80	<i>MSE</i>	1.171932	1.172059	1.174377	1.174377	1.170231	1.15699
	w1	0.968	0.9679	0.9652	0.9652	0.9645	0.9694
	w2	0.7061	0.7058	0.6977	0.6977	0.6905	0.7079
	w3	0.4356	0.435	0.4286	0.4286	0.4324	0.4447
	w4	0.2812	0.2803	0.2731	0.2731	0.2799	0.299
	w5	0.0242	0.0228	0.0235	0.0235	0.0246	0.0287
	w6	0.0266	0.025	0.0251	0.0251	0.0246	0.0289

Источник: составлено автором

**Таблица А.6** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию ВИС,  $m = 9$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.694907	1.678955	1.644776	1.629418	1.66095	1.769303
	w1	0.5844	0.5801	0.5593	0.5337	0.5547	0.5963
	w2	0.3463	0.3397	0.3154	0.2832	0.3097	0.3761
	w3	0.2595	0.2519	0.2257	0.1933	0.2093	0.2842
	w4	0.198	0.1908	0.1678	0.1428	0.1669	0.2412
	w5	0.1228	0.1156	0.0992	0.0793	0.0979	0.1398
	w6	0.1184	0.1101	0.096	0.0769	0.093	0.1454
	w7	0.1169	0.1079	0.0954	0.0755	0.0859	0.1526
	w8	0.1123	0.1045	0.0912	0.0733	0.0955	0.1481
	w9	0.1165	0.1084	0.0953	0.0768	0.0968	0.1511
40	<i>MSE</i>	1.352114	1.351788	1.353341	1.353927	1.348325	1.348503
	w1	0.7894	0.7888	0.7791	0.7786	0.7826	0.7996
	w2	0.4522	0.4506	0.4337	0.433	0.4373	0.4812
	w3	0.2876	0.2855	0.2718	0.2715	0.2575	0.295
	w4	0.1916	0.1889	0.1791	0.1787	0.1813	0.2084
	w5	0.0498	0.0485	0.046	0.0456	0.0482	0.0595
	w6	0.051	0.0487	0.0468	0.046	0.045	0.0565
	w7	0.0521	0.0496	0.0452	0.0449	0.0475	0.0543
	w8	0.0516	0.0491	0.0463	0.0461	0.0502	0.0577
	w9	0.0517	0.0502	0.0476	0.0475	0.0467	0.0589
80	<i>MSE</i>	1.171273	1.170671	1.170224	1.170378	1.152341	1.186376
	w1	0.9634	0.9631	0.96	0.96	0.9619	0.9649
	w2	0.7021	0.7002	0.6907	0.6906	0.6923	0.7013
	w3	0.4385	0.4363	0.4259	0.4258	0.4347	0.4563
	w4	0.2836	0.2803	0.2742	0.274	0.2798	0.3048
	w5	0.0273	0.0242	0.0247	0.0246	0.0224	0.0276
	w6	0.0292	0.0269	0.0281	0.028	0.0271	0.032
	w7	0.0269	0.0245	0.0254	0.0254	0.0255	0.0275
	w8	0.0299	0.0278	0.0289	0.029	0.0264	0.0284
	w9	0.0259	0.0242	0.0243	0.0243	0.0255	0.0289

Источник: составлено автором

**Таблица А.7** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию F- статистика,  $m = 4$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.458661	1.458661	1.457826	1.463198	1.462404	1.480975
	w1	0.614	0.614	0.5992	0.5668	0.6052	0.6453
	w2	0.3308	0.3308	0.3148	0.2852	0.3171	0.3525
	w3	0.2304	0.2304	0.2176	0.1941	0.2119	0.2463
	w4	0.1771	0.1771	0.1669	0.1479	0.1652	0.1935
40	<i>MSE</i>	1.345871	1.345871	1.346792	1.350051	1.321607	1.324561
	w1	0.7318	0.7318	0.721	0.714	0.7208	0.7586
	w2	0.3056	0.3056	0.2925	0.2861	0.2928	0.3278
	w3	0.171	0.171	0.1607	0.1551	0.1605	0.1897
	w4	0.1082	0.1082	0.1005	0.0961	0.106	0.1268
80	<i>MSE</i>	1.238926	1.238926	1.239607	1.239875	1.275889	1.229155
	w1	0.8646	0.8646	0.8572	0.8569	0.847	0.8708
	w2	0.2617	0.2617	0.2526	0.2522	0.2491	0.2848
	w3	0.1051	0.1051	0.0975	0.0972	0.1049	0.1265
	w4	0.0545	0.0545	0.0506	0.0505	0.052	0.0741

Источник: составлено автором

**Таблица А.8** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию F- статистика,  $m = 6$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.534856	1.53456	1.51584	1.512927	1.564458	1.565908
	w1	0.5749	0.5741	0.5557	0.5303	0.5592	0.6203
	w2	0.3138	0.3129	0.2894	0.2611	0.2805	0.3559
	w3	0.2167	0.2153	0.1933	0.1726	0.1927	0.26
	w4	0.1744	0.1724	0.153	0.1338	0.1537	0.2116
	w5	0.0876	0.0858	0.0748	0.0636	0.0788	0.1341
	w6	0.0912	0.0898	0.0791	0.0676	0.0857	0.1296
40	<i>MSE</i>	1.36197	1.361627	1.354005	1.365254	1.326859	1.32849
	w1	0.7245	0.7241	0.7114	0.7051	0.7111	0.7411
	w2	0.2969	0.2965	0.2827	0.2771	0.2848	0.3326
	w3	0.1634	0.163	0.1529	0.1485	0.1539	0.1967

Продолжение таблицы А.8

	w4	0.1111	0.1103	0.1007	0.0977	0.0957	0.1323
	w5	0.0274	0.0266	0.0233	0.0216	0.0222	0.0346
	w6	0.026	0.0252	0.0239	0.0228	0.024	0.0342
80	<i>MSE</i>	1.261543	1.261543	1.264064	1.263935	1.236504	1.254842
	w1	0.8557	0.8557	0.8468	0.8466	0.8537	0.8731
	w2	0.2626	0.2626	0.2508	0.2506	0.2552	0.2881
	w3	0.111	0.111	0.1016	0.1013	0.1013	0.134
	w4	0.0524	0.0524	0.0485	0.0481	0.0479	0.0715
	w5	0.0036	0.0036	0.0033	0.0031	0.0022	0.004
	w6	0.0026	0.0026	0.0025	0.0025	0.0011	0.0048

Источник: составлено автором

**Таблица А.9** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию F- статистика,  $m = 9$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.712448	1.682937	1.63928	1.607243	1.616617	1.825362
	w1	0.552	0.545	0.5146	0.4904	0.5166	0.626
	w2	0.3083	0.2972	0.2629	0.243	0.2637	0.3936
	w3	0.2127	0.2026	0.1756	0.1576	0.1766	0.3093
	w4	0.1682	0.1556	0.1316	0.1153	0.1372	0.257
	w5	0.1025	0.0914	0.0735	0.0603	0.0726	0.177
	w6	0.1013	0.0898	0.0725	0.0606	0.0699	0.1814
	w7	0.1049	0.0934	0.0741	0.061	0.0702	0.1821
	w8	0.1003	0.0908	0.0715	0.0572	0.0696	0.1876
	w9	0.1006	0.0902	0.0719	0.0608	0.0765	0.177
40	<i>MSE</i>	1.331854	1.330796	1.337458	1.33891	1.370318	1.368247
	w1	0.7045	0.7032	0.6858	0.6807	0.6834	0.7412
	w2	0.2926	0.2917	0.2746	0.2704	0.2825	0.3363
	w3	0.1666	0.166	0.1549	0.1519	0.1445	0.2015
	w4	0.1035	0.1025	0.0924	0.0891	0.0987	0.1467
	w5	0.0232	0.0222	0.0211	0.0199	0.0218	0.0418
	w6	0.0232	0.0226	0.0198	0.0185	0.022	0.0389
	w7	0.0246	0.0238	0.0218	0.0201	0.0198	0.0424
	w8	0.0248	0.0241	0.0216	0.0197	0.0213	0.0401
	w9	0.0233	0.0225	0.0193	0.0184	0.0223	0.0395

Продолжение таблицы А.9

80	<i>MSE</i>	1.219736	1.219682	1.221796	1.221807	1.282559	1.240945
	w1	0.858	0.858	0.8508	0.8507	0.8527	0.8702
	w2	0.2589	0.2588	0.2476	0.2475	0.2482	0.2914
	w3	0.1048	0.1047	0.0962	0.0961	0.0975	0.1378
	w4	0.0554	0.0553	0.0509	0.0507	0.0471	0.0729
	w5	0.0031	0.0029	0.0025	0.0024	0.0024	0.0051
	w6	0.0021	0.0021	0.0016	0.0016	0.0024	0.0047
	w7	0.0028	0.0028	0.0027	0.0027	0.0023	0.0044
	w8	0.0022	0.0022	0.0025	0.0025	0.0022	0.0045
	w9	0.004	0.004	0.0038	0.0038	0.0019	0.0045

Источник: составлено автором

**Таблица А.10** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию бутстрап,  $m = 4$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.423126	1.423126	1.411576	1.458673	1.435022	1.429975
	w1	0.7256	0.7256	0.7262	0.5899	0.7172	0.7434
	w2	0.4969	0.4969	0.4922	0.3162	0.491	0.5196
	w3	0.3969	0.3969	0.391	0.2234	0.3685	0.4056
	w4	0.3402	0.3402	0.3288	0.1706	0.3088	0.3417
40	<i>MSE</i>	1.205586	1.205586	1.206058	1.268908	1.239423	1.224884
	w1	0.926	0.926	0.9221	0.8258	0.9176	0.9264
	w2	0.704	0.704	0.698	0.493	0.6924	0.7104
	w3	0.5333	0.5333	0.5279	0.3102	0.5182	0.5381
	w4	0.4203	0.4203	0.415	0.2121	0.4062	0.4306
80	<i>MSE</i>	1.115735	1.115735	1.11604	1.15255	1.104863	1.10235
	w1	0.9965	0.9965	0.9962	0.9846	0.9953	0.9955
	w2	0.924	0.924	0.924	0.7922	0.9118	0.9215
	w3	0.7674	0.7674	0.7674	0.5691	0.7677	0.7694
	w4	0.6327	0.6327	0.6327	0.4024	0.6126	0.6189

Источник: составлено автором

**Таблица А.11** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию бутстрап,  $m = 6$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.577075	1.576173	1.563686	1.532479	1.599864	1.586442
	w1	0.7069	0.7043	0.6999	0.5554	0.6863	0.7162
	w2	0.4992	0.4932	0.4823	0.3019	0.4565	0.5168
	w3	0.3868	0.3802	0.3703	0.2003	0.3479	0.4031
	w4	0.3407	0.3325	0.3206	0.1584	0.2869	0.3574
	w5	0.2321	0.2243	0.2147	0.0826	0.1903	0.2507
	w6	0.2288	0.2197	0.2099	0.0815	0.191	0.2438
40	<i>MSE</i>	1.240247	1.239571	1.241776	1.285424	1.289202	1.240869
	w1	0.9198	0.9172	0.9168	0.8206	0.9105	0.9232
	w2	0.6994	0.6926	0.6913	0.4821	0.6848	0.7074
	w3	0.5343	0.522	0.5248	0.308	0.5067	0.5433
	w4	0.4246	0.408	0.416	0.2104	0.404	0.4339
	w5	0.1934	0.1732	0.1867	0.0599	0.1647	0.1997
	w6	0.1954	0.1786	0.1885	0.0601	0.1654	0.202
80	<i>MSE</i>	1.140508	1.139433	1.140555	1.17063	1.102485	1.140032
	w1	0.9965	0.9953	0.9963	0.981	0.9964	0.9966
	w2	0.9154	0.9053	0.913	0.7931	0.9137	0.9167
	w3	0.7626	0.7413	0.7597	0.5558	0.7645	0.765
	w4	0.615	0.585	0.6125	0.3856	0.6103	0.6168
	w5	0.1793	0.1262	0.176	0.0557	0.1646	0.1811
	w6	0.168	0.1209	0.1668	0.0503	0.1529	0.1696

Источник: составлено автором

**Таблица А.12** – Сравнение методов спецификации уравнения регрессии по критерию бутстрап,  $m = 9$

$n$		Все комбинации	Лучшие подмножества ( $l \leq 4$ )	Прямой отбор	Пошаговый отбор ( $sig < 0.05$ )	Остаточная корреляция	Обратное исключение
20	<i>MSE</i>	1.864355	1.816384	1.770326	1.644799	1.696479	1.932457
	w1	0.7024	0.671	0.6913	0.5336	0.6542	0.711
	w2	0.495	0.4604	0.4616	0.2704	0.4343	0.5207
	w3	0.4079	0.3716	0.3705	0.1883	0.3302	0.4397
	w4	0.3482	0.3117	0.3082	0.1388	0.2793	0.3819

Продолжение таблицы А.12

	w5	0.2642	0.2206	0.2194	0.0749	0.1834	0.2995
	w6	0.259	0.2204	0.2168	0.0761	0.1833	0.2873
	w7	0.2507	0.2134	0.2054	0.0745	0.1805	0.2869
	w8	0.2702	0.2342	0.2226	0.0804	0.1862	0.3038
	w9	0.2573	0.2207	0.2141	0.0764	0.1855	0.2895
40	<i>MSE</i>	1.288918	1.279112	1.27942	1.281611	1.321003	1.289904
	w1	0.9099	0.8946	0.9086	0.8038	0.901	0.9136
	w2	0.6942	0.666	0.684	0.4802	0.6559	0.7053
	w3	0.5244	0.4872	0.5114	0.299	0.491	0.5336
	w4	0.4252	0.3856	0.4133	0.2126	0.3911	0.4362
	w5	0.196	0.1594	0.1843	0.0607	0.1673	0.2062
	w6	0.1948	0.1591	0.1842	0.0587	0.1697	0.2087
	w7	0.195	0.1598	0.1843	0.057	0.1649	0.206
	w8	0.1941	0.1605	0.1808	0.0548	0.168	0.2058
	w9	0.1917	0.1542	0.1803	0.0545	0.1644	0.2044
80	<i>MSE</i>	1.148844	1.146393	1.147739	1.162737	1.123335	1.149186
	w1	0.9955	0.9917	0.995	0.9816	0.9941	0.9959
	w2	0.9192	0.885	0.9175	0.7976	0.9094	0.9215
	w3	0.7611	0.7037	0.7569	0.569	0.7503	0.7645
	w4	0.6162	0.5436	0.6113	0.3928	0.6096	0.6209
	w5	0.1718	0.1041	0.1671	0.0514	0.1622	0.175
	w6	0.1741	0.1077	0.1697	0.0514	0.1661	0.1783
	w7	0.1738	0.1084	0.1702	0.054	0.1603	0.1787
	w8	0.1714	0.1048	0.1685	0.048	0.1636	0.1745
	w9	0.1726	0.108	0.1681	0.0503	0.1635	0.1762

Источник: составлено автором

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Доказательство Теоремы 5.1

Пусть  $\mathbf{x} = x_1, x_s, \dots, x_n$  вектор независимых нормально распределенных случайных величин с вектором математических ожиданий  $\mathbf{m} = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  и дисперсий  $\mathbf{v} = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  соответственно. Введем вспомогательную переменную  $x_s = \sum_{i=2}^{n-1} x_i$  что позволит упростить доказательство. Тогда совместная функция плотности вероятности  $x_1, x_s$  и  $x_n$  будет выглядеть следующим образом:

$$pdf(x_1, x_s, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_1 \sigma_s \sigma_n} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x_n - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}$$

Теперь предположим, что анализируемые случайные величины связаны между собой функциональной связью вида  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$  или при введении вспомогательной переменной  $x_n = x_1 + x_s$ . После введения данной функциональной связи, функция плотности вероятности для  $x_1$  может быть рассчитана как нормализованное маргинальное распределение:

$$pdf(x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_1 \sigma_s \sigma_n} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x_1 + x_s - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dx_s}{\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_1 \sigma_s \sigma_n} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x_1 + x_s - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dx_s dx_1} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x_1+x_s-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dx_s}{\iint_{-\infty} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x_1+x_s-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dx_s dx_1}$$

Рассматривая только числитель данной дроби, можно реорганизовать его элементы как показано ниже:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_s-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}} e^{-\frac{((x_1-\mu_n)+x_s)^2}{2\sigma_n^2}} dx_s = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_1-\mu_n)^2}{2\sigma_1^2\sigma_n^2}} e^{-\frac{\sigma_n^2(x_s-\mu_s)^2 + 2(x_1-\mu_n)x_s\sigma_s^2 + \sigma_s^2x_s^2}{2\sigma_s^2\sigma_n^2}} dx_s = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_1-\mu_n)^2}{2\sigma_1^2\sigma_n^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2}x_s^2 - 2\frac{\mu_s\sigma_n^2 + \sigma_s^2\mu_n - \sigma_s^2x_1}{\sigma_s^2\sigma_n^2}x_s + \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2}\right)} dx_s \end{aligned}$$

Здесь опустим член  $\frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2}$  поскольку он сократится при интегрировании знаменателя.

Продолжая упрощать последнее выражение, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_n^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_1-\mu_n)^2}{2\sigma_1^2\sigma_n^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}{\sigma_s\sigma_n}x_s - \frac{\mu_s\sigma_n^2 + \sigma_s^2\mu_n - \sigma_s^2x_1}{\sigma_s\sigma_n\sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\mu_s\sigma_n^2 + \sigma_s^2\mu_n - \sigma_s^2x_1)^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}} dx_s = \\ & = e^{-\frac{\sigma_n^2(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x_1-\mu_n)^2}{2\sigma_1^2\sigma_n^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\mu_s\sigma_n^2 + \sigma_s^2\mu_n - \sigma_s^2x_1)^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}{\sigma_s\sigma_n}x_s - \frac{\mu_s\sigma_n^2 + \sigma_s^2\mu_n - \sigma_s^2x_1}{\sigma_s\sigma_n\sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}}\right)^2} dx_s \end{aligned}$$

Выражение под интегралом можно опустить, поскольку оно сократится при интегрировании знаменателя. Таким образом, имеем:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_n^2(x_1-\mu_1)^2+\sigma_1^2(x_1-\mu_n)^2}{\sigma_1^2\sigma_n^2}-\frac{(\mu_s\sigma_n^2+\sigma_s^2\mu_n-\sigma_s^2x_1)^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_s^2)}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma_1^2+\sigma_n^2)x_1^2-2(\sigma_n^2\mu_1+\sigma_1^2\mu_n)x_1}{\sigma_1^2\sigma_n^2}+\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{\mu_n^2}{\sigma_n^2}-\frac{\sigma_s^2x_1^2-2\mu_s\sigma_n^2x_1-2\sigma_s^2\mu_nx_1}{\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_s^2)}+\frac{\mu_s\mu_n}{\sigma_n^2+\sigma_s^2}+\frac{\mu_s^2\sigma_n^2}{\sigma_s^2(\sigma_n^2+\sigma_s^2)}+\frac{\mu_n^2\sigma_s^2}{\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_s^2)}\right)}$$

Здесь снова опустим члены  $\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_n^2}{\sigma_n^2} + \frac{\mu_s\mu_n}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} + \frac{\mu_s^2\sigma_n^2}{\sigma_s^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} + \frac{\mu_n^2\sigma_s^2}{\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}$  поскольку они сократятся при интегрировании знаменателя. Далее имеем:

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma_1^2+\sigma_n^2)x_1^2-2(\sigma_n^2\mu_1+\sigma_1^2\mu_n)x_1}{\sigma_1^2\sigma_n^2}-\frac{\sigma_s^2x_1^2-2\mu_s\sigma_n^2x_1-2\sigma_s^2\mu_nx_1}{\sigma_n^2(\sigma_n^2+\sigma_s^2)}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}{\sigma_1^2(\sigma_s^2+\sigma_n^2)}x_1^2-2\frac{\mu_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)+\sigma_1^2(\mu_n-\mu_s)}{\sigma_1^2(\sigma_s^2+\sigma_n^2)}x_1\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}{\sigma_1^2(\sigma_s^2+\sigma_n^2)}(x_1^2-2\frac{\mu_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)+\sigma_1^2(\mu_n-\mu_s)}{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}x_1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}{\sigma_1^2(\sigma_s^2+\sigma_n^2)}(x_1-\frac{\mu_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)+\sigma_1^2(\mu_n-\mu_s)}{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2})^2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)+\sigma_1^2(\mu_n-\mu_s)}{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}\right)^2}$$

После сокращения члена  $e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1(\sigma_s^2+\sigma_n^2)+\sigma_1^2(\mu_n-\mu_s)}{\sigma_1^2+\sigma_s^2+\sigma_n^2}\right)^2}$  при интегрировании знаменателя функция плотности вероятности для  $x_1$  будет выглядеть как показано ниже:

$$pdf(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_1^2 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)} \left(x_1 - \frac{\mu_1 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) + \sigma_1^2 (\mu_n - \mu_s)}{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}\right)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_1^2 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)} \left(x_1 - \frac{\mu_1 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) + \sigma_1^2 (\mu_n - \mu_s)}{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}\right)^2} dx_1}$$

Интегрируя знаменатель, получаем нормализующую константу и конечную форму  $pdf(x_1)$ :

$$pdf(x_1) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}{2\pi\sigma_1^2(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_1^2 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)} \left(x_1 - \frac{\mu_1 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) + \sigma_1^2 (\mu_n - \mu_s)}{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}\right)^2}$$

Таким образом, по полученной функции плотности вероятности можно заключить, что случайная величина  $x_1$  подчиняется нормальному распределению с исправленными математическим ожиданием и дисперсией:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sigma_1^2 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_1 (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) + \sigma_1^2 (\mu_n - \mu_s)}{\sigma_1^2 + \sigma_s^2 + \sigma_n^2}$$

Таким образом, при том, что  $x_s = \sum_{i=2}^{n-1} x_i$  и  $x_i$  являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, имеем:  $\sigma_s^2 = \sum_{i=2}^{n-1} \sigma_i^2$ ,  $\mu_s = \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i$  и, подставляя данные выражения в последние две формулы, получим общий вид для скорректированных дисперсии и математического ожидания  $\hat{\sigma}_1^2$  и  $\hat{\mu}_1$ :

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sigma_1^2 \sum_{i=2}^n \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\mu_1 \sum_{i=2}^n \sigma_i^2 + \sigma_1^2 (\mu_n - \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i)}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

Принимая во внимание аналитическое выражение для  $\hat{\sigma}_1^2$ , легко показать, что  $\hat{\sigma}_1^2 < \sigma_1^2 \quad \forall \sigma_i^2 > 0$  и  $\lim_{\sigma_i^2 \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2 \quad \forall i$  что и требовалось доказать.

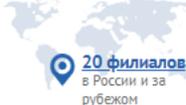
## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Рус Eng 中文 Лицей Абитуриенту Студенту Сотруднику Выпускникам Контакты
Поиск по сайту 
Войти 
Версия для слабовидящих



**Российский экономический  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени Г.В. Плеханова**

Основан в 1907 году



**20 филиалов**  
в России и за  
рубежом



**Сведения**  
об образовательной  
организации

Об университете
Структура
Образование
Наука
Международная деятельность

Главная → Прогнозы РЭУ

### Прогнозы РЭУ



**ПРОГНОЗЫ  
РЭУ**

Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики до февраля 2020 года сентябрь 2019
Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики до сентября 2019 года май 2019 года
Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики до мая 2019 года декабрь 2018 года
Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики до февраля 2019 года сентябрь 2018 года
Прогноз динамики основных рыночных индикаторов до конца I квартала 2019 года сентябрь 2018 года
Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики до 2019 года июль 2018 года
Прогноз основных макроэкономических индикаторов российской экономики в 2018 году март 2018 года
Прогноз динамики основных рыночных индикаторов на 2018 год февраль 2018 года

- Анализ трендов денежно-кредитной системы и финансовых рынков
- Анализ тенденций в бюджетно-налоговой сфере России
- Современные тренды развития товаров и услуг
- Тренды экономики промышленности России
- Тренды развития экономик субъектов Российской Федерации
- Мировая экономика

Рисунок В.1 – Прогнозы автора, публикуемые на сайте РЭУ им. Г.В. Плеханова

## Прогноз динамики индекса потребительских цен

Согласно полученным прогнозам (рис. 2) до января 2019 года ожидается, что ИПЦ будет находиться в районе 3,3-3,5%. Однако, начиная с января 2019 г., годовая инфляция, вероятнее всего, ускорится до темпов 4,3-4,8% вследствие повышения НДС с 18% до 20%. Помимо этого стремительный рост потребительского кредитования и существенное падение курса национальной валюты, произошедшие за последние месяцы, также создают дополнительные инфляционные риски.

Отметим, что риск наступления дефляции на рассматриваемом горизонте прогнозирования крайне мал и составляет сотые доли процента. Таким образом, в ближайшем будущем можно

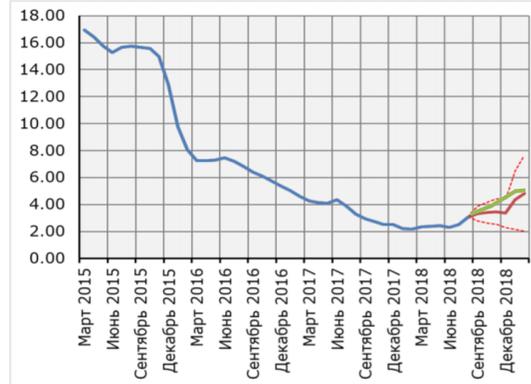


Рис.2. Динамика индекса потребительских цен, %

**Рисунок В.2** – Пример прогноза автора по ИПЦ с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>



**Рисунок В.3** – Пример прогноза автора по ВВП с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>



**Рисунок В.4** – Пример прогноза автора по индексу промышленного производства с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>



**Рисунок В.5** – Пример прогноза автора по сальдо торгового баланса с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>



**Рисунок В.6 –** Пример прогноза автора по ВВП с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>



**Рисунок В.7 –** Пример прогноза автора по ИПЦ с сайта РЭУ им. Г.В. Плеханова в сравнении с реальными данными

Источник: <https://www.rea.ru/ru/SiteAssets/Pages/prognozi-reu/>